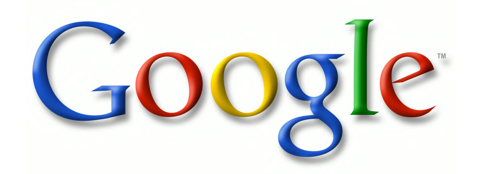
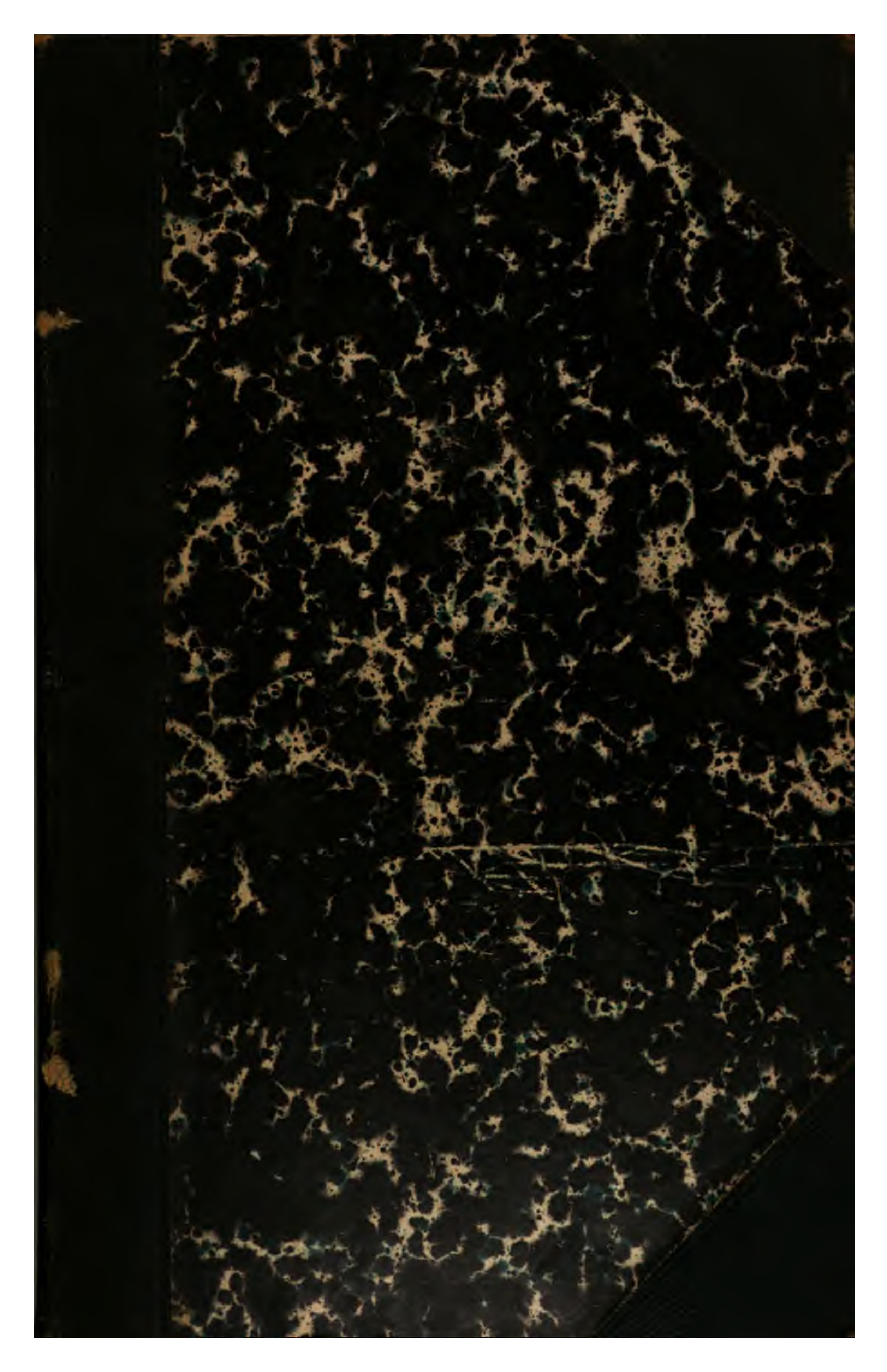
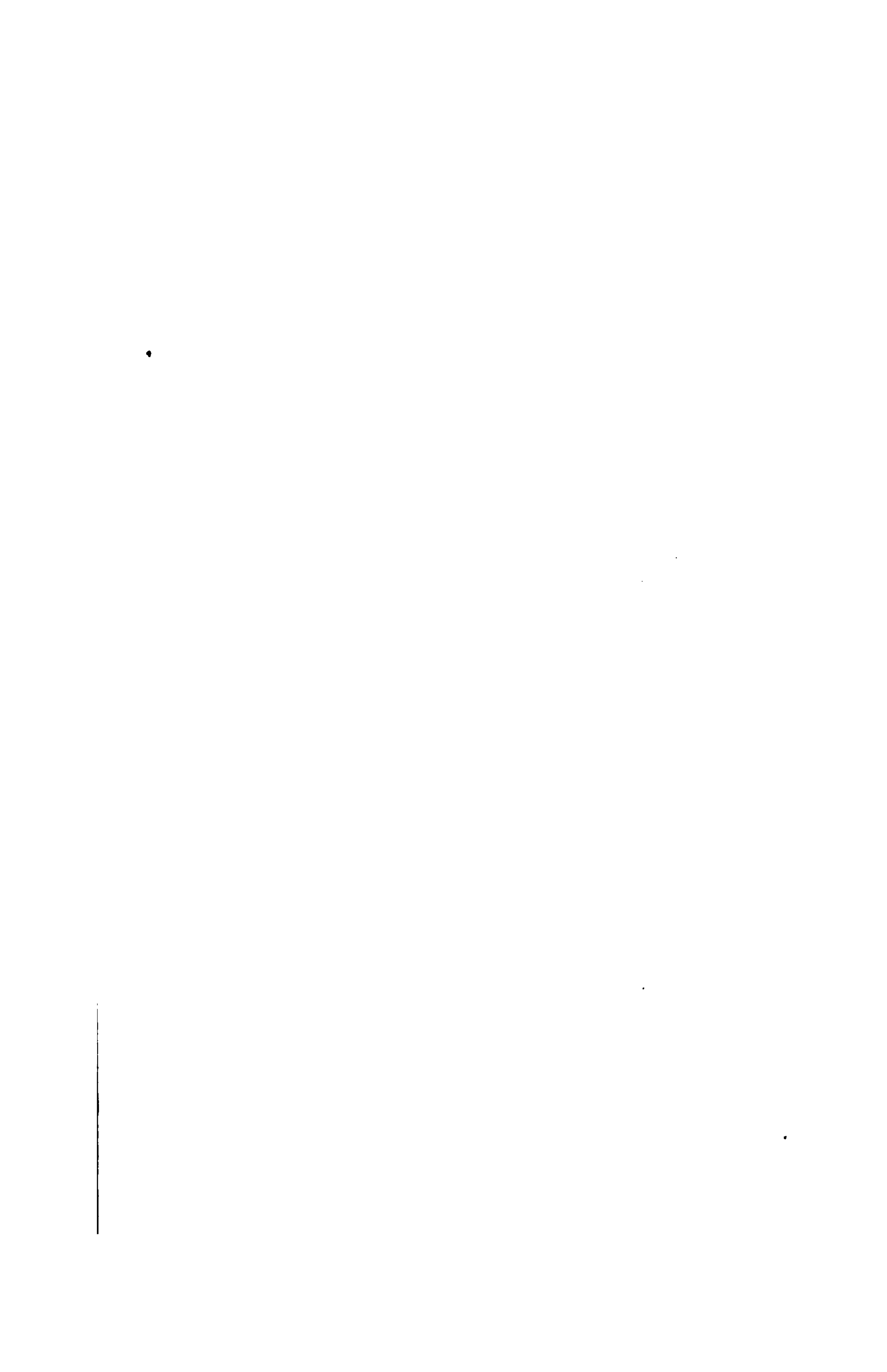







SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE
RI
TAS



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Elfter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1892.

Inhalts-Verzeichniss

des elften Teils.

---

litz (Musikth.) Glinzer (Fest.) Bebber (Wett.) Kleinstück (Zeitgl.) Napoli (Rend. IV.) Newcomb (Am. J. XIII.) Amsterdam (N. Arch. XVIII. XIX.) Bur. Long. (Ann. 1892).

XLIII. Scheffler (Kreisteil.) Mansion (übs. Maser) (part. Diff. Gl.) Picard (anal.) Dini (übs. Lüroth u. Schepp) (Th Funct.) Teixeira (diff. — int. II.) Weber (ell. F.) Molenbroek (Quat.) Divic (7 Oper.) Bergbohm (Int.) Hagen (Synops.) Foerster (Mitt. I.) Klein (astr. Ab.) Payne u. Hale (astr.) Poincaré (méc. cél.) Günther (ph. Geogr.)

XLIV. Iselin (Geom.) Preyer (Zahl). Schlichting (Gravit.) Pietzker (Raum). Lipps (ästh. Fact.) Secchi (übs. Schulze) (Naturkr.)

Berichtigungen

im 11. Teile:

Seite	1	Zeile	9 v. o.	statt	Curven	setze	Centrum
		„	13	„	Schwerpunkt	„	Spurpunkt
		„	14	„	P_1	„	P_0
„	2	„	4	„	P_5	„	P_0
		„	14 v. u.	„	parallele	„	Parallel-
„	3	„	14 v. o.	„	$\mathfrak{P}_2$	„	$\mathfrak{P}_1$
		„	10 v. u.	„	X	„	H
		„	5	„	P_{11}	„	für P_{11}
„	4	„	14	„	centum	„	centrum
„		„	12	„	5_1	„	a_2
„	5	„	5 v. o.	„	Mir	„	Wir
		„	11 v. u.	„	fm	„	im
		„	6	„	une	„	und
		„	5	„	$p5$	„	$p4$
„	7	„	5 v. o.	„	$\mathfrak{R}_3$	„	$\mathfrak{P}_3$
		„	12 v. u.	„	ps	„	$\mathfrak{P}_5$
„	8	„	19 v. o.	„	entsprechen	„	entstehen
		„	14 v. u.	„	11	„	16
		„	6	„	r_{31}, r_{31}	„	r_{31}, r_{32}
„	9	„	4 v. o.	„	$s_1 s_2$	„	$s_1' s_2'$
		„	19	„	$s_1 s_1$	„	$s_2 s_1$
		„	25	„	auf	„	aus
		„	32	„	C_{13}	„	C_{31}
„	11	„	12 v. u.	„	$a_1 a_2 a_3$	„	$a_{11} a_{21} a_{31}$
		„	4	„	C_{21}	„	C_{23}
„	12	„	13 v. o.	„	C_{11}	„	C_{31}
„	177	„	9 v. u.	nach	$\frac{1}{2}(p-1)$	„	Zahlen
„	178	„	16 v. o.	statt	b	„	c c
		„	7 v. u.	„	$p+1$	„	$p-1$

Seite	180	Zeile	13 v. u.	statt	3	setze	5
„	181	„	4 v. o.	„	k^2	„	h^2
		„	6 v. u.	„	Wir	„	III. Wir
„	183	„	5 v. o.	„	$x-2y-2$	„	$x-2y-3$
		„	2 v. u.	„	$\frac{1}{2}$	„	1
		„	1	„	$-\left(\frac{1x+1}{x}\right)^{2a}$	„	$+\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{2x}$
„	184	„	5	„	a_k	„	a_h
„		„	2		fehlt der Coefficient $\frac{2}{k-h}$		
„	185	„	10 v. o.	statt	$(4k-2)(4k-3)$	setze	$(4k-3)(4k-1)$
„	185	„	8 v u.	„	R_h	setze	R_k
„	186	„	6 v. o.	„	$k-2$	„	$k-1$
„		„	15	„	Identität	„	Identität (2)
„		„	4 v. u.	„	$i-2$	„	$i-1$
„	188	„	14	„	$2k-19$	„	$8k-19$
„	189	„	8 v. o.	„	$\binom{2}{3}$	„	$\frac{2}{3}$
„	49)	„	1	„	$((k+1(x$	„	$((k+1)x$
		„	10	„	Primzahlen	„	Primzahl
		„	13		nach Producte ist einzuschalten: ihrer Elemente und bezeichne die Summe dieser Producte		
„	191	„	2 u. 7	statt	${c \atop p}$	setze	$\frac{c}{p}$
			5	„	$p-3k-2$	„	$p-3k-1$
„	192	„	1 v. u.	„	a^m	„	a_m
„	184	„	14 v. o.	In der Determinante			

$$R_k = \left| (-1)^{\lambda-\mu} \binom{2\lambda-2\mu+1}{\lambda-\mu} \right| (\lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ k-1)$$

sind nur die 3 ersten Verticalreihen ausgeschrieben; diese genügen indes die übrigen leicht zu erkennen.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Elfter Teil. Erstes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1892.



I.

Neue Constructionen der Perspective.

Von

Ludwig Leib.

In Folgendem werden 2 Sätze angegeben, mittelst deren sich die Constructionen perspectivischer Bilder ausführen lassen.

I. Satz: „Wird ein Punkt im Raume von 2 Projectionscentren aus auf 1 Ebene projicirt, so liegen seine beiden Projectionen auf einer geraden Linie mit dem Punkte, in welchem die Verbindungslinie der zwei Curven die Ebene schneidet, dem sogenannten Kernpunkt" [1]).

Denn nennen wir die Ebene $\mathfrak{P}_1$, die Projectionen des Punktes P_1 von den Centren O_1 und O_2 aus P_{11} und P_{12} — der erste Index bezeichne die Projectionsebene, der zweite das Centrum —, und nennen wir ferner den Kernpunkt K_{12}, so ist durch die Strahlen $O_1P_0P_{11}$ und $O_2P_0P_{12}$ eine Ebene bestimmt, welcher auch die Gerade O_1O_2 angehört; der Schwerpunkt der Geraden O_1O_2 in $\mathfrak{P}_1$ liegt also in der Spurlinie der Ebene $O_1O_2P_1$ in $\mathfrak{P}_1$, d. h. K_{12} liegt auf $P_{11}P_{12}$.

Zweitens besteht bekanntlich folgender Satz: Wird ein Punkt P_1 von einem Centrum O_1 aus auf 2 Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ projicirt, und wird dann $\mathfrak{P}_2$ durch Drehung um seine Spurgerade mit $\mathfrak{P}_1$, s_3 in Ebene $\mathfrak{P}_1$ gelegt, so liegen die beiden Projectionen P_{11} und P_{21} auf einer geraden Linie mit dem Collineationscentrum [2]).

---

1) Hauck. neue Constr. der Persp. u. Photogrammetrie im 95. Jahrgang d. Journals f. reine u. angew. Mathematik.

2) Desargues.

Wir bezeichnen dasselbe mit C_{12}, sodass die Indices die zwei Ebenen angeben, und zwar der erste derselben das zugehörige Centrum.

Construiren wir noch die Projection des Punktes P_5 von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$, P_{22}, und bringen $O_1 O_2$ in K_{21} auch mit $\mathfrak{P}_2$ zum Schnitt, so folgt aus Satz I., dass auch K_{21}, P_{21} und P_{22} auf einer geraden Linie liegen. (Fig. 1.)

Fassen wir K_{21} auf als Projection des Punktes O_2 von O_1 auf $\mathfrak{P}_2$, und K_{12} als Projection desselben Punktes von demselben Centrum auf $\mathfrak{P}_1$, so folgt aus Satz II., dass C_{12}, K_{21} und K_{12} auf 1 Geraden liegen. Construiren wir noch aus O_2 für $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ das Collineationscentrum, C_{21}, und betrachten wir K_{21} als Projection des O_1 von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$, K_{12} als Proj. des O_1 von O_2 auf $\mathfrak{P}_1$, so folgt auf gleiche Weise, dass C_{21}, K_{21} und K_{12} auf einer Geraden liegen. Es besteht also die Beziehung:

III. Satz: „Die beiden Kernpunkte und die beiden Collineations-„centren für zwei gegebene Projectionsebenen und ihre zugehörigen „Centren liegen auf einer Geraden“.

Die Geraden $K_{12} P_{11} P_{12}$ und $K_{21} P_{21} P_{22}$ sind aufzufassen als die Spurlinien der Ebene $O_1 O_2 P_0$ in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Es folgt daraus die 4te Beziehung, dass $K_{12} P_{11} P_{12}$ und $K_{21} P_{21} P_{22}$ sich auf s_3 schneiden. Der Schnittpunkt heisse S_3.

Die angegebenen Beziehungen sind ersichtlich in (Fig. 1) die eine parallele Perspective des Systems vorstellt. In (Fig. 2) ist $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_1$ gedreht und es liegt dann auf 1 Geraden:

1) $K_{12} K_{21} C_{12} C_{21}$

2) $K_{12} P_{11} P_{12}$ 3) $K_{21} P_{21} P_{22}$

4) $C_{12} P_{11} P_{21}$ 5) $C_{21} P_{12} P_{22}$

Ausserdem liegt der Schnitt von $K_{12} P_{11}$ und $K_{21} P_{22}$ auf s.

Construction des persp. Grundrisses.

Obige Beziehungen lassen sich zur Construction des persp. Grundrisses verwerten, wenn wir durch das Centrum O_1 senkrecht zur gegebenen Projectionsebene $\mathfrak{P}_1$ eine Ebene $\mathfrak{P}_2$ derart legen, dass $\mathfrak{P}_2$ auch senkrecht zur Ebene $\mathfrak{E}$ des gegebenen geometrischen Grundrisses ist. Die Spur von $\mathfrak{E}$ sei a_1 in $\mathfrak{P}_1$, a_2 in $\mathfrak{P}_2$. P_0 sei ein Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$, die wir um a_2 in $\mathfrak{P}_2$ gedreht haben (Fig. 3.) Wir nehmen nun ein zu $\mathfrak{P}_2$ gehöriges Centrum O_2 an, und zwar im

Unendlichen in der Richtung der Linie a_1, so erhalten wir den Kernpunkt K_{21} in dem Punkt O_1 selbst, während K_{12} im Unendlichen in Richtung von a_1 liegt. Die Projection des P_0 von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$, P_{22}, erhalten wir (s. Fig. 3.) indem wir von P_0 auf a_2 ein Lot fällen. Ziehen wir nun $K_{21}P_{22}$, bringen diese Linie in S_3 mit s_3 zum Schnitt, und legen durch S_3 zu a_1 eine Parallele, so liegt auf derselben P_{11}, da diese Linie die Richtung zum Kernpunkt K_{12} anzeigt, und mithin die 4te oben abgeleitete Beziehung stattfindet. Wir haben also für P_{11} einen geom. Ort.

Einen zweiten finden wir folgendermassen:

Unter derselben Bezeichnung wie bei der vorangegangenen Construction nehmen wir O_2 im Unendlichen in Richtung von a_2 an, nicht, wie vorher, von a_1. K_{12} ist dann der Hauptpunkt, d, h. der Fusspunkt des von O_1 auf $\mathfrak{P}_2$ gefällten Lotes. P_{12} ist der Fusspunkt des von P_0 auf a_1 gefällten Lotes. Nach Satz (1) liegt auf der Linie $K_{12}P_{12}$ auch der Punkt P_{11}, und wir haben mithin einen zweiten Ort für die gesuchte Projection. In Fig. (4) ist die Construction ausgeführt, nachdem $\mathfrak{E}$ um a_1 in $\mathfrak{P}_1$ gedreht ist.

Denken wir eine Ebene $\mathfrak{P}_0$ durch P_0 senkrecht a_1 gelegt, so lässt sich auch Satz (2) anwenden, wenn wir $\mathfrak{P}_2$ mit O_1 um s_3 in $\mathfrak{P}_1$ drehen; das in $\mathfrak{P}_1$ gedrehte Centrum O_1 fällt dann mit dem Collineationscentrum C_{12} zusammen. Gleichzeitig muss auch P_0 gedreht werden um die Spurlinie der durch P_0 senkrecht zu a_1 gelegten Ebene, sodass P_0 die Lage P annimmt, $C_{12}P$ ist dann 1 Ort für P_{11} nach Satz (2). In Fig. (5) ist $\mathfrak{E}$ um a_1 in $\mathfrak{P}_1$ gedreht und P wird aus P_0 erhalten, indem durch P_0 1 Lot auf a_1 gefällt und dessen Länge auf a_1 abgetragen wird, oder einfacher, indem durch P_0 unter 45° zu a_1 eine Linie gezogen wird.

Satz (2) ergiebt noch einen andern Ort für P_{11}: Nehmen wir nämlich an, dass $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{E}$ die Ebenen wären, auf die P_0 von O_1 aus projicirt wird, und drehen $\mathfrak{E}$ mit P_0 um a_1 in $\mathfrak{P}_1$, und gleichzeitig O_1 um eine durch X parallel a_1 gelegte Linie in $\mathfrak{P}_1$, so nimmt C_{12} die Lage an, wie in Fig. (6) angegeben, und die Linie $C_{12}P_0$ ist ein Ort für P_{11}.

Bei der zuletzt angegebenen Construction muss der geometr. Grundriss auf demselben Blatt wie die auszuführende Zeichnung liegen, während bei den drei andern geometrischen Oertern P_{11} nur die Punktreihen auf a_1 oder a_2 erforderlich sind, die auf einem besondern Grundriss gefunden werden können. Von den sechs Combinationen aus den vier Oertern, — denn zur Bestimmung von P_{11} sind stets 2 der letzteren nötig — scheiden also 3 aus, und es bleiben

noch die 3 in Fig. (7), (8) und (9) dargestellten Constructionen. Da die Lösung Fig. (7 und 8) drei Hilfslinien erfordert, Fig. (9) deren aber nur 2 für die Projection jedes Punktes, so ist letztere vorzuziehen. Wir wenden sie an in der Aufgabe, ein regelmässiges Achteck in Perspective zu setzen (vgl. Fig. 10a und b).

Constr. des persp. Grundrisses aus den Linien desselben.

Wir projiciren die einzelnen Linien des geometrischen Grundrisses auf $\mathfrak{P}_1$. Sei g_0 eine Gerade der Grundrissebene $\mathfrak{E}$, welche a_1 in S_1, a_2 in S_2 schneide. Die Projection von O_1 aus, g_1, hat mit g_0 Punkt S_1 gemeinsam und um g_1 zu erhalten, haben wir nur noch einen zweiten Punkt von g_0 zu projiciren.

Wir wählen hierzu S_2, construiren g_1 also aus den 2 Spurpunkten. Die Projection des S_2 von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$ erhalten wir, wenn wir O_1 mit S_2 verbinden und diese Linie mit s_3 zum Schnitt bringen in A. AS_1 ist dann g_1.

Diese Construction erfordert, abgesehen von den notwendigen Verlängerungen der Grundrisslinien bis zum Schnitt mit a_1 und a_2, für jede Grade nur eine Constructionslinie, welche auch noch in der Nebenfigur des gegebenen Grundrisses ausgeführt werden kann. In Fig. (11a/b) ist diese Construction zur perspectivischen Darstellung eines Quadrates benutzt. In Fig. (11a) ist a_1 und a_2 ausgezeichnet und die Spurpunkte construirt; diese sind auf a_1 und a_2 der Fig. (11b) übertragen, welche letztere die in die Zeichenebene gedrehten Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ darstellt. Von dem Collineationscentum C_{12} aus wird die Punktreihe auf a_2 nach s_3 projicirt und entsprechende Punkte von s_1 und s_3 verbunden. Die Projection der Punktreihe a_2 nach s_3 kann auch in der Hilfsfigur vollzogen werden, wie die punktirten Linien andeuten.

Tritt der Fall ein, dass der auf s_3 liegende Punkt von g_1 ausserhalb der Zeichenebene fällt, so wird die gebräuchliche Construction mit Spur- und Fluchtpunkt anzuwenden sein. Dasselbe gilt für den Fall, dass die Punkte auf a_1 zu weit entfernt sind.

Constr. des persp. Bildes aus dem Grundriss.

Ist der perspectivische Grundriss construirt, so erhalten wir für die Punkte des Objectes selbst Oerter, wenn wir durch die entsprechenden Grundrisspunkte Verticale legen. Es ist noch ein zweiter Ort der Punkte zu bestimmen.

Im Folgendem ist die Aufgabe behandelt, ein durch Grundriss und Aufriss gegebenes Haus in Perspective zu setzen. Wir construiren nach einer der oben angegebenen Methoden den perspectivischen Grundriss aus dem geometrischen und errichten in seinen Punkten Lote. Mir bilden auf gleiche Art das perspect. Bild des Aufrisses von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$ und construiren aus diesem die perspectivischen Bilder der parallelen Strahlen, welche den geometrischen Aufriss erzeugt haben; hierzu genügt offenbar der Fluchtpunkt F des zur Aufrissebene senkrechten Parallelstrahlenbüschels. Um die Oonstruction zu vereinfachen, legen wir die Aufrissebene durch O_1, so dass die Perspective des Aufrisses in die Spurlinie b der Aufrissebene in $\mathfrak{P}_1$ fällt, und haben demnach folgende Construction:

Wir zeichnen zunächst den perspectivischen Grundriss und nehmen hierbei die Grundrissebene im Horizont an, sodass der Grundriss in die Linie a_1 fällt. In den so erhaltenen Punkten errichten wir auf a_1 Lote. Aus der Hilfsfigur übertragen wir nach der Hauptfigur die Linie b und projiciren von dem gleichfalls in die Figur eingetragenen Centrum O_1 die Aufrisspunkte auf b. Aus den 2 Hilfsfiguren wird der Fluchtpunkt F, sowie die zwei Punktreihen auf a_1 und b übertragen, und wir erhalten dann die Projection des Hauses als Schnitt entsprechender Strahlen des Strahlenbüschels Fb und des Parallelstrahlenbüschels auf a_1. Die 3 Figuren können auch in eine vereinigt werden, wenn Ebene $\mathfrak{E}$ um a_1 und Ebene $O_1 b$ um b in $\mathfrak{P}_1$ gedreht gedacht wird.

Axonometrische Construction.

Die angegebene Construction führt uns zur axonometrischen Behandlung unserer Aufgabe. Wir denken jeden Punkt des Objects bestimmt durch seine Coordinaten in einem rechtwinkligen, räumlichen Coordinatensystem, dessen Mittelpunkt A_0, dessen Axen x_0, y_0, z_0 seien, und projiciren das System von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$. Die Projectionen seien A, x, y, z. Ein Punkt P_0, der fm Coordinatensystem durch die Coordinatenendpunkte X_0, Y_0, Z_0 gegeben ist, ist es in der Projection durch die Projectionen X, Y, Z. Es sind zunächst die Axen zu projiciren, und dann die auf ihnen liegenden Punktreihen. Zur Vereinfachung der Construction legen wir die $z_0$axe in s_3, sodass y_0 une x_0 bei verticalem s_3 horizontal sind. Die Projectionen x und y werden nach der p 5 angegebenen Construction hergestellt aus Spur- und Fluchtpunkten. In Fig. (12a) ist die $x_0 y_0$ebene dargestellt mit der Projection des Punktes O_1 auf dieselbe. Parallele durch O_1 zu x_0 und y_0 ergeben die Fluchtpunkte F_x und F_y, welche in die Ausführungsfigur (12b) auf den Horizont

übertragen werden. AF_x und AF_y ergeben die x und $y$axe, s_3 ist $z$axe. Die Punktreihen der x und $y$axe erhalten wir aus denen der x_0 und $y_0$axe mittelst Satz (2). Wir drehen $\mathfrak{E}$ mit x_0 und y_0 um a_1 und O_1 um seinen Horizont in $\mathfrak{E}$ und erhalten dadurch C_{12}, von dem wir die Punktreihe der umgeklappten x_0 und y_0 auf x und y projiciren (vgl. Fig. 12b).

Aus 2 gegebenen Centralprojectionen eine dritte zu finden.

Ein Punkt P_0 sei von einem Centrum O_1 auf Ebene $\mathfrak{P}_1$ im Punkte P_{11} und von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$ in P_{22} projicirt — wir wählen die Indices wieder derart, dass der erste Index die Ebene, der zweite das Centrum angiebt —; es ist von einem Centrum O_3 auf eine Ebene $\mathfrak{P}_3$ die Projection P_{33} zu finden. Wir verfahren derart, dass wir zunächst für die Projectionen von O_3 auf $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, P_{13} und P_{23}, in jeder der Ebenen einen geom. Ort darstellen, und dann denselben nach $\mathfrak{P}_3$ von O_3 aus projiciren, wodurch wir zwei Orte für P_{33} erhalten und damit diesen Punkt selbst.

Wie vorher gezeigt, liegen $P_{11}P_{13}K_{13}$ auf einer Geraden; wir erhalten also einen Ort für P_{13}, wenn wir K_{13} construiren, und $P_{11}K_{13}$ ziehen; ebenso ergiebt $K_{23}P_{22}$ einen Ort für P_{23}.

Der Schnitt von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ heisse s_3, von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ s_2, von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ s_1, der Schnitt von s_2 und $P_{11}K_{13}$ sei S_2, von $P_{22}K_{23}$ mit s_1 sei S_1. Dann ist S_2 ein Punkt der nun zu construirenden Projection von $P_{11}K_{13}$ in $\mathfrak{P}_3$, ebenso S_1 ein Punkt der Projection von $P_{22}K_{23}$ auf P_3. Wir haben demnach nur noch von einem Punkt von $P_{11}K_{13}$ resp. $P_{22}K_{23}$ die Projection in $\mathfrak{P}_3$ zu bestimmen, und je nach der Wahl desselben erhalten wir verschiedene Constructionen.

I. Die einfachste Construction tritt ein, wenn wir K_{13} und K_{23} hierzu wählen; es ist die im 95. Band des Journ. f. r. u. angw. Math. angegebene in der Abhandl.: Hauck, neue Constr. der Persp. und Photogr. Die Projectionen von K_{13} und K_{23} auf $\mathfrak{P}_3$ sind die Kernpunkte K_{31} und K_{32} und werden gleichzeitig mit den ersten beiden Kernpunkten gefunden, wie folgende Constr. der Kernpunkte zeigt.

Fig. (13) stelle die Projection der Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ auf eine zu s_2 senkrechte Ebene dar. O_1 und O_3 seien die Orthogonalprojectionen der Centren O_1 und O_3, so sind $\mathfrak{K}_{13}$ und $\mathfrak{K}_{31}$ die Kernpunktprojectionen. Sind h_1 und h_3 die Höhen der Centren über der Zeichenebene, so erhalten wir das in letztere geklappte Trapez

$O_1O_3O_2O_3$, wenn wir in O_1 und O_3 auf O_1O_3 Lote von der Länge h_1 resp. h_3 errichten, und die Endpunkte O_1 und O_3 verbinden. Errichten wir dann in $\mathfrak{K}_{13}$ und $\mathfrak{K}_{31}$ Lote auf O_1O_3, die O_1O_3 in K_{13} und K_{31} schneiden, so sind $\mathfrak{K}_{13}K_{13}$ und $K_{31}\mathfrak{K}_{31}$ die Entfernungen der Kernpunkte von der Zeichenebene. Wir klappen nun $\mathfrak{K}_3$ in $\mathfrak{P}_1$ (Fig. 14), ziehen in $\mathfrak{P}_3$ senkrecht zu s_2 eine Linie, welche den Schnitt a der Zeichenebene der Fig. (13) vorstelle, und in den Entfernungen $\mathfrak{K}_{13}K_{13}$ und $\mathfrak{K}_{31}K_{31}$ von derselben Parallele. In der Entfernung der Kernpunkte von s_2, die sich aus Fig. (13) ergiebt, ziehen wir zu s_2 Parallele, welche die zuerst zu a gezogenen Parallelen in K_{13} und K_{31} treffen.

Aus der Eigenschaft, dass $C_{13}C_{31}K_{13}K_{31}$ auf einer Geraden liegen, ergiebt sich folgende Modification: in den Entfernungen h_1 und h_3 vom Schnitt a ziehe Parallele, Fig. (14), und trage auf denselben von s_2 aus die Punkte C_{13} und C_{31} auf, deren Entfernungen von s_2 sich aus Fig. (13) ergeben. Die Schnitte von $C_{13}C_{31}$ mit den Parallelen zu s_2 sind dann die Kernpunkte.

Sind umgekehrt die Kernpunkte bekannt, so erhält man die Collineationscentren aus dem Schnitte von $K_{31}K_{13}$ mit den Horizontlinien von O_1 und O_3. Man bedarf also nicht mehr eine Hilfsfigur für die Construction der Collineationscentren.

II. Wie schon erwähnt, können wir $P_{11}K_{13}$ resp. $P_{22}K_{23}$ auch dadurch auf P_3 projiciren, dass wir nicht den Kernpunkt, sondern irgend einen andern Punkt der Linie auf $\mathfrak{P}_3$ projiciren, und dies wird besonders dann angebracht sein, wenn K_{31} und K_{32} nicht mehr auf dem Zeichenblatte liegen.

Nehmen wir hierzu einen beliebigen Punkt R_{13} von $P_{11}K_{13}$ an, dessen Projection R_{31} von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$ zu construiren wäre, so wäre $R_{31}S_3$ die Projection von $K_{13}P_{11}$ in ps und mithin 1 Ort für P_{33}.

Um nun aus $R_{13}-R_{31}$ zu finden, benutzen wir Satz 2, indem wir C_{31} mit R_{13} verbinden. Einen zweiten Ort finden wir aus der Hilfsfigur (13), indem wir den daraus ersichtlichen Abstand des R_{31} von s_2 als Parallele r_{31} zu s_2 in die Ausführungsfigur eintragen. Der Schnitt dieser Parallelen mit $C_{31}R_{13}$ ist R_{31}. Um immer dieselbe Linie r_{31} zu erhalten, ziehen wir im Abstand des R_{13} von s_2 eine Parallele r_{13} zu s_2, und wählen von allen Linien $P_{11}K_{13}$ stets den auf r_{13} liegenden Punkt. Dasselbe wird für $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ durchgeführt.

Wir nehmen R_{13} im Unendlichen an; R_{31} liegt dann auf einer Parallelen r_{31} zu s_2 die (Fig. 13) gefunden wird, indem man durch

O_3 zu $\mathfrak{P}_1$ eine parallele Ebene legt. Es ergiebt sich also folgende Construction:

Nimm die orthogonale Projection der Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ und der Centren O_1 und O_3 auf eine zu s_2 senkrechte Ebene an, Fig. (13), und construire daraus, wie in Fig. (13/14) angegeben ist, den Kernpunkt K_{13} und noch C_{31}. Ist P_{11} die Projection des P_0 von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$, so zieh $P_{11}K_{13}$, und bringe diese Linie in S_2 mit s_2 zum Schnitt. Nachdem P_3 in Ebene $\mathfrak{P}_1$ gedreht ist, und r_{31} aus Fig. (13) in die Ausführungsfigur (14) übertragen ist, zieh durch C_{31} zu $K_{13}P_{11}$ eine Parallele, welche Linie $C_{31}R_{13}$ vorstellt, so ist nach Satz 2 ihr Schnitt mit r_{31} der Punkt R_{31}, und die Linie $R_{31}S_2$ ist ein Ort für P_{33}. Einen zweiten Ort erhalten wir, wenn wir Ebene $\mathfrak{P}_2$ um s_1 in $\mathfrak{P}_3$ drehen und auf gleiche Art verfahren.

Werden mehr Punkte auf diese Art nach $\mathfrak{P}_3$ projicirt, so entstehen bei K_{13} und C_{31} Strahlenbüschel mit parallelen Strahlen; sie schneiden also parallele Linien in ähnlichen Punktreihen; mithin sind die auf r_{31} und s_2 entstehenden Punktreihen ähnlich. Ziehen wir zu s_2 eine Parallele p_{31}, die von K_{13} denselben Abstand hat wie r_{31} von C_{31}, so ist die auf p_{31} durch Büschel K_{13} entsprechende Punktreihe congruent der auf r_{31} durch C_{31} entstehenden, und es ist demnach nicht nötig, das Büschel C_{31} zu zeichnen, sondern nur, die Punktreihe p_{31} nach r_{31} zu übertragen (Fig. 16). Die Projection jedes Punktes P_0 bedarf dann nur 4 Hilfslinien. Dies ist besonders dann von Vorteil, wenn die 2 gegebenen Projectionen mit den Strahlenbüscheln $P_{11}K_{13}$ und $P_{22}K_{23}$ auf 1 besondern Blatte gezeichnet sind. — Es ist klar, dass die 2 Punktreihen auf s_2 und r_{31} perspectivisch liegen, und dass der Mittelpunkt der Projection der Kernpunkt K_{31} ist (vgl. Fig. 11), sodass diese Constr. auf die erste zurückzuführen ist. Wir führen sie an einem Beispiele durch:

Aufg.: Ein Haus ist in Längsriss und Aufriss gegeben, die Perspective für eine Ebene $\mathfrak{P}_3$ und ein Centrum O_3 zu construiren (Fig. 16).

Wir klappen wieder die Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ der gegebenen Projectionen in $\mathfrak{P}_3$. construiren aus der Hilfsfigur (15) die Kernpunkte K_{13} und K_{23}, ferner C_{31}, C_{32} und r_{31}, r_{31} und finden daraus die Abstände der r_{31} und r_{32} von C_{31} resp. C_{32}, sodass wir nach Eintragung der Linien r_{31} und r_{32} in Fig. (16) auch die Parallelen p_{31} und p_{32} in dieser ziehen können. Indem wir K_{13} mit den Punkten des Aufrisses verbinden, erhalten wir die Punktreihen s_2 und p_{31}, ebenso aus K_{23} und dem Längsriss die Punktreihen s_1 und p_{32}. Die Punkt-

reihen p_{31} resp. p_{32} werden nach r_{31} resp. r_{32} übertragen, darauf zugehörige Punkte von s_2 und r_{31}, ebenso von s_1 und r_{32} verbunden. Die Schnittpunkte entsprechender Verbindungslinien geben dann die perspectivische Ansicht. Die Linien s_1 und s_2 bleiben vorläufig unberücksichtigt.

Wir können die Linien p_{31} und p_{32} auch auf der andern Seite von K_{13} resp. K_{23} annehmen, je nach dem vorhandenen Platze, müssen dann aber die Punktreihen bei der Uebertragung nach s_2 resp. s_1 umkehren, sodass nur der Punkt auf $C_{31}K_{13}$ seine Lage auf dieser Linie behält. Fällt s_1 und s_2 nicht in die Zeichenebene, so können wir diese Constr. mit der ersten vereinigen und das perspect. Bild aus K_{31} und r_{32} resp. K_{32} und r_{31} construiren.

III. 3te Construction. Wir legen durch O_3 eine Ebene parallel $\mathfrak{P}_3$, die $\mathfrak{P}_1$ in t_{13}, $\mathfrak{P}_2$ in t_{23} schneidet, und projiciren von $P_{11}K_{13}$ und $P_{22}K_{23}$ die auf t_{13} resp. t_{23} liegenden Punkte, die in $\mathfrak{P}_3$ ins Unendliche fallen. Wir erhalten dann folgende Construction zu der wieder Fig. (13 und 14) benutzt ist. Suche, wie vorher, die Kernpunkte K_{13} und K_{23} und ferner die Linien t_{13} und t_{23} und drehe $\mathfrak{P}_1$ um s_2 und $\mathfrak{P}_2$ um s_1 mit den Linien t_{13} und t_{23} in Ebene $\mathfrak{P}_3$. Bringe $P_{11}K_{13}$ in S_2 mit s_2 und in T_{13} mit t_{13} zum Schnitt und zieh $T_{13}C_{31}$ so liegt nach Satz 2 T_{31} auf dieser Linie, im Unendlichen. Eine Parallele hierzu durch S_2 ist also ein Ort für P_{33} Ein zweiter ergiebt sich aus $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$.

In Fig. (17) ist diese Construction an 1 Beispiel durchgeführt; es ist dort auf Grund- und Aufriss die perspect. Ansicht hergestellt, nachdem $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit t_{13} und t_{23} um s_2 resp. s_1 in Ebene $\mathfrak{P}_3$ gedreht sind. Die Punktreihe auf t_{23} fällt in einen Punkt zusammen, da K_{23} ein Punkt der Linie wird. Das Strahlenbüschel von C_{32} aus fällt mithin weg, und das von s_1 ausgehende Strahlenbüschel wird ein paralleles. Die 6 Constructionslinien eines Punktes fallen demnach in 5 zusammen. Im Fall der Frontansicht geht auch das Strahlenbüschel C_{13} in 1 Linie über, sodass auch das zweite Strahlenbüschel s_2 parallel wird und jeder Punkt durch 4 Constructionslinien gefunden wird. — Es ist klar, dass diese Construction identisch ist mit der p6 gegebenen Construction.

4te Construction. Wir projiciren von $P_{11}K_{13}$ den in s_3 liegenden Punkt nach P_3 und erhalten für diese Projection einen geom. Ort in der Proj. s der Linie s_3 auf $\mathfrak{P}_3$, einen zweiten mit

Hilfe von C_{31}. Wir erhalten dann folgende Construction: Klappe $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ wieder in $\mathfrak{P}_3$ und trag die Punkte $K_{13}K_{23}C_{31}C_{32}$, sowie die Linie s aus der Hilfsfigur (18) in die Ausführungsfigur (19) ein. Zieh S_3C_{31} und verbind den Schnitt dieser Linie mit s mit dem Punkte S_3, so ergiebt dies einen geometrischen Ort für P_{33}, der andere ergiebt sich wieder aus $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$.

In Fig. 15, 16 ist mit dieser Construction die Aufgabe gelöst, aus Aufriss und Längsriss ist die perspectivische Ansicht eines Hauses zu finden.

Die Construction ist folgendermassen vereinfacht: Verschieb eine der Ebenen $\mathfrak{P}_1$ oder $\mathfrak{P}_2$ solange parallel sich selbst, bis s_3 mit s in Bezug auf auf O_3 symmetrisch liegt. Dann werden die Punktreihen auf s_3 und s congruent, man hat also nicht nötig, das Strahlenbüschel C_{31} zu zeichnen, sondern überträgt mittelst eines Papierstreifens die Punktreihe von s_3 nach s und verfährt dann wie oben.

In Fig. 16 sind in die Strahlenbüschel K_{13} und K_{23} Parallele eingezeichnet, s_2' und s_1', auf denen die Punkte erzeugt werden. Jeder Punkt bedarf hierbei nur 4 Constructionslinien.

V. 5te Construction. Wir legen durch O_1 und O_2 eine Ebene parallel s_3, die $\mathfrak{P}_1$ in t_1, $\mathfrak{P}_2$ in t_2, $\mathfrak{P}_3$ in t_3 treffe, ziehen wieder wie vorher die Linien $P_{11}K_{13}$ und $P_{22}K_{23}$, fassen dieselben aber diesmal auf als Projectionen der Linie O_3P_0 von O_1 auf P_1 und von O_2 auf P_2. Von dem Schnittpunkt T_{11} von t_1 und $P_{11}K_{13}$ construiren wir die Projection T_{31} von O_1 auf $\mathfrak{P}_3$ und ebenso von dem Schnittpunkt T_{22} von t_2 mit $P_{22}K_{23}$ die Projection T_{32} von O_2 auf $\mathfrak{P}_3$, und zwar wieder mit Hilfe der Collineationscentren C_{13} und C_{23}, $T_{31}S_2$ und $T_{32}S_1$ sind dann die Projectionen der Linie P_0O_3 von O_1 und von O_2 auf $\mathfrak{P}_3$; wir können also $T_{31}S_2$ ansehen als Spur der Ebene $P_0O_1O_3$ in $\mathfrak{P}_3$ und also auch als Projection der Linie P_0O_1 von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$. Ebenso ist $T_{32}S_1$ die Projection der Linie P_0O_2 von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$. Beide Linien stellen also einen geom. Ort für P_{33} dar, und ihr Schnittpunkt ist P_{33} selbst. In Fig. 18 und 20 ist die Construction durchgeführt, wie bisher unter der Annahme, dass die dritte der Projectionsebenen der Spurgeraden der beiden andern parallel ist.

VI. Hieraus folgt eine Construction des perspectivischen Bildes durch Projection der geradlinigen Begrenzung des Objectes nicht der Ecken desselben (Fig. 18 und 21), denn statt der Linie O_3P_0 können wir eine beliebige Linie g_0 auf diese Art projiciren. Die gegebenen

Projectionen derselben von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$ und von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$ seien g_1 und g_2, deren Schnitte mit s_2 resp. s_1 seien S_2 und S_1. Wir construiren von dem auf t_1 liegenden Punkte T_{11} der Linie g_1 die Projection T_{31} von O_1 auf $\mathfrak{P}_3$ mit Hilfe von C_{13}, denn wir wissen, dass T_{31} auf t_3 liegt. Ebenso finden wir mit C_{23} die Projection T_{32} auf t_3. $T_{31}S_2$ und $T_{32}S_1$ sind dann die Projectionen der Linie g_0 von O_1 und O_2 auf $\mathfrak{P}_3$, ihr Schnitt S ist also der Spurpunkt von g_0 in $\mathfrak{P}_3$, also ein Punkt von g_3. Als zweiten Punkt wählen wir die Projection des in Ebene t_1t_2 liegenden Punktes G_0 von g_0. Die Projection desselben von O_1 auf $\mathfrak{P}_3$ ist T_{31}, von O_2 auf $\mathfrak{P}_3$ ist es T_{32}. Construiren wir also die Kernpunkte in $\mathfrak{P}_3$, K_{31} und K_{32}, und verbinden K_{31} mit T_{31}, K_{32} mit T_{32}, so ist nach Satz 1 der Schnitt dieser Linien der Punkt G, in welchem G_0 von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$ projicirt ist, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit S giebt die verlangte Projection g_3. Zur Projection einer Linie sind hiernach 6 Constructionslinien erforderlich.

7te Construction. Um aus 2 Projectionen eines Punktes eine dritte zu finden, benutzten wir bisher die Kernpunkte und die Collineationscentren; wir werden aber im Folgenden zeigen, dass wir die dritte Projection auch ohne Kernpunkte nur mit Hilfe der Collineationspunkte zeichnen können.

Aus der Construction des Collineationscentrums C_{13} folgt (Fig. 22a), dass die Linie O_1C_{13} auf s_2 senkrecht steht und den Winkel der 2 Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ halbirt. Jede durch C_{13} gehende Linie der Ebene $\mathfrak{P}_1$ kann daher angesehen werden als die Projection einer zu O_1C_{13} parallelen Linie mit dem Fluchtpunkt C_{13}. $P_{11}C_{13}$ ist daher zu betrachten als die Projection der durch P_0 parallel der Winkelhalbirenden gezogenen Geraden, dieselbe heisse a_0. Die durch a_0 und O_1 bestimmte Ebene schneide $\mathfrak{P}_1$ in a_1, $\mathfrak{P}_2$ in a_2, $\mathfrak{P}_3$ in a_3; die durch a_0 und O_2 gehende Ebene treffe $\mathfrak{P}_1$ in a_{12}, $\mathfrak{P}_2$ in a_{22}, $\mathfrak{P}_3$ in a_{32}, die durch a_0 und O_3 gehende $\mathfrak{P}_1$ in a_{13}, $\mathfrak{P}_2$ in a_{23}, $\mathfrak{P}_3$ in a_{33}. Da die drei Ebenen sämtlich durch a_0 gehen, so gehen ihre Spuren in einer der 3 Projectionsebenen durch den Spurpunkt von a_0 in dieser Ebene, es schneiden sich also u. A. a_{31}, a_{32}, a_{33} in einem Punkte. Ist also a_{31} und a_{32} construirt, so ist von a_{33} ein Punkt bekannt. Die Ebene $a_{11}a_{21}a_{31}$ enthält die durch O_1 zu a_0 gezogene Parallele, die $\mathfrak{P}_1$ in C_{13}, $\mathfrak{P}_3$ in C_{13}' treffe; Ebene $a_{12}a_{22}a_{32}$ enthält die durch O_2 zu a_0 gezogene Parallele, welche $\mathfrak{P}_2$ in C_{22}, $\mathfrak{P}_3$ in C_{23} treffe; Ebene $a_{13}a_{23}a_{33}$ endlich enthält die durch O_3 zu a_0 gelegte Parallele, deren Schnitt mit $\mathfrak{P}_3$ C_{31} sei. Es ist klar, dass dann die so gefundenen Punkte nichts anders als die Collineationscentren

sind, und dass überdies bei Drehung der Ebene $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{P}_3$ die Punkte C_{13} und C_{13}' zusammenfallen. Unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{P}_3$ der Spurgeraden s_3 parallel ist, ist in Fig. 22a das ganze System in orthogonaler Projection auf eine zu allen 3 Projectionsebenen senkrechte vierte Ebene dargestellt. Wird das Ebenensystem längs s_3 aufgeschnitten und $\mathfrak{P}_1$ wie $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_3$ gedreht, so können diese Collineatïonscentren aus Fig. 22a in die so entstehende Fig. 22b übertragen werden. $P_{11}C_{13}$ ist dann die Linie a_{11}, a_{31} geht durch C_{13}' und durch den Schnitt von a_{11} und s_3. Ebenso ist $P_{22}C_{22}$, die Linie a_{22}, und a_{32} ist Verbindungslinie von C_{21} mit dem Schnitte von a_{22} und s_1. Der so gefundene Schnittpunkt von a_{31} mit a_{32} ist ein Punkt von a_{33} und wir erhalten hieraus a_{33} selbst durch Verbinden mit Punkt C_{11}. a_{33} ist dann ein geometrischer Ort für P_{33}. Legen wir durch P_0 eine zweite Linie b_0, welche zur Winkelhalbirenden der Ebenen $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ parallel ist, und verfahren mit b_0 wie vorher mit a_0, indem wir auch durch b_0 3 Ebenen legen, so erhalten wir hieraus einen zweiten Ort für P_{33} und damit diesen Punkt selbst. Die angegebene Construction ist in Fig. 22b ausgeführt. Zur Projection jedes Punktes sind 8 Constructionslinien erforderlich; da C_{13} und C_{13}', ebenso C_{23} und C_{23}' zusammen fallen.

Beisp. Aus Grund- und Aufriss eine perspectivische Ansicht zu construiren (Fig. 23). $\mathfrak{P}_1$ sei Aufrissebene, $\mathfrak{P}_2$ Grundrissebene, $\mathfrak{P}_3$ sei die dritte Ebene und O_3 das zugehörige Centrum. In Fig. 23b ist $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_3$ gedreht. a_0 ist der mit a bezeichneten Linie parallel. Die Ebene durch O_1 und a_0 ist in unserm Falle horizontal, sodass das von P_{11} auf s_2 gefällte Lot die Linie a_{11} und seine Verlängerung a_{31} vorstellt. Die durch O_2 und a_0 gelegte Ebene steht auf $\mathfrak{P}_2$ senkrecht; a_{22} ist also die durch P_{22} zu a gezogene Parallele, das im Schnitt von s_1 mit a_{22} errichtete Lot auf s_1 ist die Spur a_{32}. Verbinden wir den Schnitt von a_{31} und a_{32} mit dem aus der Hilfsfigur gefundenen C_{31}, so ergiebt diese Linie einen Ort für P_{33}.

Wir nehmen jetzt durch P_0 eine Linie b an, die s_1 und den Winkel von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ halbirt, und legen die Ebenen O_1b_0 und O_2b_0. Die Richtung der Spurgeraden jeder hierzu parallelen Fbene in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ finden wir folgendermassen. Wir denken die Ebene dadurch entstanden. dass eine Linie, die senkrecht s_1 ist und den Winkel von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ halbirt, sich auf 1 Lot zur Ebene $\mathfrak{P}_1$ bewegt. Die Spur in $\mathfrak{P}_1$ erhalten wir, indem wir 1 Ebene $\mathfrak{E}$ in A senkrecht s_1 gelegt denken. AB sei deren Spur in $\mathfrak{P}_2$; AC ist dann die in $\mathfrak{P}_2$ um AB gelegte Spur von Ebene O_1b_0 in $\mathfrak{E}$; wir erhalten daraus die

Spur von $O_1 b_0$ in $\mathfrak{P}_1$, indem wir AD von A aus auf (s_3) übertragen und in dem so erhaltenen Punkte (D) ein Lot $(D)E$ gleich BC errichten, so ist AE die Richtung von b_{11}, und eine Parallele dazu durch P_{11} ist b_{11} selbst. Die Richtung von b_{31} erhalten wir folgendermassen:

In D errichten wir auf s_3 in $\mathfrak{P}_2$ ein Lot (vgl. Fig. 23 b) das s_1 in G trifft. In G wiederum in $\mathfrak{R}_3$ ein Lot auf s_1 von der Länge GH gleich BC, fällen dann in $\mathfrak{P}_2$ von D auf s_1 ein Lot DF, so ist HF die Richtung von b_{31}. b_{22} und b_{32} erhalten wir, wenn wir von P_{22} auf s_1 ein Lot fällen, das b_{22} ist, und in dessen Fusspunkt in $\mathfrak{P}_3$ auf s_1 ein Lot b_{32} errichten. Der Schnitt von b_{31} mit b_{32} wird mit c_{22} zerbunden, und dadurch ein zweiter Ort für P_{33} erhalten.

II.

Die Nullwerte höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen.

Von

Franz Rogel.

Bezeichnet $\mathfrak{f}(x)$ eine mit der Veränderlichen verschwindende Function, deren Differentialquotienten von $x = 0$ bis $x = \mathfrak{x}$ endlich und stetig bleiben, so wird auch der $n$te Differentialquotient einer beliebigen $m$ten Potenz dieser Function $\mathfrak{f}(x)$ — abkürzungsweise $\mathfrak{f}$ geschrieben, — zufolge der Formel

$$D^n \mathfrak{f}^m = n! \, \Sigma \frac{\binom{m}{i} i! \, \mathfrak{f}^{m-i}}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} \left(\frac{\mathfrak{f}'}{1!}\right)^\alpha \left(\frac{\mathfrak{f}''}{2!}\right)^\beta \cdots \left(\frac{\mathfrak{f}^{(n)}}{n!}\right)^\lambda$$

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n$$
$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = i$$

zwischen und an diesen Grenzen endlich und stetig bleiben.

Da i nicht grösser als n sein kann, so wird in dem Falle

$$n < m$$

i stets unter m liegen und $\mathfrak{f}^{m-n}$ ein gemeinschaftlicher Factor der Glieder obiger Summe.

Es folgt hieraus

$$D^n \mathfrak{f}^m{}_{x=0} = 0, \qquad n < m \tag{1}$$

Diese Eigenschaft bildet die Grundlage eines einfachen Verfahrens die **Nullwerte** der höheren Ableitungen solcher zusammengesetzter Functionen F, welche von $\mathfrak{f}(x)$ abhangen, direct, d. h. ohne vorherige Berechnung der Differentialquotienten zu bestimmen, wenn für F eine Potenz-Reihen-Entwicklung

$$F(y) = \sum_{g=0} A_g x^g \tag{2}$$

möglich und bekannt ist.

Wird nämlich y durch $\mathfrak{f}(x)$ ersetzt, so kommt

$$F(\mathfrak{f}(x)) = \sum_{g=0} A_g (\mathfrak{f})^g \quad \text{und}$$

$$D^n F(\mathfrak{f}) = \sum_{g=0} A_g D^n \mathfrak{f}^g \tag{3}$$

giltig jedoch nur für solche x, für welche die rechtsseitige Reihe convergirt, also für $x = 0$. Denn nach (1) verschwinden in diesem Falle alle Differentialquotienten vom $(n+1)$ten angefangen, auch kann wegen der vorausgesetzten Convergenz der Reihe in (2) keines der nachfolgenden Glieder unter der Form $0.\infty$ erscheinen; die Reihe in (3) hat daher einen endlichen Wert. Es gilt somit

$$D^n F(\mathfrak{f})_{x=0} = \sum_{g=1}^{g=n} A_g D^n (\mathfrak{f})^g{}_{x=0} \tag{4}$$

wo g eine ganze. positive Zal bezeichnet.

Eine weitere Anwendung des in (1) ausgesprochenen Satzes bilden **Ableitungen von Identitäten** (Vergl. d. Verfassers gleichnamigen Aufsatz, Archiv 2. R. S. 209 T. X. 1891.)

Eine **unabhängige** Darstellungsweise dieser **Nullwerte**, wie sie bei den Reihenentwicklungen von Mac Laurin, Lagrange und Bürmann gewünscht wird, ist nur denkbar, wenn sich sowol die Coefficienten A_g, als auch die Nullwerte der höheren Ableitungen der Potenzen der Function „$\mathfrak{f}(x)$" **independent** darstellen lassen.

Das letztere ist bei den wenigen nachfolgenden einfachen Functionen der Fall.

a) $D^n(\log \overline{1+x})^m = (-1)^{n-m}\, m!\, \overset{n}{\underset{n-m}{C}}$

wo $\overset{n}{\underset{n-m}{C}}$ den $\overline{n-m}$ten Facultäten-Coefficienten, gebildet aus den Elementen $1, 2, \ldots n-1$ vorstellt.

b) $D^n(\log \overline{1-x})^m_0 = (-1)^m m! \; C^{\,n}_{n-m}$

c) $D^n(\sin ax)_0^{2\mu} = (-1)^{\mu+\frac{n}{2}}\, 2^{-2\mu+1} a^n \sum_{r=1}^{r=\mu-1} (-1)^r \binom{2\mu}{r}(2\mu-2r)^n$

wenn n **gerade** ist, sonst $=0$

$$D^n(\sin ax)^{2\mu+1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{-2\mu} a^n \sum_{r=0}^{r=\mu} (-1)^r \binom{2\mu-1}{r}(2\mu-2r+1)^n$$

wenn n **ungerade** ist, sonst $=0$

d) Von Functionen $\varphi(x)$, welche für $x=0$ nicht verschwinden, können neue, für $x=0$ verschwindende $\mathfrak{f}(x)$ am einfachsten abgeleitet werden, wenn von ihnen — ausgedrückt in Reihenform — alle Glieder mit Exponenten $\leqq 0$ abgezogen, oder wenn sie mit einer entsprechend hohen Poten von x multiplicirt werden.

$$D^n\left(x\frac{1}{a-x}\right)^m_0 = D^n x^m (a-x)_0^{-m}$$

$$= m!\binom{n}{m} D^{n-m}\,\overline{a-x}_0^{\,-m} = n!\binom{n-1}{n-m} a^{-n}$$

$$D^n\left(x\,\overline{1-ax}^{\,-p}\right)^m = m!\; n!\binom{n}{m}\binom{mp+n-1}{n} a^n$$

p eine positive Zal
m eine ganze Zal

Auf diesen Fall lassen sich alle rationalen Brüche, deren Nenner sich in Wurzelfactoren zerlegen lassen, zurückführen.

e) $D^n(e^{ax}(e^{bx}-e^{cx}))_0^m = \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (am+b(m-k)+ck)^n$

Für $a=b=1$, $c=0$ ist

$$D^n(e^x-1)_0^m = \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = E^{m}_{n} \qquad (5)$$

Eine allgemeinere Function dieser Art ist:

$$y = e^{ax} \sum_{k=1}^{k=r} h_k e^{p_k x} \qquad \sum_{k=1}^{k=r} h_k = 0 \tag{6}$$

Ist $r > 2$, so lässt sich der Nullwert nicht mehr independent, sondern nur combinatorisch darstellen; es ist

$$D^n y_0^m = m! \sum \frac{h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_r^{\alpha_r}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_r!} \left(\sum_{k=1}^{k=r} (\alpha_k p_k + a_m) \right)^n$$

$$\sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k = m; \qquad \alpha_1, \; \alpha_2, \; \dots \; \alpha_r = 0, \; 1, \; 2, \; \dots \; m$$

α) bei geradem r und $h_k = (-1)^{k-1}$ ist die Bedingung in (6) erfüllt.

$$D^n e^{ax} \left(\sum_{k=1}^{k=r} (-1)^{k-1} e^{p_k x} \right)^m = m! \sum \frac{(-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_r!} \left(\sum_{k=1}^{k=r} (\alpha_k p_k + am) \right)^n$$

β) Derselben Bedingung genügt auch

$$h_k = (-1)^k \binom{r-1}{k-1}$$

$$D^n \left(e^{ax} \sum_{k=1}^{k=r} (-1)^k \binom{r-1}{k-1} e^{p_k x} \right)^m{}_0 =$$

$$m! \sum \frac{\binom{r-1}{0}^{\alpha_1} \left(- \binom{r-1}{1} \right)^{\alpha_2} \dots}{\alpha_1! \, \alpha_2! \dots} \left(\sum_{k=1}^{k=r} (\alpha_k p_k + am) \right)^n$$

f) $$D^{2\nu} (x \cos ax)^{2\mu}{}_0 = (-1)^{\nu-\mu} (2\mu)! \binom{2\nu}{2\mu} 2^{2\mu-2\nu+1} a^{2\nu-2\mu} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{r=\mu-1} \binom{2\mu}{r} (2\mu - 2r)^{2\nu-2\mu}$$

$$D^{2\nu+1} (x \cos x x)^{2\mu}{}_0 \equiv 0$$

$$D^{2\nu+1} (x \cos ax)^{2\mu+1}{}_0 =$$

$$(-1)^{\frac{\nu-\mu}{2}} 2^{2\mu-2\nu+1} (2\mu)! \binom{2\nu}{2\mu} a^{2\nu-2\mu} \sum_{r=0}^{r=\mu} \binom{2\mu+1}{r} (2\mu - 2r)^{2\nu-2\mu}$$

$$D^{2\nu} (x \cos ax)^{2\mu+1}{}_0 \equiv 0$$

g) $D^n \, (xe^{r \arcsin x})^m{}_0 = m! \binom{n}{m} D^{n-m} e^{rm \arcsin x}{}_0$

$$= \begin{cases} m! \binom{n}{m} \prod\limits_{k=0,2,4\ldots}^{k=n-m-2} (r^2m^2 + k^2) & n-m \text{ gerade} \\ m! \binom{n}{m} rm \prod\limits_{k=1,3,5\ldots}^{k=n-m-2} (r^2m^2 + k^2) & n-m \text{ ungerade} \end{cases}$$

h) Das Lagrange'sche System liefert die Entwicklung

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{m}{r} \binom{m-r-1}{r-1} x^r$$

woraus

$$D^n y_0 = (-1)^n m(n-1)! \binom{m-n-1}{m}$$

wofür sich durch unmittelbares Potenziren noch ein anderer Ausdruck ergiebt; es ist

$$y = 2^{-m} \sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r} (1-4x)^{\frac{r}{2}}$$

$$D^n y_0 = 2^{-m} \sum_{r=1}^{r=m} \binom{m}{r} D^n (1-4x)_0^{\frac{r}{2}}$$

$$= (-1)^n 2^{2n-m} n! \sum_{r=1}^{r=m} \binom{m}{r} \binom{\frac{r}{2}}{n}$$

aus dem Vergleich beider Ausdrücke entsteht die Identität

$$\sum_{r=1}^{r=m} \binom{m}{r} \binom{\frac{r}{2}}{n} = 2^{-2n+m} \frac{m}{n} \binom{m-n-1}{m} \qquad (7)$$

h') Ebenso wird gefunden

$$y = \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^m = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{m}{n} \binom{m+2n-1}{n-1} x^n$$

$$D^n y_0 = m(n-1)! \binom{m+2n-1}{n-1}$$

$$D^n (x^m y)_0 = D^n \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = m! \binom{n}{m} D^{n-m} y_0$$

$$= \frac{m}{n-m} \frac{n!}{} \binom{2n-m-1}{n-m-1} = \frac{m \,.\, n!}{n-m} \binom{2n-m-1}{n}$$

Nun ist wieder

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = 2^{-m} \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \binom{m}{r} (1-4x)^{\frac{r}{2}}$$

und

$$D^n \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = (-1)^n 2^{2n-m}\, n! \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r \binom{m}{r} \binom{\frac{r}{2}}{n}$$

woraus sich durch Vergleich die Identität ergiebt

$$\sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r \binom{m}{r} \binom{\frac{r}{2}}{n} = (-1)^n 2^{-2n+m} \frac{m}{n-m} \binom{2n-m-1}{n} \tag{8}$$

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen (7) und (8) entstehen noch die weiteren Identitäten

$$2^{2n-m+1} \sum_{r=2,4,6\,\ldots}^{r=2\left|\frac{m}{2}\right|} \binom{m}{r} \binom{\frac{r}{2}}{n} = (-1)^n \frac{m}{n-m} \binom{2n-m-1}{n} + \frac{m}{n} \binom{m-n-1}{n-1} \tag{9}$$

$$2^{2n-m+1} \sum_{r=1,3,5,\ldots}^{r=2\left|\frac{m-1}{2}\right|} \binom{m}{r} \binom{\frac{r}{2}}{n} = (-1)^{n-1} \frac{m}{n-m} \binom{2n-m-4}{n} + \frac{m}{n} \binom{m-n-1}{n-1} \tag{10}$$

i) Genügen die Coefficienten p, q der trinomischen Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

der Bedingung

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \tag{α}$$

so giebt es nur eine einzige reelle Wurzel, nämlich

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Das Lagrang'sche Theorem ermöglicht abermals die Entwicklung einer beliebigen Potenz y^m dieser Wurzel in eine convergente Reihe.

Wenn obige Gleichung geschrieben wird

$$y = -\frac{q}{p} - \frac{y^3}{p}$$

und

$$\frac{1}{p} = x, \quad -\frac{q}{p} = z = -qx$$

gesetzt wird, so ist

$$y = z + x(-y)^3$$

somit

$$y^m = z^m + m x z^{m+2} + m \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{x^r}{r!} D_z^{r-1} z^{3r+m-1}$$

$$= z^m + m \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r} \binom{3r+m-1}{r-1} x^r z^{2r+m}$$

$$= (-qx)^m + m \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r} \binom{3r+m-1}{r-1} (-x)^{3r+m} q^{2r+m}$$

Convergenzbedingung ist

$$|x| < \tfrac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{q}\right)^2} \qquad (\beta)$$

Es ist nun

$$y^m = \left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3x}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3x}\right)^3}}\right]^m =$$

$$= (-qx)^m + m \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{3r+m} \frac{q^{2v+m}}{r} \binom{3r+m-1}{r-1} x^{3r+m} \qquad (11)$$

Hat die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln, so ist die numerisch kleinste in Rechnung zu bringen.

Schliesslich ist

$$D_x{}^n y_0{}^m = \begin{cases} 0, \quad n < m, \text{ oder wenn } n-m \text{ kein Vielfaches der Zal 3 ist} \\ (-1)^m q.m!, \quad n = m \\ (-1)^{3r+m} \frac{m}{r} (3r+m)!\, q^{2r+m} \binom{3r+m-1}{r-1}, \quad \text{wenn } n-m \text{ durch 3 teilbar ist.} \end{cases}$$

Wird q als Veränderliche betrachtet, so ist

$$D_q{}^n y_0{}^m = \begin{cases} 0, \quad n < m, \text{ oder wenn } n-m \text{ ungerade ist} \\ (-1)^m x m!, \quad n = m \\ (-1)^{3r+m} \frac{m}{r} (2r+m)! \binom{3r+m-1}{r-1} x^{3r+m} \end{cases}$$

j) Die geforderten Eigenschaften werden auch Summen und Combinationen der genannten Functionen mit oder ohne Wiederolung zur zweiten Classe besitzen.

Combinationen zu einer höheren Classe werden im allgemeinen eine independente Darstellung der Nullwerte nicht zulassen.

Die Ableitungen der Potenzen von Functionen haben in der Analysis eine besondere Wichtigkeit erlangt

Die Reihen von Lagrange, Laplace und Bürmann stützen sich auf dieselben und R. Hoppe (Theorie d. ind. Darst. der höheren Differentialquotienten, Leipzig 1845) macht die independenten Darstellungen von ihnen abhängig.

In den nun folgenden Anwendungen sollen daher vor allem anderen die Potenzen complicirterer Functionen Berücksichtigung finden,

Hierbei bedeute

$$\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}$$

eine mit x zugleich verschwindende Function von der Beschaffenheit. dass die Nullwerte der höheren Ableitungen ihrer Potenzen sich independent darstellen lassen, also eine der unter a) bis j) genannten Abhängigkeiten.

1) $F(\mathfrak{f}(x)) = \operatorname{tg}^m x$ (m eine positive ganze Zal)

$$= \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{-\frac{m}{2}}$$

Mit Benutzung der Abkürzung

$$s_n^r = (D^n \sin^r x)_0$$

wofür in (c) die Formeln gegeben wurden, ist

$$\operatorname{tg}^m x = \sum_{k=0} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} \sin^{2k+m} x$$

und nach Satz (4)

$$D^n \operatorname{tg}^m x_0 = \sum_{k=0}^{k=\left|\frac{n-m}{2}\right|} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} s_n^{2k+m} \qquad (12)$$

wo unter $\left|\frac{n-m}{2}\right|$ das „grösste Ganze" $E\left(\frac{n-m}{2}\right)$ zu verstehen ist.

2) $\sec^m x$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} \sin^{2k} x$$

$$D^n \sec^m x_0 = \sum_{k=1}^{k=\left|\frac{n}{2}\right|} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} s_n^{2k} \qquad (13)$$

3) $1 - x\cot x =$

$$= \tfrac{1}{3} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\sin^{2k+2} x}{\binom{k+\frac{3}{2}}{k}}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$$

$$D^n(1 - x\cot x)_0 = \tfrac{1}{3} \sum_{k=0}^{k=\left|\frac{n-2}{2}\right|} (-1)^k \frac{s_n^{2k+2}}{\binom{k+\frac{3}{2}}{k}} \qquad (14)$$

Andererseits ist

$$1 - x\cot x = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k)!} B_k (2x)^{2k}, \qquad -\pi < x < +\pi$$

wo $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... die Bernoulli'schen Zalen bedeuten; ferner

$$D^{n}(1-x\cot x)_0 = \begin{cases} \dfrac{2^{n}Bn}{2}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Gleichstellung beider Ergebnisse ergiebt für diese Zalen den independenten Ausdruck

$$B_n = \frac{1}{2^{2n}.3} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \frac{s_{2n}^{2k+2}}{\binom{k+\frac{3}{2}}{k}} \qquad (15)$$

Durch Erheben der Reihe für $1-x\cot x$ zur $m$ten Potenz entsteht

$$:^{m} = \frac{m!}{3^{m}} \sum_{r=0} \frac{1}{\alpha_0!\binom{\frac{3}{2}}{0}^{\alpha_0}} \frac{1}{\alpha_1!\binom{1+\frac{3}{2}}{1}^{\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_2!\binom{2+\frac{3}{2}}{2}^{\alpha_2}} \cdots \sin^{2m+2r} x$$
$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots = r$$

wobei abkürzungsweise

$$\left[\binom{k+\frac{3}{2}}{k}\right]^{\alpha} = \binom{k+\frac{3}{2}}{k}^{\alpha}$$

gesetzt, und die Zal r aus m ungleichen oder gleichen Zalen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ der Zeigerreihe 0, 1, 2, 3. ... auf alle verschiedenen Arten zusammenzusetzen ist. Es ist dann

$$D^{n}(1-x\cot x)^{m}{}_0 = \frac{1}{3^{m}} m! \sum \frac{1}{\alpha_0!} \frac{1}{\alpha_1!\binom{1+\frac{3}{2}}{1}^{\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_2!\binom{2+\frac{3}{2}}{2}^{\alpha_2}} \cdots s_n^{2m+2r}$$

$$\underbrace{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \ldots}_{n} = r \qquad (16)$$

Ein vollkommen independenter Ausdruck wird später gegeben werden.

4.

$$\frac{x}{\cos x} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\sin^{2k+1} x}{\binom{k+\frac{1}{2}}{k}}, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

(Aus d. Sammlung mathemat. Formeln v. Laska)

$$= x + \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{E_h x^{2h+1}}{(2h)!}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Der Vergleich der Nullwerte der $\overline{2n+1}$ten Ableitungen beider Reihen ergiebt für die Euler'schen Zalen die independente Formel

$$E_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{s_{2n+1}{}^{2k+1}}{\binom{k+\frac{1}{2}}{k}} \qquad (17)$$

5.

Ein allgemeines Verfahren zur directen Bestimmung der Nullwerte höherer Ableitungen der Potenzen von Functionen fliesst aus der Betrachtung des vorigen Beispiels (3).

Lässt sich die vorgelegte Function $F(x)$ nach einer Function „$\mathfrak{f}(x)$" entwickeln

$$F(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} a_r \mathfrak{f}(x)^r$$

so gilt nach dem polynomischen Lehrsatze

$$[F(x)]^m = m! \sum_{r=0}^{r=\infty} \sum \frac{a_0{}^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \frac{a_1{}^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \frac{a_2{}^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \cdots \mathfrak{f}(x)^r$$

wo für die m, der Bedingung

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = r$$

genügenden Zalen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ alle ungleichen und gleichen positiven Werte zu setzen sind.

Die Nullwerte der höheren Ableitungen stellen sich hiernach als endliche Reihen dar.

Eine Entwicklung dieser Art ist bekanntlich die von Bürmann, in welcher

$$a_k = \frac{1}{k!} \left\{ D_x{}^{k-1} \left[\left(\frac{x-x_0}{\mathfrak{f}(x)} \right)^k F'(x) \right] \right\}_{x=x_0}$$

und x_0 ein Anfangswert ist, welcher mod $\mathfrak{f}(x)$ zum Verschwinden bringt. Nach den über „$\mathfrak{f}(x)$" gemachten Voraussetzungen ist hier

$$x_0 = 0$$

Damit sich diese Coefficienten unabhängig bestimmen, muss $\mathfrak{f}(x)$ so gewält werden, dass die Nullwerte der Ableitungen von $\left(\frac{x}{\mathfrak{f}(x)}\right)^k$ ebenfalls independent darstellbar sind; selbstverständlich muss dasselbe auch bei $D^r F(x)_0$ eintreffen. Die Auswal wird daher

eine sehr beschränkte sein. Dieses Verfahren kann auch mit Vorteil zur Ableitung von Identitäten verwendet werden.

Sei z. B.

$$F(x) = x^2$$

so ist

$$F'(x) = 2x$$

ferner

$$\mathfrak{f}(x) = \frac{x^2}{e^{hx}(e^x-1)}$$

daher

$$\frac{x}{\mathfrak{f}(x)} = \frac{e^{hx}}{x}(e^x-1)$$

und

$$a_k = \frac{2}{k!} D^{k-1} \left[\frac{e^{hkx}(e^x-1)^k}{x^{k-1}}\right]_0$$

Sei

$$e^{hkx}(e^x-1)^k = z$$

so ist $\frac{z}{x^{k-1}}$ von der Form $\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots$ u. die Nullwerte sämtlicher Ableitungen sind endlich, somit ist

$$D^{2k-2} z_0 = D^{2k-2} x^{k-1} \cdot \frac{z}{x^{k-1}}\Bigg|_{x=0} = \binom{2k-2}{k-1}(k-1)!\, D^{k-1}\frac{z}{x^{k-1}}\Bigg|_{x=0}$$

daher

$$D^{k-1}\frac{z}{x^{k-1}}\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{(k-1)!\binom{2k-2}{k-1}} D^{2k-2} z_0$$

folglich mit Benutzung der in e) bereits ermittelten $D^{2k-2} z_0$

$$a_k = \frac{2}{(2k-2)!\,k}\left[\overline{hk+k}^{\,2k-2} - \binom{k}{1}\overline{kh+k-1}^{\,2k-2} + - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\overline{kh+1}^{\,2k-2} + (-1)^k \binom{k}{k}\overline{kh}^{\,2k-2}\right]$$

mithin ist

$$x^2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \left(\frac{x^2}{e^{hx}(e^x-1)}\right)^k, \qquad (a_0 = 0)$$

Eine n malige Differentiation ergiebt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k D^n \frac{x^{2k}}{e^{hkx}(e^x-1)^k}\Bigg|_{x=0} = \begin{cases} 0, & n \gtrless 2 \\ 2, & n = 2 \end{cases}$$

$$= D^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k x^{k}}{e^{hkx}(e^x-1)^k}\Bigg|_{x=0}$$

Den Fall $n = 2$ ausgeschlossen, gilt auch

$$D^n \sum_{k-1}^{k=n} a_h \frac{x^{2k}}{e^{hkx}(e^x-1)^k} e^{hnx} . (e^x - 1)^n = 0$$

weil die Nullwerte der n ersten Ableitungen von

$$e^{hnx}(e^x - 1)^n \quad \text{sowie} \quad \frac{x^{2k}}{e^{hkx}(e^x-1)^k}$$

für $x = 0$ verschwinden.

Nach vollzogener Multiplication ist

$$D^n \sum_{k=1}^{k=n} a_k x^{2k} e^{h(n-k)x}(e^x - 1)^{n-k} = 0 \qquad \left(n \gtrless 2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} a_k (2k)! \binom{n}{2k} D^{n-2k} (e^{hx} . \overline{e^x - 1})^{n-k} \Big|_{x=0}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} a_k (2k)! \binom{n}{2k} \Big((\overline{h+1} . \overline{n-k})^{n-2k} - \binom{n-k}{1} (\overline{h+1} . \overline{n-k} - 1)^{n-2k}$$

$$+ \binom{n-k}{2} (\overline{h+1} . \overline{n-k})^{n-2k} - + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-k} \binom{n-k}{2} (\overline{n-k}\ h+2)^{n-2k} + (-1)^{n-k+1} \times$$

$$\times \binom{n-k}{1} (\overline{n-k} . h+1)^{n-2k}$$

$$+ (-1)^{n-k} \binom{n-k}{0} (\overline{n-k} . h)^{n-2k} \Big) = 0$$

Sei

$$A_r^{m,p} = r^p - \binom{m}{1} \overline{r-1}^p + \binom{m}{2} \overline{r-2}^p - + \ldots \tag{18'}$$

$$\ldots + (-1)^{m-1} \binom{m}{1} \overline{r-m+1}^p + (-1)^m \binom{m}{0} \overline{r-m}^p$$

so ist die unter dem Summenzeichen stehende Summe

$$= \underset{(h+1)(n-k)}{\overset{n-k,\ n-2k}{A}}$$

und

$$a_k = \frac{2}{(2k-2)!\, k} \underset{(h+1)k}{\overset{k,\ 2k-2}{A}}$$

Obige Identität schreibt sich dann mit Auslassung des gemeinsamen Factors 4

$$\sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)\binom{n}{2k} \overset{k,\,2k-2}{\underset{(h+1)k}{A}} \overset{n-k,\,n-2k}{\underset{(h+1)(n-k)}{A}} = 0 \tag{18}$$

Für $h = 0$ ist

$$\sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)\binom{n}{2k}\left(k^{2k+2} - \binom{k}{1}\overline{k-1}^{\,2k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{1} 1^{2k-1}\right)\times$$
$$\times\left(\overline{n-k}^{\,n-2k} - \binom{n-k}{1}\overline{n-k-1}^{\,n-2k} + \ldots + (-1)^{n-k+1}\binom{n-k}{1} 1^{n-2k}\right) \tag{19}$$

6.

$$z = \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$$
$$= \frac{ix}{e^{ix}-1} + \frac{ix}{2}: \qquad D_x^n z^m = i^n D_{xi}^n z^m$$

Aus der Theorie der Facultäten-Coefficienten $\overset{h}{\underset{k}{C}}$ ist bekannt, dass

$$D^k\left(\frac{v}{e^v-1}\right)^h_0 = \frac{(-1)^k \overset{h}{\underset{k}{C}}}{\binom{h-1}{k}}$$

folglich

$$D_x^n z_0^m = i^n \sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r} D_{xi}^n \left\{\left(\frac{xi}{e^{xi}-1}\right)^r\left(\frac{xi}{2}\right)^{m-r}\right\}_0$$
$$= i^n \sum_{r=0}^{r=m} 2^{-m+r}\binom{m}{r}\binom{n}{m-r}(n-r)!\, D^{n-m+r}\left(\frac{xi}{e^{xi}-1}\right)^r_0$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}-m} n!\,(n-m-1)!\,2^{-m}\sum_{r=0}^{r=m}(-2)^r\binom{m}{r} \overset{r}{\underset{n-m+r}{C}} \quad n \text{ gerade} \tag{20}$$

7.

Durch unmittelbares Potentiren von

$$1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \sum_{r=1} \frac{B_r}{(2r)!}x^{2r} \qquad -2\pi < x < +2\pi \tag{21}$$

entsteht ein Resultat von der Form

$$\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^m = x^{2m} \sum_{p=0,1,2\ldots} \overset{m}{\underset{2p}{\mathfrak{B}}}\, x^{2p}$$

und

$$D^n\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^m_0 = \begin{cases} n!\ \overset{m}{\underset{n-2m}{\mathfrak{B}}} & n \text{ gerade} \\ 0, \quad n<2m & \text{oder ungerade} \end{cases}$$

Hierin bedeuten $\overset{m}{\underset{2p}{\mathfrak{B}}}$ combinatorische Aggregate bezüglich der Bernoulli'schen Zalen B_r homogen vom Grade m.

Für die $\overset{2}{\underset{p}{\mathfrak{B}}}$ vom Grade zwei hat Euler auf sehr mühsamem Wege einfache Beziehungen gefunden (Inst. Calc. diff. P. II. cap. 5)

Klügel giebt in seinem Wörterbuche zwei Methoden an, welche dieselben sehr rasch finden lehrt. Sie stützen sich darauf, dass

a) der Differentialquotient y' von $y = \cot x$ durch y, und
b) die Cotangente eines Bogens durch diejenige des halben ausgedrückt werden kann.

Es ist

$$y' = -1 - y^2 \quad \text{und}$$

$$\cot x = \frac{\cot^2\frac{x}{2} - 1}{2\cot\frac{x}{2}}$$

In beiden Fällen entstehen nach Einsetzung der gleichwertigen Reihen Gleichungen, welche nach dem Satze der „unbestimmten Coefficienten" die Euler'schen Formeln liefern.

8.

Beziehungen zwischen den Coefficienten $\overset{m}{\underset{p}{\mathfrak{B}}}$.

Das genannte Formel-System lässt sich sehr erweitern.

Der Ausgangspunkt dieser Entwicklung ist die Function

$$y = \tfrac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$$

Durch wiederholtes Differentiiren und Einsetzung niedrigerer Ableitungen durch bereits gefundene Ausdrücke kann irgend eine Potenz y^m linear durch die Differentialquotienten, deren Index $< m$ ist, ausgedrückt werden.

Es ist

$$y = \tfrac{1}{2}\cot\frac{x}{2},\quad y' = -\tfrac{1}{4} - y^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 = -\tfrac{1}{4} - y'; \qquad \text{ferner}$$

$$2yy' = -y'', \quad \text{d. h.} \quad -2y(\tfrac{1}{4} - y^2) = -y'' \quad \text{oder}$$

$$y^3 = -\tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}y''$$

ebenso findet sich

$$y^4 = \frac{1}{4^2} + \frac{y'}{3} - \frac{y'''}{6}$$

$$y^5 = \frac{1}{4^2}y - \frac{5}{24}y'' + \frac{y^{IV}}{24}$$

. . . .

hieraus kann auf das allgemeine Bildungsgesetz

$$y^{2n} = \overset{2n}{\underset{-}{a}} + \overset{2n}{\underset{1}{a}}\, y' + \overset{2n}{\underset{3}{a}}\, y''' \ldots + \overset{2n}{\underset{2n-1}{a}}\, y^{(2n-1)} \tag{23}$$

$$y^{2n+1} = \overset{2n+1}{\underset{0}{a}}\, y + \overset{2n+1}{\underset{2}{a}}\, y'' \ldots + \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}}\, y^{(2n)} \tag{24}$$

geschlossen werden. Dasselbe lässt sich mittelst der Bemerkung verificiren, dass eine **g e r a d e** Potenz der Reihe für y nur **g e r a d e** positive Potenzen von x, und eine **u n g e r a d e** Potenz dieser Reihe nur **u n g e r a d e** Potenzen von x enthält; dass ferner die **g e r a d e n** Ableitungen derselben Reihe nur **u n g e r a d e**, und die **u n g e r a d e n** Ableitungen nur gerade Potenzen von x aufweisen.

Mit Ausnahme von $\overset{2n}{\underset{-}{a}}$ ergeben sich alle Coefficienten mit Hilfe des Satzes der „unbestimmten Coefficienten".

Es ist

$$y^{2n} = x^{-2n}\left(1 - 1 + \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$= x^{-2n} - \binom{2n}{1}\overset{1}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}\, x^{-2n+2} + \left(-\binom{2n}{1}\overset{1}{\underset{2}{\mathfrak{B}}} + \binom{2n}{2}\overset{2}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}\right) x^{-2n+4} + \ldots$$

$$\dots + \left(- \binom{2n}{1} \overset{1}{\underset{2n-2r-2}{\mathfrak{B}}} + \binom{2n}{2} \overset{2}{\underset{2n-2r-4}{\mathfrak{B}}} - \right.$$

$$\left. - \binom{2n}{3} \overset{3}{\underset{2n-2r-6}{\mathfrak{B}}} \dots + (-1)^{n-r} \binom{2n}{n-r} \overset{n-r}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} \right) x^{-2r} + \dots$$

$$\dots + \left(- \binom{2n}{1} \overset{1}{\underset{2a-4}{\mathfrak{B}}} + \binom{2n}{2} \overset{2}{\underset{2n-6}{\mathfrak{B}}} - + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \overset{n-1}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} \right) x^{-2} + \left(- \binom{2n}{1} \overset{1}{\underset{2n-2}{\mathfrak{B}}} \right.$$

$$\left. + \binom{2n}{2} \overset{2}{\underset{2n-4}{\mathfrak{B}}} - \dots + (-1)^{n} \binom{2n}{n} \overset{n}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} \right) + \dots$$

$$= \overset{2n}{\underline{a}} - 1!\, \overset{2n}{\underset{1}{a}} x^{-2} - 3!\, \overset{2n}{\underset{3}{a}} x^{-4} - \dots - (2r-1)!\, \overset{2n}{\underset{2r-1}{a}} x^{-2r} - \dots$$

$$\dots - (2n-1)!\, \overset{2n}{\underset{2n-1}{a}} x^{-2n} + \dots$$

hieraus folgt

$$\overset{2n}{\underset{2r-1}{a}} = \frac{1}{(2r-1)!} \left(\binom{2n}{1} \overset{1}{\underset{2n-2r-2}{\mathfrak{B}}} - \binom{2n}{2} \overset{2}{\underset{2n-2r-4}{\mathfrak{B}}} \right.$$

$$\left. + \binom{3n}{3} \overset{3}{\underset{2n-2r-6}{\mathfrak{B}}} \dots + (-1)^{n-r-1} \binom{2n}{n-r} \overset{n-r}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} \right) \qquad r < n \qquad (25)$$

speciell

$$\overset{2n}{\underset{2n-1}{a}} = - \frac{1}{(2n-1)!}$$

ferner

$$\overset{2n+1}{\underset{2r}{a}} = - \frac{1}{(2r)!} \left(\binom{2n+1}{1} \overset{1}{\underset{2n-2r-2}{\mathfrak{B}}} - \binom{2n+1}{2} \overset{2}{\underset{2n-2r-4}{\mathfrak{B}}} \right.$$

$$\left. + \binom{2n+1}{3} \overset{3}{\underset{2n-2-6}{\mathfrak{B}}} - \dots + (-1)^{n-r-1} \binom{2n+1}{n-r} \overset{n-r}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} \right)$$

$$r < n \qquad (26)$$

$$\overset{2n+1}{\underset{2n}{a}} = + \frac{1}{(2n)!}$$

Es erübrigt noch den Coefficienten $\overset{2n}{\underline{p}}$ zu bestimmen.

Die Differentiation der Gleichung (24) ergiebt

$$(2n+1)y^{2n}.y' = \overset{2n}{\underset{0}{a}}\, y' + \ldots$$

der weil

$$y' = -\tfrac{1}{4} - y^2$$

ist auch

$$-\frac{2n+1}{4}\, y^{2n} - (2n+1)y^{2n+2} = \overset{2n}{\underset{0}{a}}\, y' + \ldots$$

nn ist

$$y^{2n} = \overset{2n}{\underline{a}} + \overset{2n}{\underset{1}{a}}\, y' + \ldots$$

dies in die vorhergehende Gleichung gesetzt giebt

$$y^{2n+2} = -\frac{\overset{2n}{\underline{a}}}{4} + \ldots$$

nach (23), wenn $2n+2$ statt $2n$ gesetzt wird, aber auch

$$= \overset{2n+2}{\underline{a}}$$

somit

$$\overset{2n+2}{\underline{a}} = -\tfrac{1}{4}\, \overset{2n}{\underline{a}} \quad \text{da} \quad \overset{2}{\underline{a}} = -\tfrac{1}{4}$$

ist, so folgt

$$\overset{2n}{\underline{a}} = (-1)^n \frac{1}{4^n} \tag{27}$$

Wird jetzt die Gleichung (23) mit x^{2n}, und (24) mit x^{2n+1} multiplicirt, beide sodann $2k$mal differentiirt und schliesslich $x = 0$ genommen, so kommt

$$D^{2k}(xy)^{2n}{}_0 = \overset{2n}{\underline{a}}\, D^{2k}x^{2n}{}_0 + \sum_{p=1}^{p=n} \overset{2n}{\underset{2p-1}{a}}\, D^{2k}(x^{2n-2p}.x^{2p}y^{(2n-1)})_0$$

$$= \overset{2n}{\underline{a}}\, D^{2k}x^{2n}{}_0 + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{2k}{2n-2p}(2n-2p)!\, \overset{2n}{\underset{2p-1}{a}}\, D^{2k-2n+2p}(x^{2p}y^{(2p-1)})_0$$

Das erste Glied verschwindet, wenn $2k \lessgtr 2n$ ist; für $2k = 2n$ ist

$$\overset{2n}{\underline{a}}\, D^{2k}x^{2n}{}_0 = (2n)!\, \overset{2n}{\underline{a}} = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n}$$

Aus (21) folgt weiter

$$x^{2p} y^{(2p-1)} = -(2p-1)! - \sum_{h=p} \frac{B_h x^{2h}}{2h(2h-2p)!}$$

ferner

$$D^{2k-2n+2p}\left(x^{2p} y^{(2p-1)}\right)_0 = -\frac{(2k-2n+2p-1)!}{(2k-2n)!} B_{k-n+p}$$

somit nach leichter Reduction

$$D^{2k}(xy)^{2n}_0 = \underset{-}{\overset{2n}{a}}\, D^{2k} x^{2n}_0 - \frac{(2k)!}{(2k-2n)!} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\overset{2n}{\underset{2p-1}{a}}}{2k-2n+2p} B_{k+p-n} \tag{28}$$

Andererseits ist

$$D^{2k}(xy)^{2n}_0 = D^{2k}\left[1-\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\right]^{2n},$$

$$= D^{2k} \sum_{h=0}^{h=2n} (-1)^h \binom{2n}{h} \left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^h_0$$

und mit Rücksicht auf (22)

$$= \sum_{h=1}^{h=2n} (-1)^h \binom{2n}{h} D^{2k}\left[x^{2h} \sum_{p=0,1.2,\ldots} \overset{h}{\underset{2p}{\mathfrak{B}}}\, x^{2p}\right]_0$$

$$= \sum_{h=1}^{h=2n} (-1)^h \binom{2n}{h} \binom{2k}{2h} (2h)!\, D^{2k-2h}\left(\sum_{p=0} \overset{h}{\underset{2p}{\mathfrak{B}}}\, x^{2p}\right)_0$$

$$= (2k)! \sum_{h=1}^{h=2n} (-1)^h \binom{2n}{h} \overset{h}{\underset{2k-2h}{\mathfrak{B}}} \tag{29}$$

Die den ungeraden Potenzen y^{2n+1} entsprechenden Ergebnisse gehen aus den eben abgeleiteten hervor, wenn $2n+1$ statt $2n$, in (27) als unterer Zeiger von a $2p$ statt $2p-1$, dann als untere Grenze $p=0$ genommen und endlich das Glied mit $\underset{-}{\overset{2n}{a}}$ unterdrückt wird.

Die für $k < 2n$ mit negativem unteren Zeiger behafteten $\overset{h}{\underset{2k-2h}{\mathfrak{B}}}$ verschwinden. In diesem Falle brauchen sich die rechtsseitigen Summen nur auf solche h zu erstrecken, für welche $2k-2h$ nicht negativ und $\binom{2n}{h}$ bezhw. $\binom{2n+1}{h}$ von null verschieden ist.

Das Gesamt-Ergebniss lässt sich nun wie folgt aussprechen.

„Zwischen den Coefficienten $\mathfrak{B}^m$ der Entwicklungen von

$$\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^m,\quad m=1,\,2,\,3\,\ldots\,2n,\quad \text{bzhw.}\quad 2n+1$$

bestehen folgende Beziehungen“

a) $2k > 2n$

$$\sum_{h=1}^{i\leq k \text{ u.} \leq 2n} (-1)^{h+1}\binom{2n}{h}\overset{h}{\mathfrak{B}}_{2k-2h} =$$

$$\frac{1}{(2k-2n)!}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\overset{2n}{a}_{2p-1}}{2k-2n+2p}B_{k+p-n}$$

$$\overset{2n}{a}_{2p-1} = \frac{1}{(2p-1)!}\sum_{r=1}^{r=n-p}(-1)^{r-1}\binom{2n}{r}\overset{r}{\mathfrak{B}}_{2n-2p-2r}$$

$$p<n,\quad \overset{2n}{a}_{2n-1} = -\frac{1}{(2n-1)!} \tag{30}$$

b) $2k = 2n$

$$\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^{h+1}\binom{2n}{h}\overset{h}{\mathfrak{B}}_{2n-2h} = (-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}+\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\overset{2n}{a}_{2p-1}}{2p}B_p \tag{31}$$

c) $2k > 2n+1$

$$\sum_{h=1}^{i\leq k \text{ u.} \leq 2n+1}(-1)^{h+1}\binom{2n+1}{h}\overset{h}{\mathfrak{B}}_{2k-2h} =$$

$$=\frac{1}{(2k-2n-1)!}\sum_{p=0}^{p=n}\frac{\overset{2n+1}{a}_{2p}}{2k-2n+2p}B_{k-n+p}$$

$$\overset{2n+1}{a}_{2p} = \frac{1}{(2p)!}\sum_{r=1}^{r=n-p}(-1)^r\binom{2n+1}{r}\overset{r}{\mathfrak{B}}_{2n-2p-2r}$$

$$p<n;\quad \overset{2n+1}{a}_{2n} = +\frac{1}{(2n)!} \tag{32}$$

Die obere Grenze der rechtsseitigen Summen bildet die grösste Zal, welche gleichzeitig $\leqq k$ und $\leqq 2n$ bzhw. $2n+1$ ist.

Diese allgemeinen Formeln umfassen eine zweifach unendliche Anzal specieller Formeln.

Jedem m entspricht ein System von Formeln, die aus obigen durch die Einsetzungen

$$k = \left|\frac{n+1}{2}\right|, \quad \left|\frac{n+1}{2}\right|+1, \quad \left|\frac{n+1}{2}\right|+2, \ldots$$

entstehen.

Im Folgenden werden die ersten vier Systeme entwickelt.

$m = 1$

$m = 2n+1 = 1$, $n = 0$. $k = 2, 4, 6, \ldots$

$$\overset{1}{\underset{2k-2}{\mathfrak{B}}} = \frac{1}{(2k)!} B_k \tag{33}$$

$m = 2$

$m = 2n = 2$, $n = 1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\overset{2}{\underset{1}{a}} = -1, \quad \overset{1}{\underset{2k-2}{\mathfrak{B}}} = \frac{B_k}{(2k)!} \quad \ldots$$

Für $k = 1$ ist $2k = 2n$, daher tritt die Formel (31) in Wirksamkeit; das Resultat ist $B_1 = \frac{1}{6}$.

Die Formel (30) liefert

$$2\overset{1}{\underset{2k-2}{\mathfrak{B}}} - \overset{2}{\underset{2k-4}{\mathfrak{B}}} = -\frac{B_k}{2k(2k-2)!}$$

woraus

$$\overset{2}{\underset{2k-4}{\mathfrak{B}}} = \frac{2k+1}{(2k)!} B_k \tag{34}$$

In dieser Relation sind sämtliche Euler'sche Formeln die Coefficienten $\mathfrak{B}^2$ betreffend enthalten. Von der Abkürzung

$$\frac{B_k}{(2k)!} = \mathfrak{b}_k$$

Gebrauch machend, lauten dieselben

$$\frac{1}{2!\,2} = 3\mathfrak{b}_1 \qquad 2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4 + 2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 = 11\mathfrak{b}_5$$

$$\mathfrak{b}_1^2 = 5\mathfrak{b}_2 \qquad 2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_5 + 2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4 + \mathfrak{b}_3^2 = 13\mathfrak{b}_6$$

$$2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = 7\mathfrak{b}_3 \qquad 2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_6 + 2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_5 + 2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 = 15\mathfrak{b}_7$$

$$2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_2^2 = 9\mathfrak{b}_4 \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\underset{2k-4}{\overset{2}{\mathfrak{B}}} = 2!\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{b}_g^{\alpha}\,\mathfrak{b}_h^{\beta}}{\alpha!\,\beta!} = (2k+1)\mathfrak{b}_k$$

$$\alpha + \beta = 2 \qquad \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2$$

$$\alpha g + \beta h = k \qquad g,\ h = 1,\ 2, \ldots k-1$$

$m = 3$

$\mathfrak{n} = 2n+1 = 3$, $n = 1$, $k = 2, 3, \ldots$ Nach Formel c) ist

$$\underset{1 \leqq k \text{ u.} \leqq 3}{\Sigma}(-1)^{h+1}\binom{3}{h}\underset{2k-2h}{\overset{h}{\mathfrak{B}}} = \frac{1}{(2k-3)!}\sum_{p=0}^{p=1}\frac{\overset{3}{\underset{2p}{a}}}{2k+2p-2}B_{k+p-1}$$

$$\overset{3}{\underset{2}{a}} = \tfrac{1}{2},\quad \overset{3}{\underset{0}{a}} = -\binom{3}{1}\overset{1}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} = -\frac{3}{2!}B_1 = -\tfrac{1}{4}$$

Wenn die aus allen $k < m$ hervorgehenden Beziehungen als belanglos unbeachtet bleiben, so ist

$$\binom{3}{1}\underset{2k-2}{\overset{1}{\mathfrak{B}}} - \binom{3}{2}\underset{2k-4}{\overset{2}{\mathfrak{B}}} + \binom{3}{3}\underset{2k-6}{\overset{3}{\mathfrak{B}}} = \frac{1}{(2k-3)!}\left(\frac{\overset{3}{\underset{0}{a}}}{2k-2}B_{k-1} + \frac{\overset{3}{\underset{2}{a}}}{2k}B_k\right)$$

Hierin ist laut (33) und (34)

$$\underset{2k-2}{\overset{1}{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{b}_k,\quad \underset{2k-4}{\overset{2}{\mathfrak{B}}} = (2k+1)\mathfrak{b}_p$$

somit

$$\underset{2k-6}{\overset{3}{\mathfrak{B}}} = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_{k-1} + (2k+1)(k+1)\mathfrak{b}_k \tag{25}$$

$$k=3,\quad \underset{0}{\overset{3}{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{b}_1^3 = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_2 + 4.7\mathfrak{b}_3$$

$$k=4,\quad \overset{3}{\underset{2}{\mathfrak{B}}}=3\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_2=-\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_3+5.9\mathfrak{b}_4$$

$$k=5,\quad \overset{3}{\underset{4}{\mathfrak{B}}}=3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2{}^2+3\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_3=-\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_4+6.11\mathfrak{b}_5$$

$$k=6,\quad \overset{3}{\underset{6}{\mathfrak{B}}}=3\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_4+6\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3=-\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_5+7.13.\mathfrak{b}_6$$

$$k=7,\quad \overset{3}{\underset{8}{\mathfrak{B}}}=3\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_5+3\mathfrak{b}_2{}^2\mathfrak{b}_3+3\mathfrak{b}_3{}^2\mathfrak{b}_1+6\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4$$
$$=-\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_6+8.15.\mathfrak{b}_7$$

. . . .

Infolge des polynomischen Lehrsatzes kann die Formel (35) geschrieben werden

$$\Sigma\,\frac{\mathfrak{b}_f{}^{\alpha}}{\alpha!}\,\frac{\mathfrak{b}_g{}^{\beta}}{\beta!}\,\frac{\mathfrak{b}_h{}^{\gamma}}{\gamma!}=-\frac{1}{4!}\mathfrak{b}_{k-1}+\frac{1}{3!}(k+1)(2k+1)\mathfrak{b}_k \tag{36}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma=0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$\alpha f+\beta g+\gamma h=k,\qquad f,\ g,\ h=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$\underline{m=4}$

$m=2n=4,\ n=2,\ k=4,\ 5,\ \dots$

$$\sum_{h=1}^{h=4}(-1)^{h+1}\binom{4}{h}\overset{h}{\underset{2k-2h}{\mathfrak{B}}}=\frac{1}{(2k-4)!}\sum_{p=1}^{p=2}\frac{\overset{4}{\underset{2p-1}{a}}}{2k+2p-4}B_{k+p-2}$$

$$\overset{4}{\underset{2p-1}{a}}=\frac{1}{(2p-1)!}\sum_{r=1}^{r=2-p}(-1)^{r-1}\binom{4}{r}\overset{r}{\underset{4-2p-2r}{\mathfrak{B}}}$$

$$\overset{4}{\underset{1}{a}}=4\overset{1}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}=4\mathfrak{b}_1=\tfrac{1}{3},\quad \overset{4}{\underset{3}{a}}=-\frac{1}{3!}$$

$$\binom{4}{1}\overset{1}{\underset{2k-2}{\mathfrak{B}}}-\binom{4}{2}\overset{2}{\underset{2k-4}{\mathfrak{B}}}+\binom{4}{3}\overset{3}{\underset{2k-6}{\mathfrak{B}}}-\binom{4}{4}\overset{4}{\underset{2k-8}{\mathfrak{B}}}=$$
$$=\frac{1}{(2k-4)!}\left(\frac{B_{k-1}}{6k-6}-\frac{B_k}{12k}\right)=$$
$$=\frac{2k-3}{3}\mathfrak{b}_{k-1}-\frac{1}{3!}(\mathfrak{b}k-1)(2k-2)(2k-3)\mathfrak{b}_k$$

Mit Rücksicht auf die aus (29), (29′) und (30) bekannten ersten 3 Glieder ist nach gehöriger Reduction

$$\overset{4}{\underset{2k-8}{\mathfrak{B}}} = 4!\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{b}_f{}^{\alpha}}{\alpha\,!}\,\frac{\mathfrak{b}_g{}^{\beta}}{\beta\,!}\,\frac{b_h{}^{\gamma}}{\gamma\,!}\,\frac{b_i{}^{\delta}}{\delta\,!} = -\tfrac{2}{3}k\mathfrak{b}_{k-1} + \tfrac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\mathfrak{b}_k \qquad (37)$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 4 \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\alpha f+\beta g+\gamma h+\delta i = k, \qquad f,\ g,\ h,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

$$k = 4, \quad \overset{4}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{b}_1{}^4 = -\frac{8}{3}\mathfrak{b}_3 + 165\mathfrak{b}_4$$

$$= 5, \quad \overset{4}{\underset{2}{\mathfrak{B}}} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_2 = -\frac{10}{3}\mathfrak{b}_4 + 286\mathfrak{b}_5$$

$$= 6, \quad \overset{4}{\underset{4}{\mathfrak{B}}} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_3 + 6\mathfrak{b}_1{}^2 b_2{}^2 = -4\mathfrak{b}_5 + 455\mathfrak{b}_6$$

$$= 7, \quad \overset{4}{\underset{6}{\mathfrak{B}}} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_4 + 4\mathfrak{b}_2{}^3\mathfrak{b}_1 + 12\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 = -\frac{14}{3}\mathfrak{b}_6 + 680\mathfrak{b}_7$$

$$= 8, \quad \overset{4}{\underset{8}{\mathfrak{B}}} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_2{}^4 + 6\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_3{}^2 = -\frac{16}{3}\mathfrak{b}_7 + 969\mathfrak{b}_8$$

$$= 9, \quad \overset{4}{\underset{10}{\mathfrak{B}}} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_6 + 4\mathfrak{b}_2{}^3\mathfrak{b}_3 + 6\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 + 6\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_5 + 6\mathfrak{b}_2{}^2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4$$

$$+ 6\mathfrak{b}_3{}^2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = -6\mathfrak{b}_8 + 1330\mathfrak{b}_9$$

. . . .

9.

Für die Euler'schen Zalen und ihre Combinationen lassen sich ähnliche Formelsysteme aufstellen.

Die Differentiation von

$$y = \sec x$$

ergiebt

$$y' = \sin x \,.\, y^2, \quad \text{ferner}$$

$$y'' = 2y^3 - y \quad \text{oder}$$

$$y^3 = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y''$$

ebenso findet sich

$$y^5 = \frac{3}{8}y + \frac{5}{12}y'' + \tfrac{1}{24}y^{IV}$$

. . . .

hieraus kann auf das folgende allgemeine Bildungsgesetz geschlossen werden

$$y^{2n+1} = \overset{2n+1}{\underset{0}{a}}\, y + \overset{2n+1}{\underset{2}{a}}\, y'' + \dots + \overset{2n+1}{\underset{2n-2}{a}}\, \overset{\overline{2n-2}}{y} + \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}}\, \overset{\overline{2n}}{y} \qquad (38)$$

Die hier auftretenden Coefficienten sollen nun bestimmt werden.

Es ist

$$y = \sec x = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + 2\sum_{r=1} \frac{2^{2r-1}-1}{(2r)!} B_r \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2r-1}$$

$$y^{(2r)} = \frac{(2r)!}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2r+1}} + 2\sum_{p=1} \frac{2^{2r+2p-1}-1}{(2p-1)!\,(2r+2p)} B_{p+r} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2p-1}$$

Durch Erheben obiger Reihe zur $2n+1$ ten Potenz entsteht ein Resultat von der Form

$$y^{2n+1} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2n+1}} + \frac{\overset{2n+1}{\underset{1}{\mathfrak{C}}}}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2n-1}} + \dots + \frac{\overset{2n+1}{\underset{n-r}{\mathfrak{C}}}}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2r+1}} + \dots$$

Wird $r = 0, 1, 2, \dots$ gesetzt, die für y'', $\overline{y^{(4)}}$, ... $\overline{y^{2n}}$ und $\overline{y^{2n+1}}$ entsprechenden Reihen in die Gleichung (38) substituirt, so ergiebt die Vergleichung gleich hoher negativer Potenzen von $\frac{\pi}{2} - x$

$$\overset{2n+1}{\underset{2r}{a}} = \frac{1}{(2r)!}\overset{2n+1}{\underset{n-r}{\mathfrak{C}}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots n$$

insbesondere ist für $r = n$

$$\overset{2n+1}{\underset{0}{\mathfrak{C}}} = 1, \quad \text{daher} \quad \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}} = \frac{1}{(2n)!}$$

Die **geraden** Potenzen lassen sich nicht linear durch die Ableitungen darstellen, wol aber $y^{2n}\sin x$.

Die Differentiation von (24) ergiebt

$$\overline{2n+1}\, y^{2n} y' = \overset{2n+1}{\underset{0}{a}}\, y' + \overset{2n+1}{\underset{2}{a}}\, y''' + \ldots + \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}}\, y^{\overline{2n+1}}$$

$$y^{2n} y' = y^{2n+2} \sin x$$

$$2n+1\, y^{2n+2} \sin x = \overset{2n+1}{\underset{0}{a}}\, y' + \ldots + \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}}\, y^{\overline{2n+1}}$$

$n-1$ statt n geschrieben:

$$\overline{2n-1}\, y^{2n} \sin x = \overset{2n-1}{\underset{0}{a}}\, y' + \overset{2n-1}{\underset{2}{a}}\, y''' + \ldots + \overset{2n-1}{\underset{2n-2}{a}}\, y^{\overline{2n-1}} \qquad (39)$$

Nach Einführung der die **Euler'schen** Zalen enthaltenden Reihen für $y, y', y'', \ldots$ in diese Gleichung geht durch successive Differentiationen und schliessliches Nullsetzen des Argumentes x ein zweifach unendliches **Formelsystem** hervor, in welchem combinatorische Aggregate der **Euler'schen** Zalen **linear** durch die letzteren mit Hilfe gewisser, von Bernoulli'schen Zalen abhängigen Coefficienten ausgedrückt erscheinen.

Um nur **homogene** Gebilde Euler'scher Zalen in die Rechnung zu bekommen, sei

$$\overline{y-1}^{\,m} = \left(\sum_{r=1} \frac{E_r}{(2r)!} x^{2r} \right)^m = \sum_{r=0} \mathfrak{E}^m{}_r\, x^{2m+2r}$$

wo sich die Coefficienten $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des polynomischen Lehrsatzes bestimmen. Wenn

$$\frac{E_r}{(2r)!} = \mathfrak{E}_{r-1}{}^1$$

gesetzt wird, ist dann

$$y^m = 1 + \binom{m}{1} \sum_{r=0} \mathfrak{E}_r{}^1 x^{2r+2} + \binom{m}{2} \sum_{r=0} \mathfrak{E}_r{}^2 x^{2r+4} \ldots +$$
$$\ldots + \binom{m}{m} \sum_{r=0} \mathfrak{E}^m{}_r\, x^{2m+2r}$$

Gleich hohe Potenzen vereinigend, entsteht

$$y^m = 1 + \binom{m}{1} \mathfrak{E}_0{}^1\, x^2 + \left(\binom{m}{1} \mathfrak{E}_1{}^1 + \binom{m}{2} \mathfrak{E}_0{}^2 \right) x^4 +$$
$$+ \left(\binom{m}{1} \mathfrak{E}_2{}^1 + \binom{m}{2} \mathfrak{E}_1{}^2 + \binom{m}{3} \mathfrak{E}_0{}^3 \right) x^6 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\binom{m}{1} \mathfrak{E}_{r-1} + \binom{m}{2} \mathfrak{E}_{r-2}{}^2 + \ldots + \binom{m}{r} \mathfrak{E}_0{}^r \right) x^{2r} + \ldots$$

somit

$$(D^{2r}y^m)_{x=0}=(2r)!\sum_{p=1}^{p=r}\binom{m}{p}\mathfrak{E}_{r-p}^{p} \tag{40}$$

ferner

$$D^{2r}y_0=E_r$$

und

$$D^{2r+1}y_0=0$$

Die $2r$ malige Differentiation der Gleichung (38) ergiebt schliesslich mit Rücksicht auf das eben Gefundene

$$(2r)!\sum_{p=1}^{p=r}\binom{2n+1}{p}\mathfrak{E}_{r-p}^{p}=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{1}{(2s)!}\overset{2n+1}{\underset{n-s}{\mathfrak{E}}}E_{r+s} \tag{41}$$

Die einzelnen $\mathfrak{E}$ lassen sich hieraus recursiv bestimmen; eine independenze Darstellung derselben folgt aus

$$(y-1)^m=\sum_{r=0}\mathfrak{E}_r^m x^{2m+2r}=\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)^m$$

$$=\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{1-2\sin^2\frac{x}{2}}\right)^m \tag{42}$$

Nun ist

$$\frac{1}{1-v}=\sum_{t=0}v^t,\quad v^2<1$$

daher

$$D^{m-1}\frac{1}{1-v}=\frac{(m-1)!}{(1-v)^m}=(m-1)!\left(\binom{m-1}{m-1}+\binom{m}{m-1}v+\binom{m+1}{m-1}v^2+\cdots\right)$$

somit

$$\left(\frac{v}{1-v}\right)^m=\sum_{p=m}\binom{p-1}{m-1}v^p$$

folglich, v als Function einer Variabelen x betrachtend

$$D_x^k\left(\frac{v}{1-v}\right)^m=\sum_{p=m}\binom{p-1}{m-1}D_x^k v^p$$

$2\sin^2\frac{x}{2}=v$ gesetzt, ist nach (42) bei geradem k

$$D_x^k\left(\frac{v}{1-v}\right)^m=k!\sum_{t=0}\binom{k+2t}{k}\mathfrak{E}^m_{\frac{k}{2}-m+t}\,x^{2t}$$

berücksichtigend, dass

$$D_x^k v^p{}_{x=0} = 2^{p-k} D^k_{\frac{x}{2}} \sin^{2p}\frac{x}{2}_{x=0} = 2^{p-k} s_k^{2p}$$

so ist für $x = 0$ und bei **geradem** k

$$\mathfrak{E}^m_{\frac{k}{2}-m} = \frac{1}{k!} \sum_{p=m}^{p=\frac{k}{2}} 2^{p-k} \binom{p-1}{m-1} s_k^{2p} \qquad (43)$$

Die $\overline{2r+1}$ malige Differentiation der Gleichung (39) führt zu

$$(2n-1)\left[D^{2r+1} y^{2n} \sin x + \binom{2r+1}{1} D^{2r} y^{2n} \cos x - \ldots\right]$$
$$= \overset{2n-1}{\underset{0}{a}} y^{(2r+2)} + \overset{2n-1}{\underset{2}{a}} y^{(2r+4)} \ldots + \overset{2n-1}{\underset{2n-2}{a}} y^{(2n+2r)}$$

woraus für $x = 0$ folgt

$$(2n-1) \sum_{s=1,3,5\ldots}^{s=2r+1} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \binom{2r+1}{s} D^{2r-s+1} y^{2n}{}_0$$
$$= \sum_{t=0,1,2\ldots}^{t=n-1} \overset{2n-1}{\underset{2t}{a}} y_0^{(2r+2t+2)}$$

und mit Beachtung der bereits bekannten Nullwerte

$$(2n-1)(2r+1)! \sum_{s=1,3,5\ldots}^{s=2r+1} \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s!} \sum_{p=1}^{p=r-\frac{s-1}{2}} \binom{2n}{p} \mathfrak{E}^{p}_{r-p-\frac{s-1}{2}}$$
$$= \sum_{t=0}^{t=n-1} \frac{1}{(2t)!} \mathfrak{E}^{2n-1}_{n-t-1} E_{r+t+1} \qquad (44)$$

Während sich für die Aggregate $\mathfrak{B}$ der **Bernoulli'schen** Zalen in (30), (31) und (32) Ausdrücke ergaben, deren Gliederzal nur von s abhängig waren, wächst hier die Gliederzal der für die homogenen Gebilde $\mathfrak{E}$ durch Recursion hervorgehenden Ausdrücke auch noch mit dem Ableitungszeiger r.

Nach Gleichung (40) sind nur **jene**, durch Erhebung von y zu

einer **ungeraden** Potenz entstehenden Coefficienten in solche, in den **Euler**'schen Zalen linearen Ausdrücke umwandelbar, deren Gliederzal **nur** vom Potenz-Exponenten n abhangen.

Der Coeffieient der beliebigen Potenz x^{2r} von

$$y^{2n+1} = \left(1 + \sum_{k=1} \frac{E_k}{(2k)!} x^{2k}\right)^{2n+1}$$

st zufolge des polynomischen Lehrsatzes

$$\frac{1}{(2r)!}(D^{2r} y^{2n+1})_0 = (2n+1)! \, \Sigma \frac{e_f^{\alpha} e_g^{\beta} \ldots e_z^{\zeta}}{\alpha! \, \beta! \ldots \zeta!}$$

wo

$$e_k = \frac{E_k}{(2k)!}, \quad e_0 = 1$$

ist, und die Zal r auf alle verschiedene Arten in $2n+1$ gleiche oder ungleiche Glieder $f, g, \ldots z$ so zu zerlegen ist, dass

$$\alpha f + \beta g + \ldots + \zeta z = r \quad \text{und}$$
$$\alpha, \beta, \ldots \zeta = 0, 1, 2, r \ldots$$
$$f, g, \ldots z = 0, 1, 2 \ldots \quad \text{ist}$$

Im linksseitigen Teile der Gleichung (41) erscheint obgenannter Coefficient in mit den Binomialcoefficienten behaftete homogene Gruppen $\mathfrak{E}$ zerlegt. Ihre Grade wachsen von 1 bis r, wenn

$$r \leqq 2n+1$$

hingegen von 1 bis $2n+1$, wenn

$$r \geqq 2n+1$$

ist.

Für beliebige p und q gilt

$$\mathfrak{E}^p q = p! \, \Sigma \frac{e_f^{\alpha} e_g^{\beta} \ldots e_z^{\zeta}}{\alpha! \, \beta! \ldots \zeta!}$$

$$\alpha + \beta + \ldots + \zeta = p$$
$$\alpha f + \beta g + \ldots \zeta z = p + q \tag{45}$$

$$\alpha, \gamma, \ldots \zeta = 0, 1, 2, \ldots p$$
$$f, g, \ldots z = 1, 2, 3, \ldots$$

Wenn der Fall $r < 2n+1$, der nur leere Identitäten hervorbringt, ausgeschlossen und das Glied

$$\mathfrak{C}_{r-1}' = \frac{E_r}{(2r)!}$$

in (41) auf die rechte Seite geschafft wird, so ist nach leichter Reduction

$$\sum_{p=2}^{p=2n+1} \binom{2n+1}{p} \overset{p}{\mathfrak{C}}_{r-p} = (\overset{2n+1}{\mathfrak{C}}_n - 2n - 1)\frac{E_r}{(2r)!}$$

$$+ \frac{1}{(2r)!}\sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{(2s)!} \overset{2n+1}{\underset{n-s}{\mathfrak{C}}} E_{r+s}$$

$$r \geq 2n+1 \qquad (46)$$

Den möglichen, besonderen Werten von n und r entspricht ein doppelt unendliches Formelsystem.

Im Folgenden wurden die ersten zwei Systeme entsprechend den Annahmen $n = 1, 2$, entwickelt.

$n = 1$

$2n+1 = 3, \quad r = 3, 4, \ldots$

$$\overset{3}{\underset{1}{\mathfrak{C}}} = 3.2\frac{2^1-1}{2}B_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \overset{3}{\underset{0}{\mathfrak{C}}} = 1$$

$$3\overset{2}{\mathfrak{C}}_{r-2} + \overset{3}{\mathfrak{C}}_{r-3} = \frac{1}{2(2r)!}(E_{r+1} - 5E_r), \quad r \geq 3 \qquad (47)$$

$r = 3, \quad \overset{2}{\mathfrak{C}}_1 = 2e_1e_2 \quad \overset{3}{\mathfrak{C}}_0 = e_1^3$

$$6e_1e_2 + e_1^3 = \frac{1}{2.6!}(E_4 - 5E_3)$$

$r = 4, \quad 6e_1e_3 + 3e_2^2 + 3e_1^2e_2 = \frac{1}{2.8!}(E_5 - 5E_4)$

$r = 5, \quad 6e_1e_4 + 6e_2e_3 + 3e_1^2e_3 + 3e_1e_2^2 = \frac{1}{2.10!}(E_6 - 5E_5)$

$r = 6, \quad 6e_1e_5 + 6e_2e_4 + 3e_3^2 + 3e_1^2e_4 + e_2^3 + 6e_1e_2e_3$

$$= \frac{1}{2.12!}(E_7 - 5E_6)$$

$$= 7,\quad 6e_1e_6+6e_2e_5+6e_3e_4$$

$$+3e_1^2e_5+3e_2^2e_3+3e_1e_3^2+6e_1e_2e_4=\frac{1}{2.14!}(E_8-5E_7)$$

$$\underline{n=2}$$

$2n+1=5,\quad r=5,\ 6,\ \ldots$

$$\overset{5}{\underset{0}{\mathfrak{C}}}=1$$

$$\overset{5}{\underset{1}{\mathfrak{C}}}=5.2\,\frac{2^1-1}{2!}B_1=\tfrac{5}{6}$$

$$\overset{5}{\underset{2}{\mathfrak{C}}}=5.2\,\frac{2^3-1}{4!}B_2+10\left(2\,\frac{2^1-1}{2!}B_1\right)^2=\tfrac{3}{8}$$

$$10\overset{2}{\mathfrak{E}}_{r-2}+10\overset{3}{\mathfrak{E}}_{r-3}+5\overset{4}{\mathfrak{E}}_{r-4}+\overset{5}{\mathfrak{E}}_{r-5}$$

$$=\frac{1}{4!\,(2r)!}\left(-111E_r+10E_{r+1}+E_{r+2}\right)$$

und mit Beachtung des sich aus (47) bestimmenden $\overset{3}{\mathfrak{E}}_{r-3}$

$$-20\overset{2}{\mathfrak{E}}_{r-2}+5\overset{4}{\mathfrak{E}}_{r-4}+\overset{5}{\mathfrak{E}}_{r-5}=\frac{1}{4!\,(2r)!}\left(489E_r-110E_{r+4}+E_{r+2}\right)$$

$$r\geqq 5 \tag{48}$$

$$r=5,\quad -40(e_1e_4+e_2e_3)+20e_1^3e_2+e_1^5$$

$$=\frac{1}{4!\,10!}(489E_5-110E_6+E_7)$$

$$=6,\quad -20(2e_1e_5+2e_2e_4+e_3^2)+5(4e_1^3e_3+6e_1^2e_2^2)+5e_1^4e_2$$

$$=\frac{1}{4!\,12!}(489E_6-110E_7+E_8)$$

$$=7,\quad -40(e_1e_6+e_2e_5+e_3e_4)+20(e_1^3e_4+e_1e_2^3+3e_1^2e_2e_3)$$

$$+5e_1^4e_3+10e_1^3e_2^2=\frac{1}{4!\,14!}(489E_7-110E_8+E_9)$$

. . . .

10.

In der Theorie der „Gamma-Functionen“ findet sich die Reihe

$$y = \frac{x}{\log \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{J_1}{1!}x - \frac{J_2}{2!}x^2 - \ldots; \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

deren Coefficienten durch bestimmte Integrale

$$J_n = \int_0^1 v(1-v)(2-v)\ldots(n-1-v)\,dv$$

ausgedrückt werden.

Als Nullwerte der Ableitungen der Function y aufgefasst, können dieselben, sowie überhaupt jene beliebiger Potenzen y^m auf eine einfache Art independent bestimmt werden.

Nach dem Mac Laurin'schen Satze ist

$$(e^y-1)^m = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} D_y^k (e^y-1)_0^m y^k$$

und da

$$D_y^k(e^y-1)_0^m = \begin{cases} m^k - \binom{m}{1}(m-1)^k + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}1^k = \overset{m}{E}_k & k \geqq m \\ 0, & k < m \end{cases}$$

auch

$$= \sum_{k=m}^{k=\infty} \frac{\overset{m}{E}_k}{k!} y^k \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{e^y-1}{y}\right)^m = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\overset{m}{E}_{m+h}}{(m+h)!} y^h$$

Wird $y = \log(1-x)$ gesetzt, so kommt

$$\left(\frac{-x}{\log(1-x)}\right)^m = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\overset{m}{\Sigma}_{m+h}}{(m+h)!} (\log \overline{1-x})^h$$

nun ist

$$D^n(\log \overline{1-x})^h{}_0 = (-1)^h h! \overset{n}{\underset{n-h}{C}} \quad \text{(Vergl. b)}$$

haher

$$D^n\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)^m_0 = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^h h!}{(m+h)!} \overset{n}{\underset{n-h}{C}} \overset{m}{\underset{m+h}{E}} \tag{49}$$

Für $m = 1$ ist $\overset{1}{\underset{h+1}{E}} = 1$ und

$$D^n\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)_0 = \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h \frac{\overset{h}{\underset{n-h}{C}}}{h+1} = -J_n$$

Für $m = 2$ ist $\overset{2}{\underset{h+2}{E}} = 2^{h+2} - 2$ und

$$D^n\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)^2_0 = 2\sum_{h=1}^{h=r} (-1)^h \frac{2^{h+1}-1}{(h+1)(h+2)} \overset{n}{\underset{n-h}{C}} \tag{50}$$

daher

$$\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)^2 = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{h-1}^{h=n} (-1)^h \frac{2^{h+1}-1}{(h+1)(h+2)} \overset{n}{\underset{n-h}{C}} \tag{51}$$

Ebenso findet sich

$$D^n\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^m_0 = (-1)^n \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\overset{n}{\underset{n-h}{C}} \quad \overset{m}{\underset{m+h}{E}}}{(h+1)(h+2)\dots(h+m)} \tag{52}$$

11.

Wird in

$$(\log \overline{1-y})^m = (-1)^m m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{\overset{r}{\underset{r-m}{C}}}{r!} y^r$$

unter m eine ganze positive Zal verstanden,

$$y = \sin^2 x$$

genommen, so kommt

$$(\log \cos x)^m = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{\overset{r}{\underset{r-m}{C}}}{r!} \sin^{2r} x \tag{53}$$

woraus

$$D^n (\log \cos x)^m{}_0 = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} \frac{\overset{r}{\underset{r-m}{C}}}{r!} s^{2r}{}_n \tag{54}$$

Die Substitution

$$y = \sin x$$

führt zu

$$\left(\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right)^m = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{\overset{r}{\underset{r-m}{C}}}{r!} \sin^r x \tag{55}$$

woraus

$$D^n\left(\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right)^m_0 = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=n} \frac{\overset{r}{\underset{r-m}{C}}}{r!} s^r{}_n \tag{56}$$

12.

$$\operatorname{arc tg} x$$

$$= \tfrac{1}{2} i \log \frac{1-ix}{1+ix} = \tfrac{1}{2} i \log\left(1 - 2\,\frac{ix}{1+ix}\right)$$

folglich nach (6)

$$(\operatorname{arc tg} x)^m = \frac{(-1)^m}{2^m} i^m m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{2^r}{r!} \overset{r}{\underset{r-m}{C}} \left(\frac{ix}{1+ix}\right)^r$$

Aus d) folgt ferner für $a = 1$ und ix statt x

$$D^n\left(\frac{ix}{1+ix}\right)^r_0 = i^n n! \binom{n-1}{n-r}$$

daher ist, wenn m und n zugleich g e r a d e odnr zugleich u n g e r a d e sind

$$D^n (\operatorname{arc tg} x)^m{}_0 = (-1)^{\frac{3m+n}{2}} \frac{m!}{2^m} n! \sum_{r=m}^{r=n} \frac{2^r}{r!} \binom{n-1}{r-1} \overset{r}{\underset{r-m}{C}} \tag{57}$$

Ist $m+n$ ungerade, so erscheint der Nullwert in imaginärer Form; mit Hinblick auf die reelle Potenz $(\operatorname{arctg} x)^m$ muss daher die Identität bestehen

$$\sum_{r=m}^{r=n} \frac{2^r}{r!} \binom{n-1}{r-1} \overset{r}{\underset{r-m}{C}} = 0 \quad (m+n \text{ ungerade}) \tag{58}$$

Dies stimmt mit der Tatsache überein, dass eine gerade Potenz von

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

nur gerade Potenzen von x und eine ungerade Potenz dieser Function nur ungerade Potenzen von x enthalten kann.

13.

$$\arcsin x$$

$$= -i \log\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right) = -\frac{i}{2}\log\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$= -\frac{i}{2}\log\left(1 + 2ix\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right)\right) = -\frac{i}{2}\log\left(1 + 2ix\, e^{i\arcsin x}\right)$$

$$(\arcsin x)^m = \left(-\frac{i}{2}\right)^m \left[\log\left(1 + 2ix\, e^{i\arcsin x}\right)\right]^m$$

$$= \left(-\frac{i}{2}\right)^m m! \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-1)^h}{(m+h)!} \overset{m+h}{\underset{h}{C}} \left(2ix\, e^{i\arcsin x}\right)^{m+h}$$

Nun ist

$$D^n{}_0 x^{m+n} e^{\overline{m+h}\, i \arcsin x} = \binom{n}{m+h} \overline{m+h}!\; D^{n-m-h} e^{\overline{m+h}\, i \arcsin x}{}_0$$

und nach Formel (g)

$$D^{n-m-h} e^{\overline{m+h}\, i\arcsin x}{}_0 = \begin{cases} -\prod\limits_{p=2,4,\dots}^{p=n-m-h-2} \left(p^2 - \overline{m+h}^2\right) \overline{m+h}^2 & n-m-h \text{ gerade} \\ i\prod\limits_{p=1,3\dots}^{p=n-m-h-2} \left(p^2 - \overline{m+h}^2\right) \overline{m+h} & n-m-h \text{ ungerade} \end{cases}$$

folglich nach leichter Reduction, wenn $n-m$ gerade ist,

$D^n(\arcsin x)^m{}_0=$

$$n!\sum_{h=2,4\ldots}^{h=n-m}(-1)^{\frac{h}{2}+1}\,2^h\binom{n}{m+h}\overset{m+h}{\underset{h}{C}}\prod_{p=2,4\ldots}^{p=n-m-h-2}(p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h}^2$$

$$+n!\sum_{h=1,3\ldots}^{h=n-m-1}(-1)^{\frac{h-1}{2}}\,2^h\binom{n}{m+h}\overset{m+h}{\underset{h}{C}}\prod_{p=1,3\ldots}^{p=n-m-h-2}(p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h} \tag{59}$$

Bei ungeradem $(n-m)$ erscheint der Nullwert in imaginärer Form, was nur möglich ist, wenn derselbe verschwindet; dies giebt die Identität

$$\sum_{h=1,3\ldots}^{h=n-m}(-1)^{\frac{h-1}{2}}\,2^h\binom{n}{m+h}\overset{m+h}{\underset{h}{C}}\prod_{p=2,4\ldots}^{p=n-m-h-2}(p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h}^2$$

$$+\sum_{h=2,4\ldots}^{h=n-m-1}(-1)^{\frac{h}{2}}\,2^h\binom{n}{m+h}\overset{m+h}{\underset{h}{C}}\prod_{p=1,3\ldots}^{p=n-m-h-2}(p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h}=0$$

$(\overline{n-m}$ ungerade) (60)

14.

$$z=e^{ke^{(p+qi)x}}$$

$$=e^k e^{k(e^{(p+qi)x}-1)}=e^k\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{k^r}{r!}\,(e^{(p+qi)x}-1)^r$$

Nun ist

$$D_x{}^n(e^{\overline{p+qi}\,x}-1)^r{}_0=(p+qi)^n\,\overset{r}{\underset{n}{E}}$$

ferner

$$(p+qi)^n=(p^2+q^2)^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right)+i\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right)\right)$$

$$=p^n-\binom{n}{2}p^{n-2}q^2+\binom{n}{4}p^{n-4}q^4-+\ldots$$

$$+i\left[\binom{n}{1}p^{n-1}q-\binom{n}{3}p^{n-3}q^3+-\ldots\right]$$

andererseits ist

$$z^{(n)}_0 = D^n e^{ke^{px}}(\cos qx + i\sin qx)$$
$$= D_x^n e^{ke^{px}\cos qx}\cos(k e^{px}\sin qx)_0$$
$$+ iD_x^n e^{ke^{px}\cos qx}\sin(k e^{pa}\sin qx)_0$$

Die Gleichstellung ergiebt

$$D_x^n e^{ke^{px}\operatorname{ocs}px}\cos(k e^{px}\sin qx)_0$$
$$= (p^2+q^3)^{\frac{n}{2}} e^k \cos\left(n \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right) \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^c}{r!} \underset{n}{\overset{r}{E}} \qquad (61)$$

$$D_x^n e^{ke^{px}\cos qx}\sin(k e^{px}\sin qx)_0$$
$$= (p^2+q^2)^{\frac{n}{2}} e^k \sin\left(n \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right) \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^r}{r!} \underset{n}{\overset{r}{E}} \qquad (62)$$

Für $p = 0$ und $q = 1$ folgt

$$D_x^n e^{k\cos x}\cos(k\sin x)_0$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}} e^k \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^r}{r!} \underset{n}{\overset{r}{E}} \qquad n \text{ gerade} \qquad (63)$$

$$D_x^n e^{k\cos x}\sin(k\sin x)_0$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} e^k \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^r}{r!} \underset{n}{\overset{r}{E}} \qquad n \text{ ungerade} \qquad (64)$$

Bei ungeradem n verschwindet der erstere und bei geradem n der zweite der beiden letzten Nullwerte.

15.

Functionen von der Form

$$F(x) = [\mathfrak{f}(x)]^{\varphi(x)}$$

können auch geschrieben werden

$$F(x) = e^{\varphi(x)\log f(x)}$$

Die Nullwerte ihrer Ableitungen ergeben sich nach dieser Methode, wenn der Exponent eine Function „$\mathfrak{f}(x)$“ ist.

Eine independente Bestimmungsweise bedingt jene der Ableitungs-Nullwerte sowol der Potenzen von $\varphi(x)$ als auch jener von $\log f(x)$.

Von letzteren können nur drei in Betracht kommen, nämlich

$$\log(1 \pm x), \quad \log\cos x (54) \quad \text{und} \quad \log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) \tag{56}$$

a) $f(x) = 1 + x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon} x^p, \quad \varepsilon = 1, 2$

$$F(x) = (1+x)^{(-1)^{\varepsilon} x^p} = e^{(-1)^{\varepsilon} x^p \log(1+x)} = \sum_{r=0} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} (x^p \log \overline{1+x})^r$$

$$D^n F_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{p+1}\right|} (-1)^{\varepsilon r} \frac{\overline{pr}!}{r!} \binom{n}{pr} D^{n-pr} (\log \overline{1+x})^r_0$$

folglich

$$D^n (1+x)^{(-1)^{\varepsilon} x^p}{}_0$$

$$= \sum^{r=\left|\frac{n}{p+1}\right|} (-1)^{r+\varepsilon r} \overline{pr}! \binom{n}{pr} \overset{n-pr}{\underset{n-pr-r}{C}} \qquad x^2 < 1 \tag{65}$$

$f(x) = 1 - x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon} x^p, \quad \varepsilon = 1, 2$

$$D^n (1-x)^{(-1)^{\varepsilon} x^r}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{p+1}\right|} (-1)^{r+\varepsilon r} \overline{pr}! \binom{n}{pr} \overset{n-pr}{\underset{n-pr-r}{C}} \qquad x^2 < 1 \tag{66}$$

Für $p = 1$ ist

$$D^n \overline{1+x}^{(-1)^{\varepsilon} x}{}_0 = \sum_{r=1}^{s=\left|\frac{n}{2}\right|} (-1)^{n+\varepsilon r} r! \binom{n}{r} \overset{n-r}{\underset{n-2r}{C}} \tag{67}$$

$$D^n \overline{1-x}^{(-1)^{\varepsilon} x}{}_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} (-1)^{r+\varepsilon\varepsilon} r! \binom{n}{r} \overset{n-2r}{\underset{n-r}{C}} \tag{68}$$

b) $f(x) = 1+x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon}(\log \overline{1+x})^m, \quad \varepsilon = 1,\ 2$

$$F(x) = (1+x)^{(-1)^{\varepsilon}(\log \overline{1+x})^m}$$

$$= e^{(-1)^{\varepsilon}(\log \overline{1+x})^m} = \sum_{r=0} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} (\log \overline{1+x})^{mr+r}$$

$$D^n (1+x)^{(-1)^{\varepsilon}(\log \overline{1+x})^m}{}_0$$

$$= \sum_{n=1}^{r=\left|\frac{n}{m+1}\right|} (-1)^{n-mr-\varepsilon+\varepsilon r} \frac{(mr+r)!}{r!} \overset{n}{\underset{n-mr-r}{C}} \tag{69}$$

Für $m = 1$ ist

$$D^n (1+x)^{(-1)^{\varepsilon}\log \overline{1+x}}{}_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} (-1)^{n+\varepsilon r} \frac{2r!}{r!} \overset{n}{\underset{n-mr-r}{C}} \tag{70}$$

$f(x) = 1-x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon}(\log \overline{1-x})_m, \quad \varepsilon = 1,\ 2$

$$D^n (1-x)^{(-1)^{\varepsilon}(\log \overline{2-x})^m}{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{m+1}\right|} (-1)^{mr+r+\varepsilon r} \frac{(mr+r)!}{r!} \overset{n}{\underset{n-mr-r}{C}} \tag{71}$$

Für $m = 1$ ist

$$D^n (1-x)^{(-1)^{\varepsilon}\log \overline{1-x}}{}_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} (-1)^{\varepsilon} \frac{2r!}{r!} \overset{n}{\underset{n-2r}{C}} \tag{72}$$

c) $f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon} x^p, \quad \varepsilon = 1,\ 2$

$$F(x) = (\cos x)^{(-1)^{\varepsilon} x^p}$$

$$= e^{(-1)^{\varepsilon} x^p \log \cos x} = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^{\varepsilon r} \frac{x^{pr}}{r!} (\log \cos x)^r$$

$$D^n F_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{u}{p+2}\right|} (-1)^{\varepsilon r} \frac{pr!}{r!} \binom{n}{pr} D^{n-pr} (\log \cos x)^r{}_0$$

laut Formel (54)

$$D^n (\cos x)^{x^p}_0$$

$$= n! \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{p+2}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{2^r r!\,(n-pr)!} \sum_{t=r}^{t=\left|\frac{n-pr}{2}\right|} \frac{\overset{t}{\underset{t-r}{C}}\ \overset{2t}{\underset{n-pr}{s}}}{t(t-1)\dots(r+1)} \tag{73}$$

Für $p = 1$ ist

$$D^n \cos x)^{(-1)^\varepsilon x}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{3}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{2^r} \binom{n}{r} \sum_{t=r}^{t=\left|\frac{n-r}{2}\right|} \frac{\overset{t}{\underset{t-r}{C}}\ \overset{2t}{\underset{n-r}{s}}}{t(t-1)\dots(r+1)} \tag{74}$$

e) $f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = (-1)^\varepsilon (\log\cos x)^m, \quad \varepsilon = 1\ 2$

$$F(x) = (\cos x)^{(-1)^\varepsilon (\log\cos x)^m}$$

$$= e^{(-1)^\varepsilon (\log\cos x)^{m+1}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} (\log\cos x)^{mr+r}$$

$$D^n \cos x^{(-1)^\varepsilon (\log\cos x)^m}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2m+2}\right|} \frac{(-1)^{m+r+\varepsilon r}}{r!\,2^{m+r}} \sum_{t=mr+r}^{t=\frac{n}{2}} \frac{\overset{t}{\underset{t-mr-r}{C}}\ \overset{2t}{\underset{n}{s}}}{t(t-1)\dots(mr+r+1)} \tag{75}$$

Für $m = 1$ ist

$$D^n \cos x^{(-1)^\varepsilon \log\cos x}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{4}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r+r+1}}{r!\,2^{r+1}} \sum_{t=2r}^{t=\frac{n}{2}} \frac{\overset{t}{\underset{t-2r}{C}}\ \overset{2t}{\underset{n}{s}}}{t(t-1)\dots(2r+1)} \tag{76}$$

d) $f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = \frac{(-1)^\varepsilon}{x}, \quad \varepsilon = 1,\ 2$

$$F(x) = \cos x^{\frac{(-1)^\varepsilon}{x}} = e^{\frac{(-1)^\varepsilon}{x}\log\cos x} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!\,x^r} (\log\cos x)^r$$

$$D^n \cos x^{\frac{(-1)^\varepsilon}{x}}{}_0 = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} D^n \left(\frac{\log \cos x}{x}\right)^r$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{\binom{n+r}{r}(r!)^2} D^{n+r} (\log \cos x)^r{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(-1)^{\varepsilon r + r}}{(n+r)\,..\,(n+1)\, r!\, 2^r} \sum_{t=r}^{t=\left|\frac{n-r}{2}\right|} \frac{\overset{t}{\underset{t-r}{C}} \quad \overset{2t}{\underset{n-s}{s}}}{t(t-1)\,\ldots\,(r+1)} \tag{77}$$

f) $f(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$, $\varphi(x) = (-1)^\varepsilon x^p$, $\varepsilon = 1, 2$

$$F(x) = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^\varepsilon x^p} = e^{(-1)^\varepsilon x^p \log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\varepsilon r} x^{pr}}{r!} \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^r$$

$$D^n \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^\varepsilon x^p}{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{p+1}\right|} (-1)^{r+\varepsilon r} \frac{n\,\overline{n-1}\,\ldots\,\overline{n-pr+1}}{r!\, 2^r} \times$$

$$\times \sum_{t=m}^{t=n} \frac{\overset{t}{\underset{t-m}{C}} \quad \overset{r}{\underset{n}{s}}}{t(t-1)\,\ldots\,\overline{m+1}} \tag{78}$$

Für $p = 1$ ist

$$D^n \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^\varepsilon x}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} (-1)^{r+\varepsilon r} \frac{n\,\overline{n-1}\,\ldots\,\overline{n-pr+1}}{r!\, 2^r} \times$$

$$\times \sum_{t=r}^{t=n} \frac{\overset{t}{\underset{t-m}{C}} \quad \overset{r}{\underset{n}{s}}}{t\,\overline{t-1}\,\ldots\,\overline{m+1}}$$

g) $f(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$

$$\varphi(x) = (-)^{\varepsilon} x^{p} \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{m}, \quad \varepsilon = 1, 2$$

$$F(x) = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^{\varepsilon} x^{p}\left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{m}}$$

$$= e^{(-1)^{\varepsilon} x^{p}\left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{m+1}}$$

$$= \sum_{r=0} \frac{(-1)^{\varepsilon r} x^{pr}}{r!}\left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{(m+1)r}$$

$$D^{n} F_{0} = \sum_{r=2}^{r=\left|\frac{n}{m+p+1}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} \binom{n}{pr} \overline{pr}!\, D^{n-pr} \times$$

$$\times \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{(m+1)r}$$

daher mit Benutung der Formel (56):

$$D^{n}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)_{0}^{(-1)^{\varepsilon} x^{p}\left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{m}}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{m+p+1}\right|} \frac{(-1)^{(\varepsilon+m+1)r}\, n(n-1)\ldots(n-pr+1)}{r!\, 2^{(m+1)r}} \times$$

$$\times \sum_{t=\overline{m+1}r}^{t=n-pr} \frac{C^{t}_{t-\overline{m+1}r}\; s^{t}_{n-pr}}{t(t-1)\ldots(mr+r+1)} \qquad (79)$$

Für $m = 1$, $p = 0$, $\varepsilon = 2$ ist

$$D^{n}\left(\cos\frac{x}{e} - \sin\frac{x}{2}\right)_{0}^{\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \sum_{r=2}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} \frac{1}{r!\,2^{2r}} \sum_{t=2r}^{t=n} \frac{\overset{t}{C}_{i-2r}\;\overset{t}{s}_{s}}{t(t-1)\dots(2r+1)} \tag{80}$$

16.

Werden in der Formel (4) für $F(x)$, die aus der trigonometrischen Analysis bekannten zusammengesetzten Functionen $\log\frac{\sin v}{v}$, $\log\cos v$, $\log\frac{\mathrm{tg}\,v}{v}$, dann $\cos(\mu\arcsin v)$ u. a. ähnliche genommen, ferner

$$v = „\mathfrak{f}(x)“ = \mathfrak{f},\quad D^n[\mathfrak{f}(x)]^m{}_0 = \mathfrak{f}^m{}_n$$

gesetzt, wobei jene Functionen deren Potenzen den Formeln (12), (13), (16), (20), (49), (52), (54), (59) zu Grunde liegen auch einzubeziehen sind, so gehen die nachfolgenden Formeln hervor.

Die obere Grenze der rechtsseitigen Summen hängt hiebei von dem kleinsten Exponenten $q > 0$ von x jener Potenzreihe ab, in welche sich die Function $\mathfrak{f}$ verwandeln lässt

a) $$D^n \log \mathfrak{f}\,\mathrm{cosec}\,\mathfrak{f}_{x=0} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} \frac{S_{2r}\,\mathfrak{f}^{2r}{}_n}{r\pi^{2r}} \tag{81}$$

b) $$D^n \log\sec\mathfrak{f}_0 = \sum_{r=1}^{r=\frac{n}{2q}} \frac{1}{r}\,\frac{2^{2r}-1}{\pi^{2r}}\,S_{2r}\,\mathfrak{f}^{2r}{}_n \tag{82}$$

c) $$D^n \log\frac{\mathrm{tg}\,\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_0} = \sum_{r=1}^{r=\frac{n}{2q}} \frac{2^{2r}-2}{r\pi^{2r}}\,S_{2r}\,\mathfrak{f}^{2r}{}_n \tag{83}$$

d) $D^n\cos(\mu\arcsin\mathfrak{f})_0$

$$= \sum_{r=1}^{r=\frac{n}{2q}} (-1)^r\,\frac{2^{2r-2}}{r}\binom{\frac{\mu}{2}+r-1}{2r-2}\mathfrak{f}^{2r}{}_n \tag{84}$$

e) $D^n \dfrac{\sin(\mu \arcsin \mathfrak{f})}{\sqrt{1-\mathfrak{f}^2}}{}_0$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n+q}{2q}\right|} (-1)^{r-1} 2^{2r-1} \binom{\frac{\mu}{2}+r-1}{2r-1} \mathfrak{f}^{2r-1}{}_n \tag{85}$$

f) $D^n \sin(\mu \arcsin \mathfrak{f})_0$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n+q}{2q}\right|} (-1)^{r-1} \frac{2^{2r-2}\mu}{2r-1} \binom{\frac{\mu-3}{2}+r}{2r-2} \mathfrak{f}^{2r-1}{}_n \tag{86}$$

g) $D^n \dfrac{\cos(\mu \arcsin \mathfrak{f})}{\sqrt{1-\mathfrak{f}^2}}{}_0$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} (-1)^r 2^{2r} \binom{\frac{\mu-1}{2}+r}{2r} \mathfrak{f}^{2r}{}_n \tag{87}$$

h) $$D^n \frac{\mathfrak{f}}{e^{\mathfrak{f}}-1}{}^0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} \frac{(-1)^{r-1}}{2r!} B_r \mathfrak{f}^{2r}{}_n \qquad n > 1 \tag{88}$$

i) $$D^n \frac{1-\mathfrak{f}\cos\varphi}{1-2\mathfrak{f}\cos\varphi+\mathfrak{f}^2{}_0} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} \cos r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \tag{89}$$

j) $$D^n \frac{\mathfrak{f}\sin\varphi}{1-2\mathfrak{f}\cos\varphi+\mathfrak{f}^2{}_0} = \sum^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} \sin r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \tag{90}$$

k) $$D^n \log \frac{1}{\sqrt{1-2\mathfrak{f}\cos\varphi+\mathfrak{f}^2{}_0}} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} 1/r!\, \cos r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \tag{91}$$

l) $$D^n \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathfrak{f}\sin\varphi}{1-\mathfrak{f}\cos\varphi}\right)_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} \frac{1}{r!} \sin r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \tag{92}$$

m) **Bekanntlich ist**

$$D^r e^{ax}\cos bx = (a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} e^{ax}\cos\left(bx + r\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}\right)$$

$$D^a e^{ax}\sin bx = (a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} e^{ax}\sin\left(bx + r\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}\right)$$

Mit Hilfe der sich hieraus bestimmenden Nullwerte ergeben sich nach Mac Laurin's Satz die Entwicklungen

$$e^{ax}\cos bx = 1 + \sum_{r=1} \frac{1}{r!}(a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} \cos\left(r\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}\right)x^r$$

$$e^{ax}\sin bx = \sum_{r=1} \frac{1}{r!}(a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} \sin\left(s\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}\right)x^r$$

somit auch

$$D^n e^{a\mathfrak{f}}\cos b\mathfrak{f}_0 = \sum_{r=1} \frac{1}{r!}\,\overline{a^2+b^2}^{\frac{r}{2}} \cos\left(r\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}\right)\mathfrak{f}^{r_n} \tag{93}$$

$$D^n e^{a\mathfrak{f}}\sin b\mathfrak{f}_0 = \sum_{r=1} \frac{1}{r!}\,\overline{a^2+b^2}^{\frac{r}{2}} \sin\left(r\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}\right)\mathfrak{f}^{r_n} \tag{94}$$

Für $a = b = 1$ **folgt**

$$\overline{a^2+b^2}^{\frac{r}{2}} = 2^{\frac{r}{2}},\quad r\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a} = r\,\frac{\pi}{4}$$

ferner

$$\sqrt{2}\cos r\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 0 & r \equiv 2 \bmod 4 \\ (-1)^{\frac{r-1}{4}} & r \equiv 1 \bmod 4 \\ (-1)^{\frac{r+1}{4}} & r \equiv -1 \bmod 4 \end{cases}$$

$$= (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4}} \tag{95}$$

$$\sqrt{2}\sin r\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 0 & r \equiv 0 \mod 4 \\ (-1)^{\frac{r-2}{4}} & r \equiv 2 \mod 4 \\ (-1)^{\frac{r-1}{4}} & r \equiv 1 \mod 4 \\ (-1)^{\frac{r-3}{4}} & r \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

$$= (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4}} \tag{96}$$

Es ist daher

$$e^x \cos x = 1 + \sum_{r=1,3\,\ldots} (-1)^{\frac{r+(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} x^r \tag{97}$$

$$e^x \sin x = \sum_{r=1,3\,\ldots} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{2^r}{(2r)!} x^{2r}$$

$$+ \sum_{r=1} (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} x^r \tag{98}$$

Folglich

$$D^\mu e^{\cos \mathfrak{f}_0} = \sum_{r=1,3\,\ldots}^{\mu} (-1)^{\frac{r+(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} \mathfrak{f}^{r}_{\mu} \tag{99}$$

$$D^n e^{\mathfrak{f}} \sin \mathfrak{f}_0 = \sum_{r=1,3\ldots}^{\nu} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{2^r}{(2r)!} \mathfrak{f}^{2r}{}_n$$

$$+ \sum_{r=1,3\ldots}^{\mu} (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} \mathfrak{f}^{r}{}_n \qquad (100)$$

μ ist die grösste ungerade Zal $\leqq rq$

daher

$$\mu = 2 \left| \frac{\left|\frac{n}{q}\right| + 1}{2} \right| - 1$$

ν ist die grösste ungerade Zal $\leqq 2rq$

daher

$$\nu = 2 \left| \frac{\left|\frac{n}{2q}\right| + 1}{2} \right| - 1$$

17.

Summirung der Reihen.

$$\mathfrak{R}^{n}_{m,d} = a^d d^n + a^{m+d}\,\overline{m+d}^{\,n} + a^{2m+d}\,\overline{2m+d}^{\,n} + \ldots$$

$$\mathfrak{S}^{n,k}_{m,d} = a^d d^n + a^{m+d}\,\overline{m+d}^{\,n} \ldots$$

$$\ldots + a^{\overline{k-1}\,m+d}\,\overline{\overline{k-1}\,m+d}^{\,n} - \left(a^{km+d}\,\overline{km+d}^{\,n} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + a^{\overline{2k-1}\,m+d}\,\overline{\overline{2k-1}\,m+d}^{\,n}\right)$$

$$+ \left(a^{2km+d}\,\overline{2km+d}^{\,n} + \ldots + a^{\overline{3k-1}\,m+d}\,\overline{\overline{3k-1}\,m+d}^{\,n}\right) - + \ldots$$

A. Erstere Reihe kann durch n malige Differentiation der geometrischen Reihe

$$R(v) = \sum_{r=0} a^{mr+d} e^{(mr+d)v} = a^d e^{dv} \sum_{r=0} a^{mr} e^{mrv}$$

$$= a^d e^{dv} \frac{1}{1 - a^m e^{mv}}, \quad a^{2m} < 1$$

und schliessliche Nullsetzung der Veränderlichen v entstanden gedacht werden.

Es ist

$$D^n R(v)_0 = \overset{n}{\underset{m,\, d}{\mathfrak{N}}} \tag{101}$$

Durch eine kleine Umschreibung obiger Summe

$$R(v) = \frac{a^d e^{dv}}{1-a^m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a^m}{1-a^m}(e^{mv}-1)}$$

wird dieselbe von der Function

$$„\mathfrak{f}(v)“ = (e^{mv} - 1)\, e^{dv} \quad \text{(Siehe (e))}$$

abhängig und hiedurch der Behandlung durch die hier vorgetragene Methode zugänglich gemacht.

Letzterer Ausdruck lässt sich unter der Bedingung

$$\left| \frac{a^m}{1-a^m} \right| < 1$$

wieder in eine geometrische Reihe auflösen, durch deren n malige Differentiation ein zweiter Ausdruck

$$D^n R_0 = \frac{a^d}{1-a^m} \sum_{r=0}^{r=n} \left(\frac{a^m}{1-a^m}\right)^r D^n e^{dv} (e^{mv} - 1)^r{}_0 \tag{102}$$

$$= \frac{a^d}{1-a^m} \sum_{r=0}^{r=n} \left(\frac{a^m}{1-a^m}\right)^r \Big[\overline{mr+d}^{\,n} - \binom{r}{1} \overline{mr-1+d}^{\,n} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} \overline{m+d}^{\,n} + (-1)^r \binom{r}{r} d^n \Big] \dots$$

entsteht. Wird der in eckiger Klammer stehende Nullwert mit $\overset{r\,n}{\underset{m,\,d}{\Delta}}$ bezeichnet, so ergiebt sich durch Gleichstellung von (101) mit (102)

$$\mathop{\mathfrak{N}}\limits_{m,\,d}^{n} \quad \frac{a^d}{1-a^m} \sum_{r=0}^{r=n} \left(\frac{a^m}{1-a^m}\right)^r \mathop{A}\limits_{m,\,d}^{r,\,n} \tag{103}$$

Dieser Ausdruck, welcher bereits als Resultat gelten darf, kann jedoch noch in eine einfachere Form gebracht werden.

Wird nämlich derselbe durch a^d dividirt und durch Multiplication mit $(1-a^m)^{n+1}$ von Brüchen befreit, und $a^m = u$ gesetzt, so ist leicht einzusehen, dass dann geschrieben werden darf

$$\frac{1}{a^d} \mathop{\mathfrak{N}}\limits_{m,\,d}^{n} (1-u)^{n+1} = (1-u)^{n+1} \sum_{r=0} u^r (mr+d)^n$$

$$= \mathop{\mathfrak{L}_0}\limits^{n+1} + \mathop{\mathfrak{L}_1}\limits^{n+1} u + \mathop{\mathfrak{L}_2}\limits^{n+1} u^2 + \ldots + \mathop{\mathfrak{L}_n}\limits^{n+1} u_n \tag{104}$$

wo $\mathop{\mathfrak{L}_0}\limits^{n+1}$, $\mathop{\mathfrak{L}_1}\limits^{n+1} \ldots$ noch zu bestimmende, a nicht enthaltende Coefficienten bedeuten.

Beiderseits $p$mal in Bezug auf $a^m = u$ differentiirt, ergibt für $n = 0$ nach Abkürzung von $p!$

$$\mathop{\mathfrak{L}}\limits_{p,\,d}^{n+1} = \overline{mp+d}^{\,n} - \binom{n+1}{1} \overline{mp-1+d}^{\,n} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p \binom{n+1}{p-2} \overline{2m+d}^{\,n} + (-1)^{p+1} \binom{n+1}{p-1} \overline{m+d}^{\,p}$$

$$+ (-1)^p \binom{n+1}{p} d^n \tag{105}$$

$$\mathop{\mathfrak{L}}\limits_{o,\,d}^{n+1} = d^n$$

Folglich ist

$$\mathop{\mathfrak{N}}\limits_{m,\,d}^{n} = \frac{a^d}{(1-a^m)^{r+1}} \sum_{p=0}^{p=n} \mathop{\mathfrak{L}}\limits_{p,\,d}^{n+1} a^{mp} \tag{106}$$

Für ein $p > n$ muss dieser Ausdruck identisch verschwinden; denn die rechtsseitige Reihe in (104) enthält nur Potenzen mit Exponenten $\leqq n$, ein $p$maliges Differentiiren reducirt daher, wenn $p > n$ ist, die ganze rechte Seite auf null.

Da die Entwicklung unter den Bedingungen

$$|a^m| < 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{a^m}{1-a}\right| < \tfrac{1}{2}$$

geschah, so gelten beide Summenformeln (103) und (106) und für

$$| a^m | < \tfrac{1}{2}$$

Durch Vertauschung von a^m mit $-a^m$ ergiebt sich

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a^{mr+d} (mr+d)^n = \frac{a^d}{(1+a^m)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \overset{n+1}{\underset{p,\,d}{\mathfrak{L}}} a^{mp} \tag{107}$$

Specielle Fälle.

α) $m = 1$, $d = 0$

$$\overset{n}{\underset{1,1}{\mathfrak{R}}} = \sum_{r=1}^{r=\infty} a^r r^n = \frac{1}{(a-1)^{n+1}} \sum_{p=1}^{p=n} \overset{n+1}{\underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}} a^p = \frac{1}{1-a} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{r=n} \left(\frac{a}{1-a}\right)^r A_r \tag{108}$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r a^r r^n = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^p \overset{n+1}{\underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}} a^p$$

$$= \frac{1}{1+a} \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^r \left(\frac{a}{1+a}\right)^r A_r \tag{109}$$

$$\overset{n+1}{\underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}} = p^n - \binom{n+1}{1} \overline{p-1}^{\,n} + \binom{n+1}{2} \overline{p-2}^{\,n} \ldots +$$

$$\ldots + (-1)^{p+1} \binom{n+1}{p-1} 1^n$$

$$| a | < \tfrac{1}{2}$$

$$\overset{r,\,n}{\underset{1,\,0}{A}} \equiv A_r = r^n - \binom{r}{1} \overline{r-1}^{\,n} + \binom{r}{2} \overline{r-2}^{\,n} \ldots +$$

$$\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} 1^n = \overset{r}{\underset{n}{E}}$$

β) $m = 1$, $d = 1$ idenlisch mit dem vorigen.

γ) $m = 2$, $d = 1$

$$\overset{n}{\underset{1,1}{\mathfrak{R}}} = \sum^{r=\infty} \overline{a^{2r+1}}^{\,n} = \frac{a}{(1-a^2)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} \overset{n+1}{\underset{p,\,1}{\mathfrak{L}}} a^{2p}$$

$$= \frac{a}{1-a^2} \sum_{r=0}^{r=1} \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^r A_r \tag{110}$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a^{2r+1}\,\overline{2r+1}^{\,n} = \frac{a}{(1+a^2)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \overset{n+1}{\underset{p,\,1}{\mathfrak{L}}} a^{2p}$$

$$= \frac{a}{1+a^2} \sum_{r=0}^{r=1} (-1)^r \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^r A_r \qquad (111)$$

$$\overset{n+1}{\underset{p,\,1}{\mathfrak{L}}} = \overline{2p+1}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{2p-1}^{\,n} + \binom{n+1}{2}\overline{2p-3}^{\,n} \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p+1}\binom{n+1}{p-1} 3^n + (-1)^p \binom{n+1}{p} 1^n$$

$$\overset{r,\,n}{\underset{2,\,1}{A}} \equiv A_r = \overline{2r+1}^{\,n} - \binom{r}{1}\overline{2r-1}^{\,n} + \binom{r}{2}\overline{2r-3}^{\,n} \ldots +$$

$$\ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1} 3^n + (-1)^r \binom{r}{r} 1^n$$

$$|\,a\,| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Für $a = 1$ wird in (107) die Reihe linker Hand divergent, während der rechtsseitige Ausdruck einen endlichen Wert annimmt. Dieser Widerspruch ist nur ein scheinbarer.

Die Richtigkeit des ganzen Ableitungs-Verfahrens gründet sich auf der Zulässigkeit der wiederholten Differentiation einer converrenten Reihe, wenn das Resultat convergent ist, was hier nur bei einem

$$|\,a^m\,| < \tfrac{1}{2}$$

eintrifft.

Es mag von einigem historischen Interesse sein und bezeichnend für den damaligen Stand der Wissenschaft, dass ein Th. Clausen (Crelle J. VII, pag. 42, 1831) sich allen Ernstes bemühte, die sich aus den Formeln (109) und (110) für $a = 1$ ergebenden oscillirenden Reihen

$$1^n - 2^n + 3^n - + \ldots$$
$$1^n - 3^n + 5^n - + \ldots$$

zu summiren. Das von ihm eingeschlagene, sehr weitläufige, inductive Verfahren förderte Ausdrücke zu Tage, welche sich übrigens von den rechtsseitigen in (109) und (110) nur durch die Form unterscheiden.

Nach Gleichstellung der gleichwertigen Summen in (103) und (106), beiderseitiges Multipliciren mit $(1-a^m)^{n+1}$ und Dividiren durch

a^d findet sich durch Vergleich gleich hoher Potenzen von a die Relation

$$\underset{p,\,d}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} = A_p - \binom{n-p+2}{1} A_{p-1} + \binom{n-p+3}{2} A_{p-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p \binom{n+1}{p} A_0 \tag{112}$$

Aus der Summenformel für die unendliche Reihe $\underset{m,\,d}{\overset{n}{\mathfrak{R}}}$ lässt sich noch die Summe der endlichen Reihe

$$\mathfrak{R}_v = \sum_{r=0}^{r=v} a^{mr+d}\,\overline{mr+d}^n$$

ableiten. Es ist nach Formel (106)

$$\underset{m,\,d}{\overset{n}{\mathfrak{R}}} - \underset{m,\,m\overline{v+1}+d}{\overset{n}{\mathfrak{R}}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} a^{mr+d}\,\overline{mr+d}^n$$

$$- \sum_{r=0}^{r=\infty} a^{mr+m\overline{v+1}+d}\,\overline{mr+m(v+1)+d}^n$$

$$= \mathfrak{R}_0 = \frac{a^d}{(1-a^m)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} \left(\underset{p,\,d}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} - a^{m\overline{v+1}} \underset{p,\,m\overline{v+1}\,d}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} \right) a^{mp} \tag{113}$$

und nach Formel (103)

$$\mathfrak{R}_r = \frac{a^d}{1-a^m} \sum_{r=0}^{r=n} \left(\frac{a^m}{1-a^m}\right)^r \left(\underset{m,\,d}{\overset{r,\,n}{A}} - a^{m\overline{v+1}} \underset{m,\,m\overline{v+1}+d}{\overset{r,\,n}{A}} \right) \tag{114}$$

Dieselben Formeln entstehen, wenn der Ableitung die für jedes a giltige Summenformel für die endliche geometrische Reihe zu Grunde gelegt werden; die Giltigkeit ist daher eine unbegrenzte.

Für $a = 1$ werden die rechtsseitigen Summen nur scheinbar unbrauchbar; sie erscheinen in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, deren Wert sich auf bekannte Weise ermitteln lässt.

Wird in (113) $a^m = u$ gesetzt, Zäler und Nenner $n+1$ mal nach u differentiirt und schliesslich $u = 1$ gesetzt, so ist

$$\left.\frac{\mathfrak{R}_v}{a^d}\right\}_{a=1} = \sum_{r=0}^{r=v} \overline{mr+d}^{\,n} = (-1)^n \left[\binom{v+1}{n+1} \mathfrak{L}_0 + \binom{v+2}{n+1}\mathfrak{L}_1 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \binom{v+n+1}{n+1} \mathfrak{L}_n\right] \tag{115}$$

wo statt $\overset{n+1}{\underset{p,\,m\overline{v+1}+d}{\mathfrak{L}}}$ der Kürze wegen $\mathfrak{L}_p$ geschrieben wurde.

Ebenso findet sich

$$\sum_{r=0}^{r=v} (-1)^r a^{mr+d} \overline{mr+d}_n$$

$$= \frac{a^d}{(1+a^m)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\overset{n+1}{\underset{p,\,d}{\mathfrak{L}}} + (-1)^v a^{m\overline{v+1}} \right.$$

$$\left. \times \overset{n+1}{\underset{p,\,m\overline{v+1}+d}{\mathfrak{L}}} \right) a^{mp} \tag{116}$$

woraus für $a = 1$

$$\sum_{r=0}^{r=v} (-1)^r \overline{mr+d}^{\,n} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\overset{n+1}{\underset{p,\,d}{\mathfrak{L}}} + (-1)^v \overset{n+1}{\underset{p,\,m\overline{v+1}+d}{\mathfrak{L}}} \right) \tag{117}$$

Der Annahme $m = 1$, $d = 0$ entsprechen die einfachen Potenzreihen

$$\sum_{r=1}^{r=v} r^n = (-1)^n \left(\binom{v+1}{n+1} \overset{n+1}{\underset{0,\,0}{\mathfrak{L}}} + \binom{v+2}{n+1} \overset{n+1}{\underset{1,\,0}{\mathfrak{L}}} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \binom{v+n+1}{n+1} \overset{n+1}{\underset{n,\,0}{\mathfrak{L}}} \right) \tag{118}$$

$$\sum_{r=1}^{r=v} (-1)^r r^n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\overset{n+1}{\underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}} + (-1)^v \overset{n+1}{\underset{p,\,v+1}{\mathfrak{L}}} \right) \tag{119}$$

wo

$$\overset{n+1}{\underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}} = p^n - \binom{n+1}{1} \overline{p-1}^{\,n} \dots + (-1)^p \binom{n+1}{p-2} +$$

$$+ (-1)^{p+1} \binom{n+1}{p-1}$$

$$\overset{n+1}{\underset{p,\,v+1}{\mathfrak{L}}} = \overline{p+v+1}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{p+v}^{\,n} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{p-1}\binom{n+1}{p-1}\overline{v+2}^{\,n} + (-1)^{p}\binom{n+1}{p}\overline{v+1}^{\,n}$$

Endlich ist für $m = 2,\ d = 1$

$$\sum_{r=0}^{r=v} \overline{2r+1}^{\,n} = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=n} \binom{v-p+1}{n+1} \overset{n+1}{\underset{p,\,1}{\mathfrak{L}}} \tag{120}$$

(121)

$$\sum_{r=0}^{r=v} (-1)^r\, \overline{2r+1}^{\,n} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\overset{n+1}{\underset{p,1}{\mathfrak{L}}} + (-1)^v \overset{n+1}{\underset{p,2v+3}{\mathfrak{L}}} \right)$$

$$\overset{n+1}{\underset{p,1}{\mathfrak{L}}} = \overline{2p+1}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{2p-1}^{\,n} \dots + (-1)^{p-1}\binom{n+1}{p-1}3^n$$

$$+ (-1)^p \binom{n+1}{p} 1^n$$

$$\overset{n+1}{\underset{p,\,2v+3}{\mathfrak{L}}} = \overline{2p+2v+3}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{2p+2v+1}^{\,n} \dots$$

$$\dots + (-1)^{p-1}\binom{n+1}{p-1}\overline{2v+5}^{\,n} + (-1)^p\binom{n+1}{p}\overline{2v+3}^{\,n}$$

Für die Reihe in (118) besteht bereits eine einfache, Bernoulli-sche Zalen enthaltende Summenformel von D. Bernoulli; für jene in (121) hat der Verfasser mit Hilfe der Euler'schen Zalen eine ähnliche Formel angegeben („Ableitungen von Identitäten", Archiv II. R. T. X).

B. Wenn die Glieder der Reihe

$$\overset{n,\,p}{\underset{m,\,d}{\mathfrak{S}}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \sum_{t=0}^{t=k-1} (-1)^k a^{\overline{ks+tm+d}}\, \overline{ks+tm+d}^{\,n}$$

so zu Gruppen vereinigt werden, dass die Exponenten $ks+tm+d$ der Glieder einer und derselben Gruppe in Bezug auf den Modul km congruent sind, so ist

$$\overset{n,\,k}{\underset{m,\,d}{\mathfrak{S}}} = \sum_{h=0}^{h=k-1} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a^{\overline{rk+h}\,m+d}\, \overline{kr+hm+d}^{\,n}$$

Nun ist nach Formel (107) die zweite Summe, kr statt r und $mh+d$ statt d geschrieben:

$$-\frac{a^{km+d}}{(1+a^{km})^{n+1}}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p \mathfrak{L}_{p,hm+d}^{n+1} a^{kmp}$$

Da h die Werte von

$$h=0 \quad \text{bis} \quad h=k-1$$

und p jene von

$$p=0 \quad \text{bis} \quad p=n$$

zu durchlaufen hat, so entsteht aus dem Exponenten $kmp+hm+d$ dieselbe Zalenreihe wie aus $d+q.m$, wenn q die Werte von

$$q=0 \quad \text{bis} \quad q=k(n+1)-1$$

annimmt.

Wird das Ergebniss nach aufsteigenden Potenzen von a geordnet, so erhält irgend eine Potenz a^{mq+d} einen Coefficienten $\mathfrak{L}_{p,\,hm+d}^{n+1}$. Um p und h aus q zu bestimmen, genügt die Bemerkung, dass

$$mq+d=kmp+hm+d$$

sein muss, woraus

$$kp+h=q$$

folgt. Da h nie grösser als $k-1$ werden kann, so ist offenbar

$$p=\left|\frac{q}{k}\right|$$

d. h. gleich der grössten im Bruche $\frac{q}{k}$ enthaltenen ganzen Zal; hieraus bestimmt sich

$$h=q-k\left|\frac{q}{k}\right|$$

Es ist daher

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{S}_{m,d}^{n,k}=\frac{a^d}{(1+a^{km})^{n+1}}\sum_{q=0}^{q=k\overline{n+1}-1}(-1)^p\,\mathfrak{L}_{p,\,hm+d}^{n+1}\,a^{mq}\\ p=\left|\frac{q}{k}\right|\\ h=q-k\left|\frac{q}{k}\right|\\ |a^m|<\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} \quad (122)$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{n+1}{\underset{p,\,hm+d}{\mathfrak{L}}} &= \overline{mp+h+d}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{m\,p+h-1+d}^{\,n} + \dots \\ &\dots + (-1)^{p+1}\binom{n+1}{p-1}\overline{m\,h+1+d}^{\,n} \\ &+ (-1)^p\binom{n+1}{p}\overline{hm+d}^{\,n}\end{aligned}\right\} \quad (122')$$

Für $m = 1$ und $d = 0$ ist

$$\left.\begin{aligned}&\overset{n,\,k}{\underset{1,\,0}{\mathfrak{S}}}\ (a\,1^n + \dots + a^{k-1}\overline{k-1}^{\,n}) - (a^k k^n + \dots + a^{2k-1}\,\overline{2k-1}^{\,n}) \\ &+ (a^{2k}\,\overline{2k}^{\,n} + \dots + a^{3k-1}\overline{3k-1}^{\,n}) - \dots \\ &= \frac{1}{(1+a^k)^{n+1}} \sum_{q=0}^{q=k-1} (-1)^p \overset{n+1}{\underset{p,\,h}{\mathfrak{L}}}\ a^p \\ &\qquad p = \left|\frac{q}{k}\right| \\ &\qquad h = q - k\left|\frac{q}{k}\right| \\ &\qquad |a| < \tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

$$\overset{n+1}{\underset{p,\,h}{\mathfrak{L}}} = \overline{kp+h}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{k\,p-1+h}^{\,n} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{p+1}\binom{n+1}{p-1}\overline{k+h}^{\,n} + (-1)^p\binom{a+1}{p} h^n$$

Für $n = 0$ ergiebt sich als Summe

$$\overset{0,\,k}{\underset{1,\,0}{\mathfrak{S}}} = \frac{1}{1+a^k}\,\frac{1-a^k}{1-a}$$

18.

Summirung einiger von der Exponentiellen-Reihe ableitbaren Reihen.

a) $\overset{n}{\underset{m,\,d}{\mathfrak{T}}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r!} a^{mr+d}\,\overline{mr+d}^{\,n}$

Wenn in der Reihe der Exponentiellen das Argument wieder durch eine Exponentielle ersetzt wird, so entsteht

$$z = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r!} a^{mr+d} e^{(mr+d)x} = a^d e^{dx} e^{a^m e^{mx}}$$

$$= a^d e^{dx} e^{a^m(e^{mx}-1)+a^m}$$

$$= a^d e^{a^m} e^{dx} e^{a^m(e^{mx}-1)}$$

$$= a^d e^{a^m} e^{dx} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{p!} a^{mp} (e^{mx}-1)^p$$

hiemit ist die vorgelegte Function wieder von einer Function

$$„(x)“ = e^{mx} - 1$$

abhängig gemacht

Durch n malige Differentiation des ersten und letzten Ausdruckes und Nullsetzung des Argumentes entsteht

$$\mathfrak{T}_{m,\,d}^{n} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r!} a^{mr+d}\, \overline{mr+d}^{\,n} =$$

$$= a^d e^{a^m} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} a^{mp} \overset{p,\,n}{\underset{m,\,d}{A}} \tag{124}$$

$$\overset{p,\,n}{\underset{m,\,d}{A}} = \overline{mp+d}^{\,n} - \binom{p}{1} \overline{mp-1+d}^{\,n} + \binom{p}{2} \overline{mp-2+d}^{\,n} - \ldots$$

$$+ (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} \overline{m+d}^{\,n} + (-1)^p \binom{p}{p} d^n$$

es ist der bereits in der Formel (102) erschienene Coefficient.

Diese Summenformel gilt für jedes a.

Ebenso findet sich

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{r!} a^{mr+d}\, \overline{mr+d}^{\,n} = a^d e^{-a^m} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p}{p!} a^{mp} \overset{p,\,n}{\underset{m,\,d}{A}} \tag{125}$$

woraus für $m = 1$ und $d = 0$ hervorgeht

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r!} a^r r^n = e^a \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!} a^p \overset{p}{\underset{n}{E}} \tag{126}$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{r!} a_r r^n = e^a \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p}{p!} a^p \overset{p}{\underset{n}{E}} \qquad (127)$$

$$\Delta^{p,n}_{1,0} = \overset{p}{\underset{n}{E}} = p^n - \binom{p}{1}\overline{p-1}^{\,n} + \binom{p}{2}\overline{p-2}^{\,n} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} 1^n$$

$$\overset{1}{\underset{n}{E}} = 1 \qquad \overset{n}{\underset{n}{E}} = n!$$

Letztere Reihe verschwindet für gewisse Werte von a, welche sich durch Auflösung der Gleichung

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p}{p!} a^{p-1} \overset{p}{\underset{n}{E}} = 0$$

ergeben. So ist

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{(r-1)!} r = 0, \qquad \sum_{p=1}^{p=3} \frac{(-1)^p}{p!} a^{p-1} \overset{p}{\underset{n}{E}} = 0$$

für

$$a = a_0 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

daher

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r a_0^{\,r} r^3}{(r-1)!} = 0$$

Die Kenntniss solcher Reihen, deren Summen sich besonders einfach wiedergeben, ist dann von einigem Nutzen, wenn es sich darum handelt schwachconvergirende Reihen stärker convergirend zu machen, was durch Verknüpfung mit passend gewälten erstbekannten Reihen meist erzielt werden kann.

b) Aus der Exponentiellen-Reihe werden mit Hilfe der Einheitswurzeln von J. von Villarceau (C. R. LXXXVI) die sogenannten „höheren hyperbolischen und elliptischen Sinusse"

$$s_\mu(y) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{y^{\mu+hr}}{(\mu+hr)!} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{k=h} \frac{e^{\alpha^k y}}{\alpha^{\mu k}}, \quad \alpha = e^{2\frac{\pi}{h} i} \qquad (128)$$

$$\psi_\mu(y) = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{y^{\mu+hr}}{(\mu+hr)!} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{k=h-1} \frac{e^{\eta^{2k+1}y}}{\eta^{(2k+1)\mu}}$$

$$\eta = e^{\frac{\pi}{h}i} \qquad (129)$$

abgeleitet (Vergl. auch Dr. J. C. Kapteyn und Dr. W. Kapteyn „Die höheren Sinus" Sitzg. Ber. d. Akad. d. Wiss. Wien, XCIII. Bnd. II. Abth. Aprilheft 1886), aus welchen durch Multiplication mit $a^d e^{dx}$ und mittelst der Einsetzung

$$y = a^m e^{mx}$$

und Abhängigmachung von $(e^{mx}-1)$, ferner durch wiederholte Differentiation und schliessliche Nullsetzung der Veränderlichen die Summen neuer Reihen hervorgehen.

Es ist

$$a^d e^{dx} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(a e^x)^{(\mu+hr)m}}{(\mu+hr)!} = a^{\mu m+d} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{a^{hrm} e^{x(hrm+\mu m+d)}}{(\mu+hr)!}$$

$$= \frac{1}{h} a^d \sum_{k=1}^{k=h} \frac{e^{\alpha^k a^m}}{\alpha^{\mu k}} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{j!} \alpha^{jk} a^{jm} e^{dx} (e^{mx}-1)^j;$$

$$a^d e^{dx} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{(a e^x)^{(\mu+hr)m}}{(\mu+hr)!} = a^{m\mu+d} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{a^{hmr} e^{x(hmr+\mu m+d)}}{(\mu+hr)!} =$$

$$= \frac{1}{h} a^d \sum_{k=0}^{k=h-1} \frac{e^{\eta^{2k+1} a^m}}{\eta^{2k+1}\cdot^\mu} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{j!} \eta^{2k+1j} a^{jm} e^{dx} (e^{mx}-1)^j$$

die complexen Glieder zusammenfassend, ist ferner

$$e^{\alpha^k a^m} \alpha^{k(j-\mu)} = e^{a^m \cos 2k\frac{\pi}{h}} \left(\cos\left(\overline{j-\mu}\, 2k\frac{\pi}{h} + a^m \sin 2k\frac{\pi}{h}\right) + i \sin\left(\overline{j-\mu}\, 2k\frac{\pi}{h} + a^m \sin 2k\frac{\pi}{h}\right)\right)$$

$$r^{2k+1} a^{am\,\eta^{\overline{2k+1}\;\overline{j-\mu}}} = e^{a^m \cos \overline{2k+1}\frac{\pi}{h}}$$

$$\left(\cos\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\;\frac{\pi}{h} + a^m \sin \overline{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right)\right.$$

$$\left.+ i \sin\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\;\frac{\pi}{h} + a^m \sin \overline{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right)\right)$$

Schliesslich ist nach n maliger Differentiation und Nullsetzung des x

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} a^{\overline{hr+\mu}.m+d}\,\frac{\overline{\overline{hr+\mu}.m+d}^{\,n}}{(\mu+hr)!} =$$

$$= \frac{a^d}{h} \sum_{k=1}^{k=h} e^{a^m \cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^{jm}}{j!} \cos\left(\overline{j-m}\; 2k\frac{\pi}{h} + a^m \sin 2k\frac{\pi}{h}\right) \times$$

$$\times \mathop{A}_{m,d}^{j,n} \tag{130}$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a^{\overline{hr+\mu}\,m+d}\,\frac{\overline{\overline{hr+\mu}.m+d}^{\,n}}{(\mu+hr)!} =$$

$$= \frac{a^d}{h} \sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a^m \cos \overline{2k+1}\frac{\pi}{h}} \sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^{jm}}{j!} \cos\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right.$$

$$\left. + a^m \sin \overline{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right) \mathop{A}_{m,d}^{j,n} \tag{131}$$

Aus dem notwendigen Verschwinden des Imaginären entspringen die Identitäten

$$\sum_{k=1}^{k=h} e^{a^m \cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^{jm}}{j!} \sin\left(\overline{j-\mu}\; 2k\frac{\pi}{h} + a^m \sin 2k\frac{\pi}{h}\right) \times$$

$$\times \mathop{A}_{m,d}^{j,n} = 0 \tag{130'}$$

$$\sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a^m \cos \overline{2k+1}\frac{\pi}{h}} \sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^{jm}}{j!} \sin\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\,\frac{\pi}{h} + a^m \sin \overline{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right)$$

$$\times \mathop{A}_{m,d}^{j,n} = 0 \tag{131'}$$

Für $m = 1$ und $d = 0$ ist

$$\overset{j,\,n}{\underset{1,\,0}{A}} = E_n^j$$

und

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{a^{hr+\mu}\,\overline{hr+\mu}^{\,n-1}}{(hr+\mu-1)!} =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{k=h} e^{a\cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!}\cos\left(\overline{j-\mu}\; 2k\frac{\pi}{h} + a\sin 2k\frac{\pi}{h}\right) E_n^j \quad (132)$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{a^{hr+\mu}\,\overline{hr+\mu}^{\,n-1}}{(kr+\mu-1)!} =$$

$$\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a\cos \overline{2k+1}\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!}\cos\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\frac{\pi}{h}\right.$$

$$\left. + \, a\sin \overline{2k+1}\frac{\pi}{h}\right) E_n^j \quad (133)$$

$$\sum_{k=1}^{k=h} e^{a\cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!}\sin\left(\overline{j-\mu}\; 2k\frac{\pi}{h} + a\sin 2k\frac{\pi}{h}\right) E_n^j = 0 \quad (134)$$

$$\sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a\cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!}\sin\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\frac{\pi}{h} + a\sin \overline{2k+1}\frac{\pi}{h}\right) \times$$

$$\times E_n^j = 0 \quad (135)$$

Sämtliche Formeln gelten für j e d e s a.

Für $h = 2$, $\mu = 0, 1$ gehen aus (128) und (129) die Reihen für die „hyperbolischen und elliptischen Cosinus und Sinus“ hervor; die Summen der daraus abgeleiteten Reihen finden sich aus (132) und (133).

α) $\mu = 0$, hyperbolischer Cosinus; (132)

$$\sum_{r=1}^{r=x} \frac{\overline{2r}^{n-1}}{(2r-1)!}\, a^{2r} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \left(e^a + (-1)^j e^{-a}\right) \overset{j}{\underset{n}{E}} \tag{136}$$

β) $\mu = 0$, elliptischer Cosinus; (133)

$$\sum_{r=1}^{r=x} \frac{\overline{2r}^{n-2}}{(2r-1!}\, a^{2r} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \cos\left(a - j\frac{\pi}{2}\right) \overset{j}{\underset{n}{E}} \tag{137}$$

γ) $\mu = 1$, hyperbolischer Sinus; (132)

$$\sum_{r=0}^{r=x} \frac{\overline{2r+1}^{n-1}}{(2r)!}\, a^{2r+1} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \left(e^a + (-1)^{j-1} e^{-a}\right) \overset{j}{\underset{n}{E}} \tag{138}$$

δ) elliptischer Sinus; (133)

$$\sum_{r=0}^{r=x} (-1)^r \frac{\overline{2r+1}^{n-1}}{2r)!}\, a^{2r+1} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \cos\left(a - \frac{j-1}{2}\pi\right) \overset{j}{\underset{n}{E}} \tag{139}$$

c) $$\underset{m,\,d}{\overset{n,\,k}{\Pi}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \sum_{t=0}^{t=k-1} (-1)^s \frac{\overline{\overline{ks+t\,.\,m+d}}^{\,n}}{(ks+t)!}\, a^{ks+t\,m+d}$$

Werden die Glieder so zu Gruppen vereinigt, dass die Exponenten einer und derselben Gruppe bezüglich des Moduls km convergent sind, so kommt

$$\underset{m,\,d}{\overset{n,\,k}{\Pi}} = \sum_{h=0}^{h=k-1} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{\overline{\overline{kr+h\,m+d}}^{\,n}}{(kr+h)!}\, a^{\overline{kr+h}\,m+d}$$

Die Summe der unter dem zweiten Summenzeichen stehenden Reihe geht aus der hiefür bereits gefundenen Formel (131) hervor, wenn k statt h, h statt μ und g statt k geschrieben wird; es ist dann

$$\underset{m,\,d}{\overset{n,\,k}{\Pi}} = \frac{a^d}{k} \sum_{h=0}^{h=k-1} \sum_{g=0}^{g=k-1} c^{a^m \cos \overline{2g+1}\frac{\pi}{k}} \times$$

$$\sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^{jm}}{j!} \cos\left(\overline{j-h}\;\overline{2g+1}\,\frac{\pi}{k} + a^m \sin \overline{2g+1}\,\frac{\pi}{k}\right) \overset{j,\,n}{\underset{m,\,d}{A}} \tag{140}$$

woraus für $m=1$, $d=0$, wenn noch $n+1$ statt n gesetzt wird, folgt

$$\overset{n+1,\,k}{\underset{1,\,0}{\mathfrak{U}}} = \frac{1}{k}\sum_{h=0}^{h=k-1}\sum_{g=0}^{g=k-1} e^{a\cos\overline{2g+1}\,\frac{\pi}{k}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{j=n+1}\frac{a^j}{j!}\cos\left(\overline{j-h}\,\overline{2g\times 1}\,\frac{\pi}{k}+a\sin\overline{2g+1}\,\frac{\pi}{k}\right)\overset{j}{\underset{n}{E}} \qquad (141)$$

Brünn, Mai 1891.

III.

Arithmetische Entwicklungen.

Von

Franz Rogel.

Der Staudt'sche Satz

$$(-1)^n B_n = A_n + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{g} \tag{1}$$

wo A_n eine ganze Zal und $a, b, \ldots g$ Primzalen von der Eigenschaft sind, dass $\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}, \ldots \frac{g-1}{2}$ Teiler von n sind, gestattet die Umformung von die Bernoulli'schen Zalen B_n als Coefficienten enthaltende Reihen in solchel, bei welchen die Stellenvariabele eine Primzal ist.

1.

$$u = \frac{v}{e^v - 1}$$

$$= 1 - \frac{v}{2} + \sum_{r=1} (-1)^{r-1} B_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} \quad -2\pi < v < +2\pi$$

Ersetzt man $(-1)^{r-1} B_r$ durch obigen Ausdruck (1), so ist

$$u = 1 - \frac{v}{2} - (A_1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) \frac{v^2}{2!} - (A_2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}) \frac{v^4}{4!}$$

$$-(A_3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7}) \frac{v^6}{6!} - \ldots$$

Ordnet man diese Reihe nach den ganzen Zalen A, sowie nach den

aufeinanderfolgenden reciproken Primzalen $\frac{1}{p}$, so wird, da dieselbe nur in den Coefficienten der Potenzen $v^{m(p-1)}$ als Summand erscheint, wenn

$$\sum_{m=1} \frac{v^{m(p-1)}}{[m(p-1)]!} = V_{p-1}$$

gesetzt wird

$$u = 1 - \frac{v}{2} - \sum_{r=1}^{\infty} A_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) V_2 - \tfrac{1}{5} V_4 - \tfrac{1}{7} V_6 \ldots \tag{2}$$

Nun ist

$$V_2 = \frac{e^v + e^{-v}}{2} - 1 = \mathrm{Cof}\, v - 1$$

ferner

$$V_p = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} e^{v e^{\frac{2k\pi}{p-1} i}} - 1$$

$$= \frac{2}{p-1} \left[\mathrm{Cof}\, v + \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} e^{v \cos \frac{2k\pi}{p-1}} \cos\left(v \sin \frac{2k\pi}{p-1}\right) \right] - 1$$

daher

$$2 \mathrm{Cof}\, v \,.\, \sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} + \sum_{p=3} \frac{1}{p} \left[\frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} e^{v \cos \frac{2k\pi}{p-1}} \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(v \sin \frac{2k\pi}{p-1}\right) - 1 \right]$$

$$= \tfrac{3}{2} - \frac{v}{2} - \frac{v}{e^v - 1} - \tfrac{1}{2} \mathrm{Cof}\, v - \sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} \tag{3}$$

Wird iv für v genommen, so ist wegen

$$\mathrm{Cof}\, iv = \cos v$$

$$e^{iv \cos \frac{2k\pi}{p-1}} \cos\left(iv \sin \frac{2k\pi}{p-1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\cos\left(v \cos \frac{2k\pi}{p-1}\right) + i \sin\left(v \cos \frac{2k\pi}{p-1}\right) \right] \times$$

$$\times \left(e^{v \sin \frac{2k\pi}{p-1}} + e^{-v \sin \frac{2k\pi}{p-1}} \right)$$

$$\frac{iv}{e^{iv}-1} = \frac{v}{2}\cot\frac{v}{2} - \frac{iv}{2}$$

$$\cos v \,.\, \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{(p-1)p} + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \cos\left(v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(v\sin\frac{2k\pi}{p-1}\right) - 1\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} - \frac{v}{2}\cot\frac{v}{2} - \tfrac{1}{2}\cos v - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r A_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} \qquad (4)$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass die imaginären Bestandteile identisch verschwinden müssen.

2.

Auf dieselbe Weise mit

$$2\log\frac{iv}{2\sin\frac{iv}{2}} = \sum_{r=1} (-1)^r \frac{B_r v^{2r}}{r(2r)!} \qquad -2\pi < v < +2\pi$$

verfahren, erhält man

$$2\log\frac{iv}{2\sin\frac{iv}{2}} = \tfrac{1}{2}Z_2 + \sum_{p=3}^{\infty}\frac{1}{p} Z_{p-1} + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \frac{v^{2r}}{r(2r)!}$$

wo

$$Z_{p-1} = \sum_{m=1} \frac{v^{m(p-1)}}{m\,\frac{p-1}{2}\,[m(p-1)]!}$$

sich in endlicher Form durch

$$Z_2 = \varphi(v) = \sum_{m=1} \frac{v^{2m}}{m(2m)!}$$

ausdrücken lässt. Es ist nämlich

$$Z_{p-1} = \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(v\, e^{\frac{2k\pi}{p-1}i}\right)$$

oder, weil der imaginäre Bestandteil identisch verschwinden muss, nach

$$= \frac{2}{p-1}\,\Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(v\,e^{\frac{2k\pi}{p-1}i}\right)$$

wo das Symbol $\Re$ anzeigt, dass nur der reelle Teil zu nehmen ist.

Mithin ist

$$\sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{(p-1)p}\,\Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(v\,e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\varphi(v) - \log\frac{2\sin\frac{v}{2}}{v} - \tfrac{1}{2}\sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r}}{r(2r)!} \tag{5}$$

und iv für v gesetzt

$$\sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{(p-1)p}\,\Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(iv\,e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\varphi(iv) - \log\frac{2\sin\frac{v}{2}}{v} - \tfrac{1}{2}\sum (-1)^r A_r \frac{v^{2r}}{r(2r)!} \tag{6}$$

Die Function φ hängt mit dem Integralcosinus in einfacher Weise zusammen; es ist

$$\varphi(z) = \tfrac{1}{2}\Re\{-Ct(iz) - K - \log iz\},\quad K = 0{,}577\ldots$$

Durch Differentiation der Gleichungen (3), (4), (5) und (6) entstehen die nachfolgenden

$$2\sin v \sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} + \sum_{p=3} \frac{1}{p}\left[\frac{2}{p-1}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} e^{v\cos\frac{2k\pi}{p-1}} \times\right.$$

$$\left.\times \cos\left(v\sin\frac{2k\pi}{p-1} + \frac{2k\pi}{p-1}\right)\right] = -\tfrac{1}{2} - \frac{e^v - v\,e^v - v}{(e^v-1)^2} - \tfrac{1}{2}\sin v$$

$$-\sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \tag{3'}$$

$$-2\sin v \sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} + \sum_{p=3} \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}}\left(e^{v\sin\frac{2k\pi}{p-1}} \times \right.\right.$$

$$\times \sin\left(\frac{2k\pi}{p-1} - v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right)$$

$$\left.\left. -e^{-v\sin\frac{2k\pi}{p-1}} \sin\left(\frac{2k\pi}{p-1} + v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right)\right)\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cot\frac{v}{2} + \frac{v}{4}\left(1+\cot^2\frac{v}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\sin v - \sum_{r=1} (-1)^r A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \quad (4')$$

$$\sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)}\, \Re \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{p-1}} \varphi'\left(v\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\varphi'(v) + \frac{2}{v} - 2\frac{e^v+e^{-v}}{e^v-e^{-v}} - \tfrac{1}{2}\sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \quad (5')$$

$$\sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)}\, \Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} i\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}} \varphi'\left(iv\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}i\varphi'(iv) - 2\cot v + \frac{2}{v} - \tfrac{1}{2}\sum_{r=1} (-1)^r A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \quad (6')$$

Die ganzen Zalen A_r bestimmen sich durch die Gleichung (1) aus den Bernoulli'schen Zalen und aus den in ihren Nennern enthaltenen Primzalen; sie können mit derselben Berechtigung als Coefficienten verwendet werden als die Bernoulli'schen Zalen, aus denen sie hervorgiengen.

Zur recursiven Berechnung dieser Grössen gab Hermite („Extrait d'une lettre de M. Hermite á M. Borchardt" Crelle J. LXXXI pag. 93) die die Kenntniss der Bernoulli'schen Zalen nicht erfordernde Relation

$$\binom{2n+1}{2}A_1 + \binom{2n+1}{4}A_2 + \ldots + \binom{2n+1}{2n}A_n$$

$$= 1 - n - 2^{2n-1} - S_3 - S_5 \ldots - S_p \quad (7)$$

worin

$$S_p = \frac{1}{p}\left[\binom{2n+1}{p-1} + \binom{2n+1}{2p-2} + \binom{2n+1}{3p-3} + \ldots\right]$$

und die Summen S_3, S_5, ... S_p sich auf alle Primzalen p von 3 bis $2n+1$ beziehen.

Hermite bewies mit Hilfe von Einheitswurzeln, dass S_p für jede Primzal p eine ganze Zal ist.

Ein anderer Beweis kann mittelst eines rein zalentheoretischen Hilfsmittels — des Fermat'schen Satzes — geführt werden.

Es stellt sich hiebei heraus, dass obiger Satz nur für ungerade Primzalen gilt.

Für jede Primzal p und jedes durch p nicht teilbare x ist

$$x^{m(p-1)+q} \equiv x^q \mod p \quad 0 \leq q < p$$

es kann daher gesetzt werden

$$(x+z)^{2n+1} = \sum_{m=0}^{m=2n+1} \binom{2n+1}{m} x^m z^{2n-m+1}$$

$$\equiv \left[\binom{2n+1}{0} z^{2n+1} + \binom{2n+1}{p-1} z^{2n-p+2} + \ldots\right] x^0$$

$$+ \left[\binom{2n+1}{1} z^{2n} + \binom{2n+1}{p} z^{2n-p+1} + \ldots\right] x^1$$

$$+ \left[\binom{2n+1}{2} z^{2n-1} + \binom{2n+1}{p+1} z^{2n-p} + \ldots\right] x^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left[\binom{2n+1}{t} z^{2n-t+1} + \binom{2n+1}{p+t-1} z^{2n-p-t+2} , \ldots\right] x^t$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\binom{2n+1}{p-2} z^{2n-p+3} + \binom{2n+1}{2p-3} z^{2n-2p+4} + \ldots\right] x^{p-2} \mod p \qquad (8)$$

Sei ferner

$$2n+1 \equiv r \mod p-1, \quad 1 \leq r < p-1$$

so ist unter der Voraussetzung, dass nebst x auch $x+z$ durch p nicht teilbar ist,

$$x+z)^{2n+1} \equiv (x+z)^r \equiv \sum_{s=0}^{s=r} \binom{r}{s} x^s z^{r-s} \mod p \qquad (9)$$

Der Vergleich der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in (8 und (9) ergiebt die Congruenzen

$$\binom{2n+1}{0} z^{2n+1} + \binom{2n+1}{p-1} z^{2n-p+2} + \ldots \equiv \binom{r}{0} z^r \mod p$$

$$\binom{2n+1}{1} z^{2n} + \binom{2n+1}{p} z^{2n-p+1} + \ldots \equiv \binom{r}{1} z^{r-1} \mod p$$

$$\binom{2n+1}{2} z^{2n-1} + \binom{2n+1}{p+1} z^{2n-p} + \ldots \equiv \binom{r}{2} z^{r-2} \mod p$$

. . . .

$$\binom{2n+1}{t} z^{2n-t+1} + \binom{2n+1}{p+t-1} z^{2n-p-t+2} + \ldots \equiv \binom{r}{t} z^{r-t} \mod p$$

. . . .

$$\binom{2n+1}{r} z^{2n-r+1} + \binom{2n+1}{p+r-1} z^{2n-p-r+2} + \ldots \equiv \binom{r}{r} z^0 \mod p \qquad (10)$$

Aus der ersten Congruenz dieses Systems geht für $z = 1$ unmittelbar der angezogene Satz hervor, dass S_p eine ganze Zal ist. Hiebei wird aber vorausgesetzt, dass

$$x \text{ und } x + z = x + 1$$

durch p nicht teilbar sind.

Nun ist entweder x oder $x+1$ durch die einzige gerade Primzal 2 teilbar.

Der Hermite'sche Satz gilt daher nur für ungerade Primzalen.

Hermite erweiterte seinen Satz und construirte die neue zalentheoretische Function

$$\mathfrak{S}_p = \frac{z^{2n+1}}{p}\left[\frac{\binom{2n+1}{p-1}}{z^{p-1}} + \frac{\binom{2n+1}{2p-2}}{z^{2p-2}} + \frac{\binom{2n+1}{3p-3}}{z^{3p-3}} + \ldots\right] \qquad (11)$$

von welcher er, ohne sich in einen Beweis einzulassen, behauptet, dass sie für jede Primzal p eine ganze Zal sein müsse.

Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellt aus der ersten Congruenz des Systemes (10).

Da nämlich

$$z^r \equiv z^{2n+1} \mod p$$

gesetzt und dann z^{2n+1} herausgehoben werden kann, so ist tatsächlich

$$z^{2n+1}\left[\frac{\binom{2n+1}{p-1}}{z^{p-1}} + \frac{\binom{2n+1}{2p-2}}{z^{2p-2}} + \ldots\right] \equiv \mathfrak{S}_p \equiv 0 \mod p$$

In dem genannten Systeme ist dieser Satz nur als specieller Fall enthalten.

Eine allgemeinere Function kann aus der die beliebige Grösse t enthaltenden Congruenz des Systemes (10) abgeleitet werden, wenn man beiderseits mit z^t multiplicirt, z^r durch das congruente z^{2n+1} ersetzt, sodann auf die linke Seite schafft und schliesslich z^{2n+1} heraushebt; es ist dann die neue Function

$$\mathfrak{S}_p = \frac{z^{2n+1}}{p}\left[\binom{2n+1}{t} - \binom{r}{t} + \frac{\binom{2n+1}{p+t-1}}{z^{p-1}} + \frac{\binom{2n+1}{2p+t-2}}{z^{2p-2}} + \ldots\right]$$
$$t < p-1 \qquad (12)$$

eine Summe, welche für jede Primzal p und jedes ganze z eine ganze Zal ist.

Diese Function zeichnet sich vor der Hermite'schen $\mathfrak{S}_p$ dadurch aus, dass sie eine neue zwischen 0 und r liegende Veränderliche t enthält.

Für $t = 0$ geht dieselbe in $\mathfrak{S}_p$ über. Uebersteigt t die Grösse r, so verschwindet $\binom{r}{t}$ und damit das einzige r enthaltende Glied.

Wenn $p = 2$ angenommen wird, so ist

$$r = 1, \quad z^{2n+1} \equiv z^1 \bmod 2$$

der verallgemeinerte Satz behält seine Richtigkeit für $t = 1$, er ist dann nur eine Umschreibung der selbstverständlichen Congruenz

$$(z+1)^{2n+1} - z^{2n+1} \equiv 1 \bmod 2$$

und lautet mit Weglassung der durch 2 teilbaren Glieder

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{z^{2n+1}}{2}\left[\frac{\binom{2n+1}{2}}{z} + \frac{\binom{2n+1}{3}}{z^2} + \ldots\right] \qquad (13)$$

Brünn, Juli 1891.

IV.

Das Tetraeder bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen.

Von

R. Hoppe.

---

§ 1. Die Coordinaten eines beliebigen Punkts P in Bezug auf beliebige rechtwinklige Axen seien x, y, z, die der Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 des Tetraeders T mögen durch dieselben Indices 1, 2, 3, 4 bezeichnet sein. P liege innerhalb T. Wir ziehen durch P die Tetraedertransversale $A_1 B_1$, dann durch B_1 die Dreieckstransversale $A_2 B_2$. Diese 2 Transversalen und die Kante $A_3 A_4$ seien bzhw. durch die Punkte P, B_1, B_2 (von den Ecken ausgehend) in den Verhältnissen $u:(1-u)$, $v:(1-v)$, $w:(1-w)$ geteilt. Die gleichen Verhältnisse gelten auch von den Teilen ihrer Projectionen auf die Axe: sind also x_1', x_2' die Abscissen von B_1, B_2, so hat man:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_1' - x_1)u \\ x_1' &= x_2 + (x_2' - x_2)v \\ x_2' &= x_3 + (x_8 - x_5)w \end{aligned}$$

oder nach Elimination von x_1' und x_2':

$$x = x_1(1-u) + x_2 u(1-v) + x_3 uv(1-w) + x_4 uvw \qquad (1)$$

Sofern die x Axe eine willkürliche Gerade ist, reicht diese Abscissenrelation allein zur Bestimmung des Punktes P aus und enthält speciell die analogen Relationen der y und z in sich.

Wie leicht zu sehen, haben die neuen Variabeln u, v, w unabhängig von einander das gleiche Intervall von 0 bis 1 zu durchlaufen, damit P das ganze Tetraeder erzeugt.

Die Functionsdeterminante $\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} \right|$ ergibt den Wert

$$6Tu^2v$$

daher ist das Körperelement

$$\partial T = 6Tu^2v\,\partial u\,\partial v\,\partial w \tag{2}$$

Hieraus findet man durch viele, aber sehr leichte Integrationen:

$$\int x\,\partial T = \frac{T}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \tag{3}$$

$$\int xy\,\partial T = \frac{T}{20}\{(x_1+x_2+x_3+x_6)(y_1+y_2+y_3+y_4) \\ +x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_1y_4\} \tag{4}$$

$$\int x^2\partial T = \frac{T}{20}\{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\} \tag{5}$$

Gl. (3) ergibt zunächst die Bedingung dafür, dass der Anfangspunkt Schwerpunkt des homogenen Tetraeders ist, nämlich die 3 analogen Gleichungen:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0;\quad \text{etc.} \tag{6}$$

Unter eben dieser Voraussetzung werden die Gl. (4) (5); deren jede 3 analoge vertritt:

$$\int xy\,\partial T = \frac{T}{20}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4);\quad \text{etc.} \tag{7}$$

$$\int x^2\partial T = \frac{T}{20}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2);\quad \text{etc.} \tag{8}$$

Jetzt sind ausser Gl. (6) die 3 analogen Gleichungen

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4=0;\quad \text{etc.} \tag{9}$$

Bedingung dafür, dass die Axen der x, y, z Hauptträgheitsaxen des homogenen Tetraeders sind.

Die Gl. (6) (9) lassen sich in dem Satze aussprechen: „Das homogene Tetraeder hat mit dem Systeme seiner gleichbelasteten Ecken gemeinsamen Schwerpunkt und gemeinsame Hauptträgheitsaxen.“

Gemäss Gl. (8) können wir noch hinzufügen: „Die Hauptträgheitsmomente des Tetraeders verhalten sich zu denen seines Eckensystems wie die Tetraedermasse zur 20fachen Masse jeder Ecke."

Anmerkung. Die vorstehenden Resultate sind ohne Zweifel bekannt. Auch das zur Herleitung angewandte Princip der Aneinanderfügung von Strecken mittelst Addition ihrer Projectionen auf eine **willkürliche** Gerade mag immerhin nicht unbekannt sein. Jedenfalls aber ist dieses Princip bisher so wenig beachtet worden, dass es sich wol lohnt, an einer durchgeführten Rechnung zu zeigen, wie einfach sich diese nach elementarsten Begriffen der gewöhnlichen analytischen Geometrie gestaltet, wenn man danach verfährt. Dass es in der Tat nötig ist darauf besonders aufmerksam zu machen, beweisen die in neuester Zeit sich mehrenden Schriften zur Verbreitung der Kenntniss der Hamilton'schen Methode der Streckenaddition, welche auf grossem Umwege mit Aufwand von Symbolen, neuer Terminologie und besonders für sie geschaffener Theorie nicht mehr leistet als die Coordinatenmethode auf der Basis allgemein üblicher Begriffe. Erwägt man, dass die auf die Erlernung der Hamilton'schen Lehre verwandte Mühe nicht allein ganz unnütz ist, sondern auf den, der sich ihr unterzieht, sogar mancherlei schädliche Wirkung übt, dass die Symbolik die klare Auffassung erschwert, die doppelte Terminologie, verschiedene Benennung für Gleiches, gleiche für Verschiedenes, dem Verständniss Hindernisse bereitet, so kann man es doch nur durch Unbekanntschaft mit der correcten Handhabung der Coordinatenrechnung von Seiten aller Anhänger von Hamilton's Erfindung erklären, dass sie derselben einen Vorzug zuerkennen Auch wird diese Vermutung schon dadurch bestätigt, dass keine ihrer Schriften die Projectionsaddition erwähnt.

§ 2. Wir stellen uns nun die Aufgabe, in voller Allgemeinheit ein Tetraeder darzustellen, dessen Hauptträgheitsaxen gegeben sind. Unter den 12 Coordinaten der Ecken vermögen 6 die Bedingungen (6) (9) zu erfüllen, während die 6 übrigen willkürlich bleiben. Um die Symmetrie soweit möglich zu bewahren, liegt es nahe, 2 Ecken relativ zu den Axen als willkürlich zu betrachten, die 2 andern zu suchen. Eine andre Forderung indes, dass die Lösung rational, somit eindeutig und stets reell sei, lässt sich damit nicht vereinen. Wir wollen daher durch 2 Lösungen die verschiedenen Anordnungen einzeln in Ausführung bringen.

Seien zuerst x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 beliebig gegeben, und zur Abkürzung

$$x_0 = x_1 + x_2, \quad \text{etc.} \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 = \overline{xy}, \quad \text{etc.} \tag{10}$$

gesetzt. Eliminirt man x_4, y_4, z_4 gemäss den Schwerpunktsgleichungen (6), so werden die Trägheitsaxengleichungen (9):

$$\left.\begin{aligned} (y_0 + y_3)(z_0 + z_3) + \overline{yz} + y_3 z_3 &= 0 \\ (z_0 + z_3)(x_0 + x_3) + \overline{zx} + z_3 x_3 &= 0 \\ (x_0 + x_3)(y_0 + y_3) + \overline{xy} + x_3 y_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Noch einfacher werden sie durch die Einführungen

$$x_5 = x_0 + 2x_3, \quad \text{etc.} \quad (xy) = x_0 y_0 + 2\overline{xy}, \quad \text{etc.} \tag{12}$$

und lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} (yz) + y_5 z_5 &= 0 \\ (zx) + z_5 x_5 &= 0 \\ (xy) + x_5 y_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Daraus folgt, dass

$$R^2 = -(yz)(zx)(xy) \tag{14}$$

positiv sein muss um ein reelles Tetraeder zu ergeben. Dies angenommen hat man:

$$x_0 + 2x_3 = R:(yz); \quad y_0 + 2y_3 = R:(zx); \quad z_0 + 2z_3 = R:(xy) \tag{15}$$

und zwar ist R mit gemeinsamem Doppelvorzeichen zu denken, so dass zweien Ecken 1, 2 stets 2 Eckenpare 3, 4 entsprechen, oder keins.

Ein Uebergang vom reellen zum imaginären Tetraeder kann nur mit Verschwinden einer der Grössen (yz), (zx), (xy) eintreten. Zufolge den Gl (13) verschwindet dann zugleich eine zweite und eine der Grössen x_5, y_5, z_5 Letztere sei z_5; dann hat man:

$$x_0 z_0 + \overline{xz} = 0; \quad y_0 z_0 + \overline{yz} = 0; \quad z_0 + 2z_3 = 0 \tag{16}$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben, wofern nicht $z_1 = z_2 = 0$ (ein auszuschliessender Fall, weil dann auch $z_3 = z_4 = 0$ würde):

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

d. h. eine Trägheitsaxe (die der z) geht durch eine Kante $(A_1 A_2)$.

Der Fall $(yz) = (zx) = (xy) = 0$ ist auszuschliessen; hier müsste eine Kante durch den Schwerpunkt gehen.

Geht man nun von dem Falle (16) aus und verschiebt die zweite Ecke unendlich wenig, indem man setzt

$$x_2 = \alpha x_1 + \delta; \quad y_2 = \alpha y_1 + \varepsilon; \quad z_2 = -\frac{3+\alpha}{1+3\alpha} z_1 \tag{17}$$

so wird

$$(yz) = -2\varepsilon u; \quad (zx) = -2\delta u$$
$$R^2 = -4\delta\varepsilon u^2 (xy)$$

wo (xy) als endlich bleibend zu betrachten ist. Den Fällen $\delta = 0$; $\varepsilon \gtrless 0$ und $\delta \gtrless 0$; $\varepsilon = 0$ entspricht kein Tetraeder. Einen stetigen Uebergang vom reellen zum imaginären Tetraeder erhält man also nur, wenn δ und ε zugleich verschwinden, und zwar muss von da an δ oder ε sein Vorzeichen wechseln, während bzhw. ε oder δ zu seinem Vorzeichen zurückkehrt, so dass niemals $\delta : \varepsilon$ auf beiden Seiten $= x_1 : y_1$ werden kann. Jetzt können δ und ε beliebig gross werden und geben für je 2 Systeme x_2, y_2 die Entscheidung, ob die Tetraeder in Betreff der Realitätsfrage sich in gleichem oder entgegengesetztem Falle befinden.

Zum Schlusse wollen wir noch für 2 gegebene Ecken die Werte der Hauptträgheitsmomente des Tetraeders aufstellen. Es war

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(x_5 - x_0); \quad x_4 = -\tfrac{1}{2}(x_5 + x_0)$$

also

$$x_3^2 + x_4^2 = \tfrac{1}{2}(x_5^2 + x_0^2)$$

Daher ist nach Gl. (5), wenn man noch die Werte (10) (12) (15) (14) einsetzt,

$$\int x^2 \partial T = \frac{T}{40}\left(3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 + \frac{(zx)(xy)}{(yz)}\right); \quad \text{etc.} \tag{18}$$

Die Addition je zweier der 3 analogen Gleichungen ergibt die Hauptträgheitsmomente.

Zu bemerken ist, dass die 2 den 2 gegebenen Ecken entsprechenden Tetraeder gleichen Inhalt

$$T = \text{abs.}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \pm x_5 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix} : 4$$

haben. Wie Gl. (18) zeigt, sind darum auch ihre Trägheitsmomente gleich.

§ 3. Es sollen ferner nach Auswahl von 6 Bestimmungsstücken die übrigen durch dieselben **rational** bestimmt werden.

Die Schwerpunktsbedingungen erfüllen wir, wie vorher, durch die vierte Ecke, gehen daher von den Gl. (13) aus. Der ersten zufolge ist

$$z_0 + 2z_3 = -\frac{(yz)}{y_5} \tag{19}$$

Eliminirt man z_5 zwischen der ersten und zweiten, so erhält man zwischen x_1, x_2, x_3 die homogene lineare Gleichung:

$$(zx)\,y_5 + (yz)\,x_5 = 0$$

welche entwickelt lautet:

$$\{(y_2+3y_3)z_1+(y_3-y_2)z_2\}x_1+\{(y_3-y_1)z_1+(y_1+3y_3)z_2\}x_2$$
$$-\{(3y_1+y_2)z_2+(y_1+3y_2)z_2\}x_3 = 0$$

Die dritte Gl. (13) gibt, gleichfalls homogen linear:

$$(2y_1+y_2+y_3)x_2+(y_1+2y_2+y_3)+(y_1+y_2+2y_3)x_3 = 0$$

Beide Gleichungen zusammen geben die Verhältnisse der 3 Grössen x_1, x_2, x_3, die wir foleendermassen schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi\{Y(z_1+3z_2)-y_1Q\} \\ x_2 &= \xi\{-Y(3z_1+z_2)-y_2Q) \\ x_3 &= \xi\{Y(z_1-z_2)-y_3Q\} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

wo

$$2Y = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_2y_3+y_3y_1+y_1y_2 \tag{21}$$

$$Q = y_1z_2 - y_2z_1 \tag{22}$$

gesetzt ist, und ξ willkürlich bleibt. Nimmt man also

$$\xi.\quad y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad z_1,\quad z_2$$

beliebig an, so ergeben sich x_1, x_2, x_3 aus den Gl. (20), z_5 aus Gl. (19), x_4, y_4, z_4 aus den Gl (6), sämtlich rational, mit der einen Ausnahme

$$y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$$

einem Falle, dem kein Tetraeder entspricht.

Aus den obigen Werten der Coordinaten berechnet man nach Gl. (5) die Trägheitsmomente. Es ergibt sich: (23)

$$\int x^2\,\partial T = \frac{T}{5}\xi^2\,Y\{Y(3z_1^2+2z_1z_2+3z_2^2)-Q^2\}$$

$$\int y^2 \partial T = \frac{T}{5} Y$$

$$\int z^2 \partial T = \frac{T}{40} \left\{ 3z_1^2 + 2z_1 z_2 + 2z_2^2 + \left[\frac{(3y_1 + y_2)z_1 + (y_1 + 3y_2)z_2}{y_1 + y_2 + 2y_3} \right]^2 \right\}$$

Der kritische Fall (16), welcher bei der Annahme von § 3. auftrat, hat auch bei rationaler Lösung Bedeutung Er ist definirt durch die 2 Gleichungen:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \alpha; \quad \frac{z_2}{z_1} = -\frac{3+\alpha}{1+3\alpha} \tag{24}$$

Ihnen zufolge werden die Gl. (13):

$$(yz) = 0; \quad (zx) = 0; \quad (xy) = (3 + 2\alpha + 3\alpha^2) x_1 y_1 = -x_5 y_5$$

Die ersten beiden geben:

$$z_5 = 0$$

die letzte lässt sich spalten in

$$x_5 = \frac{3 + 2\alpha + 3\alpha^2}{\beta} x_1; \quad y_5 = -\beta y_1$$

Dann wird

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_3}{x_1} = \frac{3+2\alpha+3\alpha^2}{2\beta} - \frac{1+\alpha}{2}; \quad \frac{y_3}{y_1} = -\frac{1+\alpha+\beta}{2} \\ \qquad \frac{z_3}{z_1} = \frac{1-\alpha}{1+3\alpha} \\ \frac{x_4}{x_1} = -\frac{3+2\alpha+3\alpha^3}{2\beta} - \frac{1+\alpha}{2}; \quad \frac{y_4}{y_1} = -\frac{1+\alpha-\beta}{2} \\ \qquad \frac{z_4}{z_1} = \frac{1-\alpha}{1+3\alpha} \end{array}\right\} \tag{25}$$

Die Annahme (24) bildet insofern einen Grenzfall, als bei unveränderten $y_2 : y_1$ und $z_2 : z_1$ sich $x_2 : x_1$ nicht ändern kann, ohne dass ein Widerspruch entsteht. Das heisst: „Für jede Lage der ersten Ecke gibt es eine unbegrenzte, stetige Folge von Wertparen zweier Coordinaten der zweiten Ecken, deren jedes nur einem einzigen Werte der dritten Coordinate entspricht. Dieser Wert ist immer reell und kann auch keine imaginäre Veränderung erleiden.“

Die Trägheitsmomente sind in dem in Rede stehenden Falle bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned}\int x^2 \partial T &= \frac{T}{40}\left(\frac{3+2\alpha+3\alpha^2}{\beta}\right)^2 (1+\beta^2) x_1^2 \\ \int y^2 \partial T &= \frac{T}{40}(3+2\alpha+3\alpha^2+\beta^2) y_1^2 \\ \int z^2 \partial T &= \frac{T}{5}\frac{3+2\alpha+3\alpha^2}{(1+3\alpha)^2} z_1^2\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Bei Einführung des Grenzfalles durch Gl. (24) ist die z Axe durch die Kante $A_1 A_2$ gelegt wordon. Legte man sie durch eine andre Kante, so wäre möglicherweise die gegebene Ecke eine andre. Da aber diese willkürlich bleibt, so wird das System der Tetraeder nicht erweitert. Setzt man statt der z Axe die x oder y Axe, so wird nur die Lage des Tetraeders verändert. Folglich stellen unsere Formeln schon das vollständige System dar, wenn x_1, y_1, z_1, α β alle Werte von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen.

V.

Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik.

Von

V. Schlegel.

---

1. **Die Wäge-Aufgabe.** — Welche vier Gewichtstücke muss man besitzen, um jede ganze Anzahl von Gewichtseinheiten (z. B. Gramm) von 1 bis 40 damit abwägen zu können? — D. h. wie lässt sich die Zahl 40 in vier Teile zerlegen, so dass jede ganze Zahl von 1 bis 40 als algebraische Summe aus diesen Teilen dargestellt werden kann?

Es seien die vier Teile a, b, c, d. Dann müssen die 40 Zahlen durch folgende Combinationen ausgedrückt sein, wobei $a > b > c > d$ angenommen wird:

a	$a+b$	$a-b$	$a+b+c$	$a+b-c$	$b+c-a$	$c+a-b$	$a+b+c+d$
b	$a+c$	$a-c$	$b+c+d$	$b+c-d$	$c+d-b$	$d+b-c$	$a+b+c-d$
c	$a+d$	$a-d$	$c+d+a$	$c+d-a$	$d+a-c$	$a+c-d$	$a+b-c+d$
d	$b+c$	$b-c$	$d+a+b$	$d+a-b$	$a+b-d$	$b+d-a$	$a-b+c+d$
	$b+d$	$b-d$					$-a+b+c+d$
	$c+d$	$c-d$					$a+b-c-d$
							$b+c-a-d$
							$c+a-b-d$
4 +	6 +	6 +	4 +	4 +	4 +	4 +	8

$= 40$

Sollte eine dieser Formen einen negativen Wert liefern, so würde man alle in ihr enthaltenen Vorzeichen umkehren.

Den grössten Wert unter allen diesen Formen hat $a+b+c+d$. Demnach muss sein

$$(1) \quad a+b+c+d = 40$$

Den nächstgrössten Wert hat $a+b+c$ als Summe der drei grössten Zahlen. Demnach ist

$$(2) \quad a+b+c = 39$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \quad d = 1$$

Hieraus ergiebt sich für die Zahl 38 die Darstellung

$$(4) \quad a+b+c-d = 38$$

Die nächstgrösste Zahl ist offenbar $a+b+d$, also

$$(5) \quad a+b+d = 37$$

Aus (1) und (5) folgt

$$(6) \quad c = 3$$

Demnach aus (2) und (6)

$$(7) \quad a+b = 36$$

aus (7) und (3)

$$(8) \quad a+b-d = 35$$

aus (5) und (6)

$$(9) \quad a+b+d-c = 34$$

aus (7) und (6)

$$(10) \quad a+b-c = 33$$

aus (10) und (3)

$$(11) \quad a+b-c-d = 32$$

Die nächstgrösste Zahl ist $a+c+d$, also

$$(12) \quad a+c+d = 31$$

Aus (12) und (1) folgt

$$(13) \quad b = 9$$

und aus (7)

$$(14) \quad a = 27$$

Die vier gesuchten Zahlen sind also 27, 9, 3, 1.

Sämtliche Zerlegungen der Zahlen 1—40 sind durch folgendes Schema dargestellt, bei welchem in jeder Zifferngruppe das erste Zeichen durch den Wert von a, und die folgenden bzhw. durch die Werte von b, c, d zu ersetzen sind. Die Null bedeutet das Fehlen des betr. Buchstabens. Das Zeichen $\bar{1}$ sagt aus, dass der betr. Wert das Vorzeichen — hat.

$1111=40$	$11\bar{1}0=33$	$100\bar{1}=26$	$1\bar{1}1\bar{1}=20$	$0111=13$	$01\bar{1}0=6$
$1110=39$	$11\bar{1}\bar{1}=32$	$10\bar{1}1=25$	$1\bar{1}01=19$	$0110=12$	$01\bar{1}\bar{1}=5$
$111\bar{1}=38$	$1011=31$	$10\bar{1}0=24$	$1\bar{1}00=18$	$011\bar{1}=11$	$0011=4$
$1101=37$	$1010=30$	$10\bar{1}\bar{1}=23$	$\bar{1}10\bar{1}=17$	$0101=10$	$0010=3$
$1100=36$	$101\bar{1}=29$	$1\bar{1}11=22$	$1\bar{1}\bar{1}1=16$	$0100=9$	$001\bar{1}=2$
$110\bar{1}=35$	$1001=28$	$1\bar{1}10=21$	$1\bar{1}\bar{1}0=15$	$010\bar{1}=8$	$0001=1$
$11\bar{1}1=34$	$1000=27$		$1\bar{1}\bar{1}\bar{1}=14$	$01\bar{1}1=7$	

Es ist leicht, ein mechanisches Gesetz zu erkennen, nach welchem diese Formen aus einander gebildet sind. Auch sieht man, dass dieselben den Anfang eines triadischen Zahlsystems bilden.

Was nun die am Eingang erwähnte Aufgabe betrifft, so wird das Wägen einer beliebigen ganzen Anzahl von Gramm, d. h. die Herstellung jedes beliebigen Uebergewichtes auf einer Wageschale (innerhalb der festgesetzten Grenze) dadurch bewirkt, dass man die mit 1 bezeichneten Gewichtstücke nach Anweisung obigen Schemas auf die eine, die mit $\bar{1}$ bezeichneten auf die andere Wageschale legt.

2. Verallgemeinerung. — Analoge Zerlegungen wie für die Zahl $40 (= 1+3+9+27)$ giebt es für die Zahlen $4 = 1+3$; $13 = 1+3+9$; $121 = 1+3+9+27+81$ u. s. w. Allgemein gilt der Satz:

I. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum\limits_{0}^{n} 3^r$ können als algebraische Summen der $(n+1)$ Potenzen $3^0, 3^1, \ldots 3^n$ dargestellt werden, wobei keine dieser Potenzen mehr als einmal in jeder Summe enthalten ist."

Ebenso:

II. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum\limits_{r=0}^{n} 2^r$ können als absolute Summen der $(n+1)$ Potenzen $2^0, 2', \ldots 2^n$ dargestellt werden, wobei keine dieser Potenzen mehr als einmal in jeder Summe enthalten ist."

Man erhält z. B. aus dem obigen Schema die Darstellungen aller Zahlen von 1 bis 15 durch Potenzen von 2, indem man alle Formen weglässt, die das Zeichen $\bar{1}$ enthalten, und im übrigen $a = 8$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 1$ setzt.

Aeusserlich betrachtet gelingt die Darstellung aller jener Zahlen als Potenzsummen von 2 mittelst zweier Zeichen (0 und 1), als Potenzsummen von 3 mittelst dreier Zeichen (0, 1, $\bar{1}$). Es treten also als Coefficienten der Potenzen von 2 (im ersten Falle) die Zahlen 1 und 0, als Coefficienten der Potenzen von 3 (im zweiten Falle) die Zahlen 1, 0, —1 auf.

Bildet man weiter nach dem im oben aufgestellten Schema erkannten Gesetze die Variationen zur vierten Classe aus vier Zeichen, indem man das Zeichen $\bar{2}$ für —2 hinzufügt, so ist die Anzahl dieser Formen gleich

$$1+4+16+64=85$$

und es gehen in der Tat alle Zahlen von 1 bis 85 daraus hervor. Man braucht zu diesem Zweck nur in jeder der folgenden 21 Hauptformen

1111	1101	$11\bar{1}1$	$1\bar{1}21$	1011	1001	$10\bar{1}1$
$10\bar{2}1$	$\bar{1}111$	$1\bar{1}01$	$\bar{1}\bar{1}11$	$11\bar{2}1$	$1\bar{2}11$	$1\bar{2}01$
$1\bar{2}\bar{1}1$	$1\bar{2}\bar{2}1$	0111	0101	$01\bar{1}1$	$01\bar{2}1$	0011

das letzte Zeichen rechts der Reihe nach noch durch 0, $\bar{1}$, $\bar{2}$ zu ersetzen, und am Ende die Hauptform

0001

hinzuzufügen, aus der nichts mehr zu bilden ist. Im Uebrigen ist $a = 64$, $b = 16$, $c = 4$, $d = 1$ zu setzen.

Hieraus ergiebt sich durch Analogieschluss folgendes allgemeine Gesetz über die Darstellung aller ganzen Zahlen als Potenzsummen:

III. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum_{r=0}^{n} k^r$ können als Vielfachen-„Summen der $(n+1)$ Potenzen $k^0, k^1, k^2, \ldots k^n$ dargestellt werden, „wobei keine andern Coefficienten zur Verwendung kommen, als 1, „0, —1, —2, ... —$(k-2)$, deren Anzahl gleich k ist."

Für $k = 1$ erhält man hieraus die einfachste Darstellung einer ganzen Zahl, nämlich als Summe von Einheiten; für $k = 2$ und 3 die Gesetze II. und I.

In dem Gesetze III. kann statt der k Coefficienten 1, 0,...—$(k-2)$ jede ununterbrochene Reihe von k auf einander folgenden ganzen Zahlen eintreten, vorausgesetzt, dass unter diesen Zahlen auch die Null ist. — Ist a die grösste dieser Zahlen, so erweitert sich die Reihe der durch das Gesetz III. darstellbaren Zahlen bis zur Grenze

$\sum\limits_0^n k^r$. Denn die grösste dieser Zahlen ist dann durch eine Form dargestellt, welche aus lauter Elementen a (statt 1) besteht, also offenbar den a-fachen Wert der vorigen hat.

Man erhält also folgendes noch allgemeinere Gesetz:

IV. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $a \cdot \sum\limits_0^n k_r$ können als Vielfachensummen der $(n+1)$ Potenzen $k^0, k^1 \ldots k^n$ dargestellt werden, wobei keine andern Coefficienten zur Verwendung kommen als Glieder der Reihe

$$a, \quad a-1, \quad a-2, \quad \ldots \; 1, \; 0, \; -1, \; \ldots \; -(k-a-1)$$

und wobei a eine ganze Zahl aus der Reihe

$$1, 2, \ldots (k-1)$$

sein muss."

Für den Wert $a = k-1$ erhält die Coefficientenreihe die Form $k-1, k-2, \ldots 0$, und enthält somit keine negativen Glieder. Das Gesetz IV. enthält in diesem Falle die Darstellung einer Zahl durch ein Zahlsystem mit der Grundzahl k, also für $k = 10$ durch das gewöhnliche dekadische System.

Da ferner jetzt sämtliche Variationsformen aus k Elementen zur Classe $(n+1)$, ausgenommen die aus lauter Nullen bestehende Form, zur Verwendung kommen, und da die Anzahl dieser Formen gleich der Anzahl der darstellbaren Zahlen ist, so erhält man nebenbei noch die bekannte Formel:

$$(k-1)\sum_0^n k^r = k^{n+1} - 1$$

oder

$$\sum_0^n k^r = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

Auf die Aufgabe, eine gegebene Zahl als Potenzsumme einer gegebenen Grundzahl darzustellen, wobei noch über die Coefficientenreihe innerhalb des oben bestimmten Spielraums verfügt werden kann, sei an dieser Stelle nur aufmerksam gemacht.

3. Zauberkarten. — Nach dem Satze II. der vorigen Nr. können alle ganze Zahlen als absolute Summen von Potenzen der Zahl 2, und zwar ohne andere Coefficienten als 1 dargestellt werden. Eine solche Darstellung sei

$$(15) \quad a = 2^p + 2^q + 2^r + \ldots$$

wobei $p, q, r, \ldots$ lauter verschiedene ganze Zahlen sind, unter denen auch eine gleich null sein kann. Durch Division mit einem dieser Summanden, z. B. 2^p, ergiebt sich:

$$(16)\quad \frac{a}{2^p} = 1 + 2^{q-p} + 2^{r-p} + \ldots + \frac{R}{2^p}$$

wo R die Summe aller derjenigen Glieder ist, deren Exponenten $< p$ sind.

Der ganzzahlige Teil des Quotienten ist also stets eine ungerade Zahl. Bezeichnet man dieselbe mit $(2n+1)$, so kann statt (16) geschrieben werden

$$(17)\quad a = 2^p(2n+1) + R$$

wobei $R < 2^p$ ist. — In analoger Weise kann a unter den Formen

$$(18)\quad \begin{cases} a = 2^q(2n_1+1) + R_1 & (R_1 < 2^q) \\ a = 2^r(2n_2+1) + R_2 & (R_2 < 2^r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dargestellt werden.

Hätte man dagegen a durch eine Potenz von 2 dividirt, die in der Darstellung (15) nicht enthalten ist, z. B. 2^s, so würde man erhalten haben:

$$(19)\quad \frac{a}{2^s} = 2^{p-s} + 2^{q-s} + 2^{r-s} + \ldots + \frac{R'}{2^s}$$

d. h. der ganzzahlige Teil des Quotienten würde eine gerade Zahl sein. —

Schreibt man nun auf einer Karte alle Zahlen von der Form

$$2^0(2n+1) + R \qquad (R = 0)$$

bis zu einer bestimmten Grenze, z. B. 100 auf, auf einer zweiten alle Zahlen von der Form

$$2^1(2n+1) + R \qquad (R = 0,\ 1)$$

auf einer dritten alle Zahlen von der Form

$$2^2(2n+1) + R \qquad (R = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

u. s. w., so wird nach den Formeln (17) und (18) die Zahl a sich ausschliesslich, aber auch zuverlässig auf denjenigen Karten befinden,

die mit 2^p, 2^q, 2^r . . . gebildet sind. Die ersten Zahlen auf diesen Karten sind aber (für die Werte $n = 0$, $R = 0$) bzhw. 2^p, 2^q, 2^r... selbst. Und da die Summe dieser Zahlen (nach (15)) a ist, so kann man die Zahl a sofort angeben, sobald man nur weiss, auf welchen Karten sie zu finden ist.

Für die obere Grenze 100 sind folgende Tabellen bzhw, Karten erforderlich:

1) $(2n+1)+0$

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99

2) $2(2n+1)+0, 1$

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59
62	63	66	67	70
71	74	75	78	79
82	83	86	87	90
91	94	95	98	99

3) $4(2n+1)+0, \ldots 3$

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	61
62	63	68	69	70
71	76	77	78	79
84	85	86	87	92
93	94	95		

4) $8(2n+1)+0, \ldots 7$

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	61
62	63	72	73	74
75	76	77	78	79
88	89	90	91	92
93	94	95		

5) $16(2n+1)+0, \ldots 15$

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63	80	81	82
83	84	85	86	87
88	89	90	91	92
93	94	95		

6) $32(2n+1)+0, \ldots 31$

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63	96	97	98
99				

7) $64(2n+1)+0,\ldots 63$

64	65	66	67	68
69	70	71	72	73
74	75	76	77	78
79	80	81	82	83
84	85	86	87	88
89	90	91	92	93
94	95	96	97	98
99				

Weiss man z. B. von einer Zahl, dass sie auf der 2., 3.. 4. und 7. Karte steht, so findet man

$$2+4+8+64=78$$

welches in der Tat die verlangte Zahl ist.

Hagen i./W., Juni 1891.

VI.

Curven von constanter Krümmung, Torsion, Totalkrümmung und Krümmungsverhältniss.

Von

R. Hoppe.

---

§ 1. Erklärungen.

Die Richtungscosinus der Tangente einer Curve s seien f, g, h, die der Binormale l, m, n, der Krümmungswinkel τ, der Torsionswinkel ϑ, der Torsionsbogen σ, die Krümmungsbreite λ, ein Strich bezeichne die Differentiation nach τ; dann sind $\tau, \vartheta, \sigma, \lambda$ definirt durch

$$\partial\tau^2 = \partial f^2 + \partial g^2 + \partial h^2; \quad \partial\vartheta^2 = \partial l^2 + \partial m^2 + \partial n^2$$

$$\partial\sigma^2 = \partial f'^2 + \partial g'^2 + \partial h'^2$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}; \quad \partial\tau = \partial\sigma\cos\lambda; \quad \partial\vartheta = \partial\sigma\sin\lambda$$

Ist nun die Krümmung $\frac{\partial\tau}{\partial s} = \frac{1}{\varrho}$ constant, so sind die Gleichungen der Curve:

$$x = \varrho\int f\partial\tau; \quad y = \varrho\int g\,\partial\tau; \quad z = \varrho\int h\,\partial\tau \qquad (1)$$

Ist statt dessen die Torsion $\int \frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ constant, so sind sie:

$$x = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}\int f \partial \vartheta; \quad y = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}\int g \partial \vartheta; \quad z = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}\int h \partial \vartheta \tag{2}$$

Ist die Totalkrümmung $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ constant, so sind sie:

$$x = \frac{\partial s}{\partial \sigma}\int f \partial \sigma; \quad y = \frac{\partial s}{\partial \sigma}\int g \partial \sigma; \quad z = \frac{\partial s}{\partial \sigma}\int h \partial \sigma \tag{3}$$

Ist das Krümmungsverhältniss $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$, mithin auch die Krümmungsbreite λ constant, so hat man:

$$\tau = \sigma \cos \lambda; \quad \vartheta = \sigma \sin \lambda \tag{4}$$

wo die constanten Addenden der durch ihre Differentiale definirten Grössen τ, ϑ, σ als selbstverständlich weggelassen sind. In diesem Falle zeigen sogleich die Gl. (4) die bekannte Curvenclasse an, welche sich als Curven constanter Steigung (bezüglich auf eine feste Horizontalebene) charakterisirt *) (sonst auch Helix genannt). Auch deren Coordinatenwerte sind bekannt.

Hiernech bietet die allgemeine Darstellung einer Curve, für welche eins der 4 genannten Elemente constant ist, kein Problem. Sollen 2 derselben constant sein, in welchem Falle offenbar alle constant sind, so genügt allein die Schraubenlinie.

Wol aber können Probleme entstehen, wenn weitere Bedingungen hinzugefügt werden. Wir wollen deren nur 2 in Betracht ziehen. Man kann 1) auf gegebener Fläche die Linien von den genannten Eigenschaften suchen, 2) unter den unendlich vielen Curven von jenen Eigenschaften die algebraischen, (circularen oder logarithmischen) aussondern. Beide Probleme nehme ich nur speciell in Angriff und berühre das erstere nur, sofern das letztere indirect zu einzelnen Lösungen des erstern führt.

§ 2. Allgemeine Bemerkungen und Transformationen.

In meiner analytischen Curventheorie **) habe ich gezeigt, dass

---

*) Grunert Arch. 1. Reihe T. LVI. S. 65 — Hoppe, Lehrb. d. anal. Geom. S. 71.

**) Lehrb. d. anal. Geom. I. Teil, § 54. S. 60. — Grunert Arch. 1. Reihe, T. LVI. S. 57.

die Untersuchung der nicht ebenen Curven und der sie betreffenden Probleme wesentlich vereinfacht wird durch aufängliche Elimination des Bogens, d. i. der einzigen mit Lineardimensionen behafteten Bestimmungsgrösse. Eine nicht ebene Curve wird (mit Absehen von ihrer Lage im Raume) durch 2 Functionen bestimmt. Der Bogen vertritt eine dieser Functionen. Nach seiner Elimination erhält man isolirt eine dimensionslose Curventheorie (die Theorie der Richtungen) welche es nur mit einer bestimmenden Function zu tun hat.

Die Natur der in § 1. betrachteten Curven gibt offenbar diese Methode an die Hand. Bei den Curven (1) (2) (3) hat der Bogen nur Einfluss auf je einen gemeinsamen constanten Factor von x, y, z. Es ergibt sich sofort der Satz:

„Alle dimensionslos gleichbestimmten Curven von constanter Krümmung, Torsion oder Totalkrümmung sind einander ähnlich.“

Bei den Curven von constantem Krümmungsverhältniss findet das Gegenteil statt: hier ist die dimensionslose Bestimmung schon im voraus als einzige gegeben, und die Verschiedenheit der Curve hängt allein von der hinzutretenden Function s ab.

Die Grössen f, g, h stellen sich gewöhnlich in der Form dar:

$$f = \frac{f_1}{k}, \qquad g = \frac{g_1}{k}, \qquad h = \frac{h_1}{k}$$

dann sind f_1, g_1, h_1 beliebig und

$$k^2 = f_1^2 + g_1^2 + h_1^2$$

Nimmt man nun k zur Unabhängigen, so wird

$$f_1 \frac{\partial f_1}{\partial k} + \ldots = k; \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial k}\right)^2 + \ldots = p^2 + 1$$

$$f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial k^2} + \ldots = -p^2; \quad \frac{\partial f_1}{\partial k} \frac{\partial^2 f_1}{\partial k^2} + \ldots = p \frac{\partial p}{\partial k}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial k^2}\right)^2 + \ldots = q^2$$

und man findet:

$$\partial\tau = \frac{p\,\partial k}{k}$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)^2 = \frac{q^2}{p^2} - \left(\frac{1}{k} + \frac{\partial p}{p\,\partial k}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial k}\right)^2 = \frac{\partial\sigma^2 - \partial\tau^2}{\partial k^2} = \frac{q^2}{p^2} - \frac{p^2+1}{k^2} - \frac{2\partial p}{kp\,\partial k} - \left(\frac{\partial p}{p\,\partial k}\right)^2$$

Die in (1) (2) (3) zu integrirenden Grössen enthalten nach Substitution dieser Werte, wie schon ursprünglich, 2 irrationale Factoren; k ist gemeinsam, p ist nur in $\partial\tau$ als Quadratwurzel, in $\partial\sigma$ und $\partial\vartheta$ im rationalen p^2 vorhanden Die Quadratwurzel k kann man durch die Substitution

$$f_1 = \alpha\beta + \gamma; \quad g_1 = \alpha - \beta\gamma; \quad h_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 1)$$
$$k = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1)$$

rational machen; dann ergibt sich:

$$p^2 + 1 = \frac{2k(\partial\alpha^2 + \partial\beta^2 + \partial\gamma^2) - (\beta\,\partial\alpha - \alpha\,\partial\beta + \partial\gamma)^2}{\partial k^2}$$

§ 3. Specielle Lösungen der 4 Aufgaben.

Stehen τ und ϑ in linearer Relation, so ist zugleich mit der Krümmung auch die Torsion constant, und keine der 3 ersten Aufgaben gewinnt ein neues Resultat.

Dagegen bietet die Relation

$$\tau^2 + \vartheta^2 = a^2 - 1$$

für sämtliche leicht ausführbare Integrationen.

Hier hat man nämlich: *)

$$\left.\begin{aligned} f = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\sin\lambda; \quad g &= \cos\lambda\cos a\lambda + \frac{1}{a}\sin\lambda\sin a\lambda \\ h &= \cos\lambda\sin a\lambda - \frac{1}{a}\sin\lambda\cos a\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

*) Lehrb, d. anal. G. I. Teil. § 60. Gl. (53) S. 73. — Grun. Arch. 1. Reihe, T. LVI. S. 67. Gl. (41).

$$\tau = \sqrt{a^2-1}\sin\lambda;\quad \vartheta = -\sqrt{a^2-1}\cos\lambda;\quad \sigma = \sqrt{a^2-1}\,\lambda$$

Dies in die Gl. (1) eingeführt gibt nach vollzogener Integration für eine Curve constanter Krümmung:

$$x = \frac{\varrho}{2}\frac{a^2-1}{a}\sin^2\lambda \tag{6}$$

$$y = \frac{\varrho}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{[(a^2+2)\cos^2\lambda - 3]\sin a\lambda - 3a\sin\lambda\cos\lambda\cos a\lambda\}$$

$$z = \frac{\varrho}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{[3-(a^2+2)\cos^2\lambda]\cos a\lambda - 3a\sin\lambda\cos\lambda\sin a\lambda\}$$

Durch Elimination von λ ergibt sich hieraus:

$$y^2+z^2 = \frac{4}{a^2-4}\left(x-\frac{2a^2+1}{4a}\varrho\right)^2 = \frac{27}{4}\frac{\varrho^2}{(a^2-4)^2} \tag{7}$$

Diese Ausdrücke sind nicht anwendbar auf den Fall $a = 2$. Hier findet man:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{4}\varrho\sin^2\lambda \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{8}\varrho\{\sin\lambda\cos\lambda(5-2\sin^2\lambda)+3\lambda\} \\ z &= -\frac{\sqrt{3}}{32}\{9-24\sin^2\lambda+8\sin^4\lambda\} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und nach Elimination von $\sin\lambda$:

$$\left(x-\frac{9}{8}\varrho\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\varrho z = \frac{81}{128}\varrho^2 \tag{9}$$

Demnach liegt die Curve für $a > 2$ auf einem einschaligen Rotationshyperboloid, für $1 < a < 2$ auf einem Rotationsellipsoid, für $a = 2$ auf einem parabolischen Cylinder. Auf positive a beschränken wir uns, weil die negativen nur dieselben Figuren ergeben. Damit die Gebilde reell sind, muss $a > 1$ sein.

Wächst a von 2 bis ∞, so nimmt das Axenverhältniss des Hyperboloids von ∞ bis 0 ab; daher sind die Gl. (6) auf jedes einschalige Rotationshyperboloid anwendbar. Im Intervall $1 < a < 2$ dagegen hat der Coefficient von x^2 in Gl. (2) ein Minimum bei $a = \sqrt{2}$, nämlich 4. Demnach sind nur abgeplattete Rotations-

ellipsoide vertreten mit Axenverhältniss $\geqq 2$. Umgekehrt geben die Gl. (6) auf jedem einschaligen Rotationshyperboloid 1 constant gekrümmte Curve, auf jedem abgeplattetem Rotationsellipsoid mit Axenverhältniss > 2 hingegen 2 verschiedene, und zwar entsprechend zwei Werten a und a_1, wo

$$a^2 + a_1{}^2 = 5 - \frac{4}{\varkappa^2}$$

wenn $\varkappa$ das Axenverhältniss bezeichnet. Ebenso geben die Gl. (8) 1 constant gekrümmte Curve auf dem parabolischen Cylinder, dessen Parameter

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ist. Jede der Curven (6) vertritt einen Cyklus, die Curve (8) eine unbegrenzte Schar von Curven, indem jeder Punkt (xyz) der erstern sich längs des Parallelkreises $x = \text{const}$, jeder der letztern parallel der y Axe verschieben lässt, so dass im ganzen die Fläche ganz oder zumteil bedeckt wird. Ausserdem entspricht auch jeder Curve eine symmetrische, die jedoch schon im System enthalten ist.

Die Curven (6) sind offenbar algebraisch für rationale, transcendent für irrationale a. Als einfachste Beispiele nehmen wir auf dem Hyperboloid $a = 3$, auf dem Ellipsoid $a = \frac{3}{4}$.

Sei $a = 3$: dann wird die Curve (6) nach Elimination von λ zwischen je 2 der 3 Gleichungen der gemeinsame Schnitt des Hyperboloids

$$y^2 + z^2 - \frac{4}{5}\left(x - \frac{19}{12}\varrho\right)^2 = \frac{27}{100}\varrho^2$$

und der 2 Cylinder 5. Grades:

$$z^2 = \frac{512}{225}\varrho^2\left(1 - \frac{3}{4}\frac{x}{\varrho}\right)^5$$

$$y^2 = 6\varrho x\left(1 - \frac{x}{\varrho} + \frac{3}{10}\frac{x^2}{\varrho^2}\right)^2$$

Der Curvencyklus bedeckt die Zone von $x = 0$ bis $x = \frac{4}{3}\varrho$. Die symmetrische Zone wird von den symmetrischen Curven $a = -3$ bedeckt.

Sei zweitens $a = \frac{3}{2}$; dann wird die Curve (6) nach Elimination von λ der Schnitt des Rotationsellipsoids

$$y^2 + z^2 + \frac{16}{7}\left(x - \frac{11}{12}\varrho\right)^2 = \frac{108}{49}\varrho^2$$

und der Fläche 7. Grades

$$(y^2 - z^2)^2 = \left(\frac{5\varrho^2}{441}\right)^2 \left(1 - \frac{12x}{5\varrho}\right) \left\{25 - 54\frac{12x}{5\varrho} + 53\left(\frac{12x}{5\varrho}\right)^2 - 4\left(\frac{12x}{5\varrho}\right)^3\right\}^2$$

Die von den Curven bedeckte Zone erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = \frac{5}{12}\varrho$, liegt demnach ganz zwischen den Polen des Ellipsoids

$$x = \left(\frac{11}{12} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\varrho = \begin{cases} 1{,}89865\,\varrho \\ -0{,}06521\,\varrho \end{cases}$$

Im obern Extrem $x = \frac{5}{12}\varrho$ schneidet die Tangente die x Axe, daher bildet hier die Curve eine Spitze; im untern $x = 0$ ist die Tangente normal zur x Axe, die Curve berührt den Parallelkreis. Die successiven Spitzen stehen um einen Quadranten des Parallelkreises von einander ab, es liegen mithin 4 durch sie begrenzte Bogen um die Fläche herum Da das Curvensystem nicht symmetrisch zur Ebene $x = \frac{11}{12}\varrho$ ist, vielmehr ganz auf deren negativer Seite liegt, so muss auf der positiven Seite ein symmetrisches System zu ihm Platz finden.

Von besonderem Interesse ist noch die Neigung der Hauptnormale gegen die Flächennormale wegen des Meusnier'schen Satzes. Der Winkel zwischen beiden sei Θ. Die Richtungscosinus der Hauptnormale sind für beliebige a *)

$$f' = \frac{1}{a}; \quad g' = -\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\sin a\lambda; \quad h' = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\cos a\lambda$$

die der Normale der Fläche (7)

$$p = \frac{4:u}{4-a^2}\left(x - \frac{2a^2+1}{4a}\varrho\right); \quad q = \frac{y}{u}; \quad r = \frac{z}{u}$$

wo

*) Lehrb. d. an. G. I. Teil. §. 60. Gl. (53) S. 73. — Grun. Arch. 2. Reihe, Tl. LVI. S. 67. Gl. (41).

$$u^2 = \frac{1}{4(4-a^2)^2}\{[4ax-(2a^2+1)\varrho]^2+27\varrho^2\}$$

Hieraus findet man mit Anwendung von Gl. (7):

$$\cos\Theta = f'p+g'q+h'r = 2\frac{(a^2-1)\sin^2\lambda-a^2+4}{\sqrt{\{[2(a^2-1)\sin^2\lambda-(2a^2+1)]^2+27\}}}$$

das ist für $\lambda = 0$

$$\cos\Theta_0 = \frac{4-a^2}{\sqrt{a^4+a^2+7}} \tag{10}$$

und für $\lambda = R$

$$\cos\Theta_1 = 1$$

Bezeichnet also ϱ_0 den Krümmungsradius des die Curve berührenden Normalschnitts der Fläche, so ist in den Spitzen $\varrho_0 = \varrho$; von da an nimmt $\varrho:\varrho_0 = \cos\Theta$ beständig ab bis zum Minimum (10), welches nur für $a = \pm 2$ null werden kann.

Für dieselben Werte (5) von f, g, h findet man die Gleichungen der Curve von constanter Torsion $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\partial\vartheta}{\partial s}$:

$$x = \frac{\varrho_1}{2}\frac{a^2-1}{a}(\lambda-\sin\lambda\cos\lambda) \tag{11}$$

$$y = \frac{\varrho_1}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{(a^2+2-3a^2\sin^2\lambda)\cos a\lambda + a(a^2+2)\sin\lambda\cos\lambda\sin a\lambda\}$$

$$z = \frac{\varrho_1}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{(a^2+2-3a^2\sin^2\lambda)\sin a\lambda - a(a^2+2)\sin\lambda\cos\lambda\sin a\lambda\}$$

Für rationale a liegt sie auf algebraischem Cylinder. Für $a = 2$ werden die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{4}\varrho_1(\lambda-\sin\lambda\cos\lambda) \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{4}\varrho_1\sin^2\lambda(2-\sin^2\lambda) \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{8}\varrho_1\{3\lambda-\sin\lambda\cos\lambda(3-2\sin^2\lambda)\} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die durch Elimination von λ und $\sin\lambda$ daraus hervorgehende Gleichung des Cylinders, auf dem sie liegt, ist vom 4. Grade zwischen y^2 und $(\sqrt{3}x-2z)^2$. Setzt man zur Abkürzung

$$\xi = x - \frac{2}{\sqrt{3}} z; \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{3}} y$$

so lautet sie:

$$(\xi^2 + 4\eta^2)^4 + 4\varrho_1^2(\xi^6 - 17\xi^4\eta^2 - 4\xi^2\eta^4 - 4\eta^6) + 4\varrho_1^4\xi^4 = 0$$

und lässt sich schreiben:

$$\{(\xi^2 + 4\eta^2)^2 - 2\varrho_1^2\xi^2\}^2 = 4\varrho_1^2(2\eta^2 - \xi^2)^2(\eta^2 - 2\xi^2)$$

wird also nur für

$$\eta^2 \geqq 2\xi^2$$

kann aber stets innerhalb leicht zu erkennender Intervalle der ϱ_1 erfüllt.

Aus den Werten (5) von f, g, h ergeben sich ferner die Gleichungen der Curve constanter Totalkrümmung $\frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial \sigma}{\partial s}$, nämlich:

$$x = -\varrho_2 \frac{a^2 - 1}{a} \cos\lambda \tag{13}$$

$$y = \frac{\varrho_2}{a\sqrt{(a^2 - 1)}} \{(a^2 + 1)\cos\lambda \sin a\lambda - 2a \sin\lambda \cos a\lambda\}$$

$$z = -\frac{\varrho_2}{a\sqrt{(a^2 - 1)}} \{(a^2 + 1)\cos\lambda \cos a\lambda + 2a \sin\lambda \sin a\lambda\}$$

Sie liegt auf dem einschaligen Rotationshyperboloid:

$$(a^2 - 1)(y^2 + z^2) - x^2 = 4\varrho_2^2 \tag{14}$$

und ist algebraisch für rationale a. Für $a = 3$ z. B. wird sie gebildet durch den Schnitt des Cylinders 4. Grades:

$$27x^4 = 512\varrho_2^3(\varrho_2 - \sqrt{2}z) \tag{15}$$

Soll endlich das Krümmungsverhältniss $\operatorname{tg}\lambda = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$ constant sein, so sind die Werte

$$f = \sin\lambda; \quad g = \cos\lambda \cos\sigma; \quad h = \cos\lambda \sin\sigma$$

als Functionen von σ allein schon im voraus bekannt*), und für jede beliebige Function s von σ sind

*) Lehrb. d. an. G. I. Teil. § 59. Gl. (45) S. 71. — Grun. Arch. 1. Reihe, T. LVI. S. 65. Gl. (33).

$$x = \int f \partial s; \quad y = \int g \partial s; \quad z = \int h \partial s$$

die Gleichungen der Curve. Diese sind algebraisch, wenn

$$s = \Sigma C \sin(\alpha\sigma + \beta)$$

gesetzt wird, wo die C und β beliebig constant, die α beliebig rational constant, aber nicht $= 0$ oder $= \pm 1$ sind, und Σ die Summe beliebig vieler solcher Terme bezeichnet. Die Gleichungen der Curve werden:

$$x = \sin\lambda \, \Sigma C \sin(\alpha\sigma + \beta)$$

$$y = \cos\lambda \, \Sigma \frac{C}{\alpha^2 - 1} \{\alpha \cos\sigma \sin(\alpha\sigma + \beta) - \sin\sigma \cos(\alpha\sigma + \beta)\}$$

$$z = \cos\lambda \, \Sigma \frac{C}{\alpha^2 - 1} \{\alpha \sin\sigma \sin(\alpha\sigma + \beta) + \cos\sigma \cos(\alpha\sigma + \beta)\}$$

Ist z B.

$$s = \frac{c}{2} \sin 2\sigma$$

so findet man durch Elimination von σ

$$\left.\begin{aligned} y + z^2 - \frac{4}{3} x^2 \cot^2\lambda &= \frac{1}{9} c^2 \cos^2\lambda \\ yz &= \frac{\cos^2\lambda}{9c \sin^3\lambda} x (4x^2 + 3c^2 \sin^2\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Curve liegt also auf einem einschaligen Rotationshyperboloid und wird gebildet durch den Schnitt einer kubischen Fläche erzeugt von einer gleichseitigen Hyperbel, deren Axen bei unveränderter Richtung normal zur x Axe in kubischer Relation zu den x variiren.

§ 4. Allgemeine Bemerkungen.

Zieht man durch einen Punkt P einer Fläche F eine Kürzeste und eine andre Curve s auf F, welche beide sich in P berühren, und ist Θ der Winkel zwischen den Schmiegungsebenen beider Curven, sind ferner ϱ_0 und ϱ ihre Krümmungsradien in P, so ist bekanntlich

$$\varrho = \varrho_0 \cos\Theta \tag{17}$$

Sei nun ϱ für jeden Punkt von s gegeben. Nimmt man auf der Tangente in P ein unendlich kleines Stück PP' an, so ist durch ie Tangente die Kürzeste in unbegrenzter Ausdehnung, durch diese , hierdurch nach Gl. (17) $\cos\Theta$, mithin zweideutig Θ bestimmt. etzt man indes Stetigkeit der Fläche in genügend hoher Ordnung aus, so behält Θ sein Vorzeichen solange, als es nicht verschwindet, und wird durch dessen Wahl eindeutig Durch Θ ist un die Schmiegungsebene in P und durch deren Schnitt mit der läche ein dritter Punkt P'' von s in gewähltem unendlich kleinem bstand von P bestimmt Mit den Punkten P', P'' kann man benso verfahren, wie mit P, P'; man erhält einen neuen Curvenpunkt und so fort. Ausserdem ergeben sich auch alle Curvenpunkte als Coincidenzpunkte der Schmiegungsebene.

Verschwindet einmal Θ, so kann es sein Vorzeichen wechseln, und die Curve findet eine Fortsetzung auf der andern Seite der Kürzesten; aber nur sofern ϱ als Function von s seine Werte zurückdurchläuft. Wächst ϱ über ϱ_0 hinaus, so kann sich die Curve in der erreichten Richtung nicht fortsetzen. Der Punkt $\varrho = \varrho_0$ ist im allgemeinen ein Rückkehrpunkt.

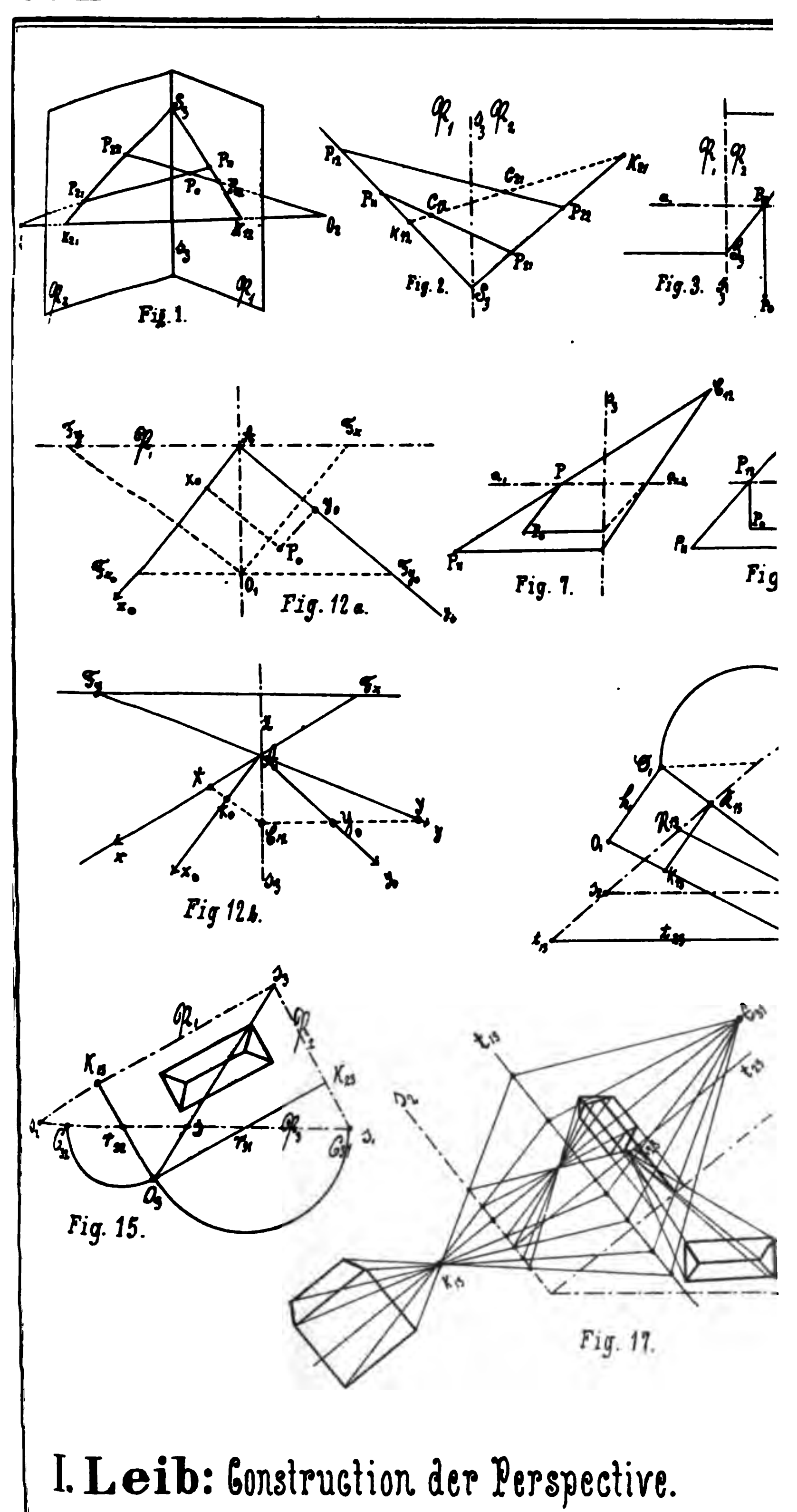
Vom Vorstehenden machen wir Anwendung auf den Fall, wo ϱ constant ist Es hat sich der Satz ergeben:

„Auf jeder bis zu 2. Ordnung stetigen Fläche gehen durch jeden Punkt in jeder Anfangsrichtung 2 Curven von gegebener constanter Krümmung, soweit der Krümmungsradius des berührenden Normalschnitts nicht kleiner als der gegebene Krümmungsradius ist. Die Punkte, in welchen beide gleich werden, sind im allgemeinen Rückkehrpunkte."

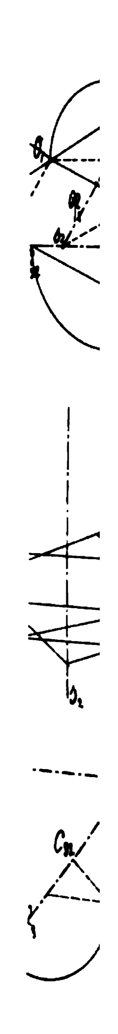
„Das ganze constant und gleich gekrümmte Liniensystem auf einer Fläche teilt sich in 2 Systeme, die durch positives und negatives Θ unterschieden sind. In jedem Punkte und von da aus in jeder Anfangsrichtung berührt sich eine und nur eine Curve des einen und andern Teilsystems."

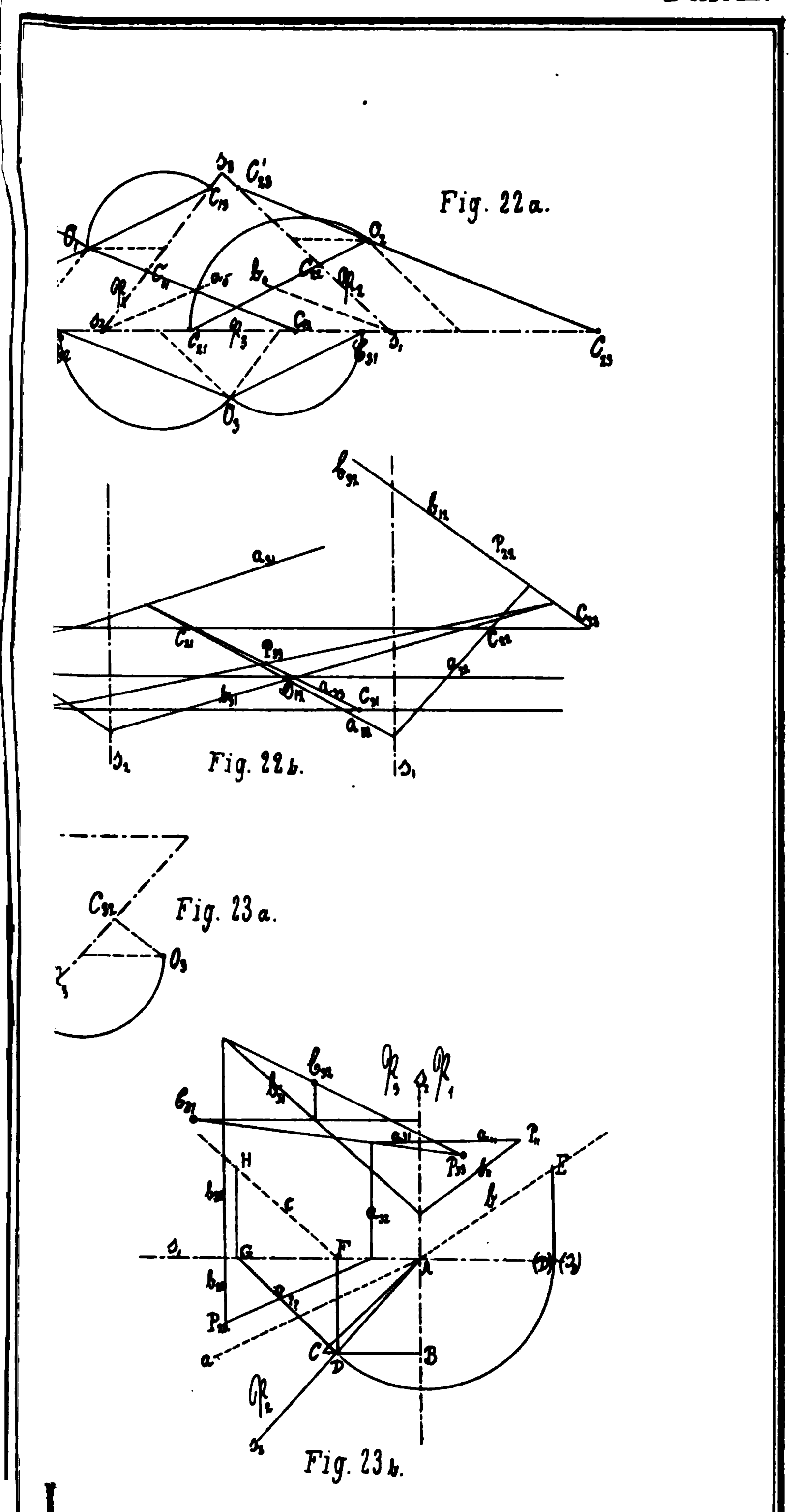
Vergleicht man hiermit die in § 3 gegebenen Beispiele constant gekrümmter Linien auf Rotationshyperboloiden und Rotationsellipsoiden, so zeigt sich, dass die gefundenen Curven bloss speciell ausgezeichnete aus dem System darstellen. Zunächst ist mit der besondern Fläche auch der Wert von ϱ individuell gegeben. Ausserdem gehen auch von jedem Punkte nur in zwei Richtungen Curven. Alle übrigen Curven des Systems sind in einer unbekannten allgemeinern Form enthalten.

Curven constanter Krümmung haben schon früher bisweile Beachtung gefunden. Erst in neuester Zeit sind die Curven con stanter Torsion von Maurice Fouché in Annales de l'École Normal T. VII p 335 untersucht worden. Es werden daselbst Bedingunge aufgestellt, unter denen solche Curven algebraisch sind, namentlic der Satz: Jeder sphärischen Curve, deren Projectionen auf di Coordinatenebenen (überhaupt auf eine willkürliche Ebene) alge braisch quadrabel sind, entsprechen unendlich viele (ähnliche) Curve constanter Torsion (d. h also eine solche). Der grösste Teil de Untersuchung bezieht sich auf complexe Coordinaten und imaginär Curven. Das Gegenwärtige ist darin (bis auf einige Beobachtunge von § 1., die bei richtiger Auffassung unmittelbar bekannt sind hier jedoch, verschieden ausgedrückt, wesentlich identisch, als Rech nungsresultate erscheinen) nicht enthalten.



I. **Leib:** Construction der Perspective.




Fig. 22 a.
Fig. 22 b.
Fig. 23 a.
Fig. 23 b.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Elfter Teil. Zweites Heft.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1892.

VII.

Neue Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, im allgemeinen und für Flächen II. Grades im besonderen.

Von

Josef Bazala,

Professor a. d. k. k. Staats-Oberrealschule in Bielitz.

I.

Synthetische Ableitung des Tangential- und des Normalbüschels.

§. 1.

Durch die auf der horizontalen Projectionsebene normal stehende Gerade A [Taf. III. Fig. 1] sollen für die Lichtstrahlenrichtung Sl Ebenen E gelegt werden, denen die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2, 0·3 ... 1 zukommen.

Denkt man sich durch einen Punkt S der Geraden A einen Lichtstrahl Sl geführt und aus einem beliebigen Punkte l desselben auf die gesuchten Ebenen E normale Strecken $l\alpha[l'\alpha' \perp E']$ gefällt, so stellen dieselben, wenn man die Strecke Sl als Längeneinheit betrachtet, die sinus derjenigen Neigungswinkel vor, welche der Lichtstrahl Sl mit den genannten Ebenen einschliesst. Diese Strecken $l\alpha$, welche im Grundrisse in wahrer Grösse erscheinen, müssen daher

beziehungsweise die Längen 0, 0·1, 0·2, 0·3 . . . 1 haben. Wird aus S' mit dem Halbmesser $S'l'$ der Halbkreis k beschrieben, so braucht man, da die beiden Abstände $l'\alpha'$ und $\beta\gamma[\beta\gamma \perp S'l']$ einander gleich sind, um die gesuchten Ebenen zu erhalten, nur die als Längeneinheit angenommene wahre Grösse von Sl auf der zu l' normal gezogenen Geraden nach $S'l_0$ aufzutragen, diese Strecke in 10 gleiche Teile zu teilen, durch die Teilungspunkte Parallele zu $S'l'$ zu führen und S' mit den auf k sich so ergebenden Punkten β durch Gerade zu verbinden.

Will man die Normalen der durch A gehenden, die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2, 0·3 . . . 1 besitzenden Ebenen darstellen, so braucht man blos die angegebene Construction in einer um 90° gedrehten Lage auszuführen.

Wir nennen nach Dr. L. Burmester diese beiden Büschel Tangential-, beziehungsweise Normalbüschel, $S'l'$ die Richtung und $S'l_0$ die Scalenlänge derselben Die Strecke $S'l'$, mit welcher der Kreis k zu beschreiben ist, wollen wir den Radius des betreffenden Büschels nennen. [1])

II.

Beleuchtungs-Constructionen bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

A. Für das elliptische Paraboloid.

§. 2.

In Fig. 2 ist ein elliptisches Paraboloid, dessen Achse AB normal zur Grundrissebene steht, durch den zur Aufrissebene parallelen Hauptschnitt M und die Grundspur P dargestellt.

Bevor wir bei der vorliegenden Fläche für die Lichtstrahlenrichtung Sl die Isophoten construiren, bestimmen wir den Grundriss der Selbstschattengrenze o. Wir suchen zunächst den in M liegenden Punkt derselben [l'' berührend an M'', $B''\beta = \alpha B''$, $\beta o'' \parallel x_1$, $o''o' \perp x_1'$], bestimmen dann mittelst des die kleine Achse von P im Mittelpunkte A berührenden Kreises $\varkappa$ die zu $S'l'$ conjugirte

1) Dr. L. Burmester gelangte zur Construction dieser Büschel auf analytischem Wege [S. L. Burmester „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen“, Leipzig 1871.]

Richtung Ac_0 [$Ab \parallel CD$, $b\varepsilon \perp x'$; $S'l'b_0$, $b_0 \varepsilon c_0$ [1])] und führen parallel zu letzterer den Grundriss der Selbstschattengrenze o.

Um die in irgend einer Seitenlinie M_1 bei Annahme von 10 Beleuchtungsstufen liegenden Isophotenpunkte zu erhalten, benutzen wir einen Cylinder C_1, welcher das Paraboloid in M_1 berührt, und dessen Richtung t_1 zu M_1' conjugirt sein muss Die Isophoten von C_1, welche Erzeugende sind, schneiden M_1 in den gesuchten Isophotenpunkten. Sollen die Isophoten der Cylinderfläche C_1 dargestellt werden, so hat man einen Normalschnitt N_1 derselben zu zeichnen, in seiner Ebene den entsprechenden Tangentialbüschel T_{N_1} zu construiren, dann parallel zu den Strahlen des letzteren Tangenten an N_1 zu führen und durch die sich so ergebenden Berührungspunkte die Cylinder-Erzeugenden zu ziehen.. Wir legen die Normalschnitte der sämtlichen den einzelnen Seitenlinien entsprechenden Berührungscylinder durch die Flächenachse AB [$A'e_1$ senkr. auf t_1] und drehen, um in N_1, N_2, N_3 . . die Tangentialbüschel darstellen zu können, diese Ebenen um AB in eine zur Aufrissebene parallele Lage. Sehr zweckmässig ist es dabei, alle zur Anwendung kommenden Tangentialbüschel auf einen gemeinsamen, in AB liegenden Scheitel S zu verlegen und für dieselben eine gemeinsame Scalenlänge Sl anzunehmen. Bestimmt man zu dem Behufe ein für allemal die wahre Grösse $S''l_0$ von Sl, teilt dieselbe in 10 gleiche Teile und führt durch die Teilungspunkte aus S'' concentrische Kreise, so erspart man bei den einzelnen Tangentialbüscheln das Auftragen der Scalenteile. Weil dann die Projectionen der Strecke Sl auf die einzelnen Normalschnitte sowol die Richtungen als auch die Radien der entsprechenden Büschel bilden, so kann die Construction der parallel zur Aufrissebene gedrehten Tangentialbüschel sehr erleichert werden, wenn man ein für allemal über $S'l'$ als Durchmesser den Kreis k beschreibt und durch l'' eine zu x parallele Gerade führt. Man braucht dann nur die Strecke $S'd_1$ nach $\lambda\lambda_1$ zu übertragen, um in $S''\lambda_1$ die Richtung und den Halbmesser für den dem Normalschnitte N_1 entsprechenden Tangentialbüschel T_{N_1} zu erhalten. Auf dem zu $S''\lambda_1$ normalen Radius würde schon durch die concentrischen Kreise die Scala desselben entstehen.

Damit wir den Normalschnitt N_1 des Cylinders C_1 nicht darzustellen brauchen, projiciren wir denselben samt dem in seiner Ebene liegenden Tangentialbüschel T_{N_1} in der Richtung der Cylindererzeu-

1) Diese Construction conjugirter Durchmesser der Linien II. Ordnung findet man in Dr. L. Burmester's „Theorie und Darst. d. Beleuchtung . . .“, p. 35.

genden auf die Ebene M_1 und von hier in der Richtung $a_1 a$ auf den Hauptschnitt M. Der dadurch in letzterem entstehende Strahlenbüschel T_M muss dann zu T_{N_1} affin sein, wobei AB die Affinitätsachse ist. Man kann T_M am schnellsten erhalten, wenn man den Tangentialbüschel T_{N_1} mit einer zu AB parallelen Geraden schneidet und die dadurch entstehende Punktreihe auf den affin entsprechenden Träger in der Richtung $e_1 a$ projicirt. Parallel zu den Strahlen des Büschels T_M sind dann an M'' Tangenten zu führen, ihre Berührungspunkte zu markiren und letztere schliesslich auf die Seitenlinie M_1 in der Richtung aa_1 zu projiciren.

Weil M'' eine Parabel ist, so ist es zweckmässig, statt der Richtungen der an M'' zu führenden Tangenten die der entsprechenden Normalen zu bestimmen. Das ist möglich, wenn man den ganzen rücksichtlich der Strahlenbüschel T_{N_1} und T_M angedeuteten Vorgang in einer um 90° gedrehten Stellung durchführt, d. h., wenn man ursprünglich statt des Tangentialbüschels den der Ebene N_1 entsprechenden Normalbüschel S_{N_1} construirt. An Stelle der Affiinitätsachse AB tritt dann die Affinitätsachse m, und der Büschel S_{N_1} ist durch eine zu m parallele Gerade zu schneiden, damit sich aus ihm einfachst möglich der affine Normalbüschel S_M ergibt. Verlegt man den Scheitel des letzteren in den Brennpunkt F der Parabel M'' und schneidet ihn durch die Directrix r derselben, so ergeben sich die auf M'' zu bestimmenden Punkte, wenn man durch die Punktreihe r Parallele zu $A''B''$ zieht. Zu denselben Punkten muss man aber auch gelangen, wenn man mit Beibehaltung des Scheitels S'' den Normalbüschel S_M durch eine zu r parallele Gerade schneidet, die von S'' dieselbe Entfernung hat, wie r von F, und dann durch die sich dadurch ergebende Punktreihe einen Parallelstrahlenbüschel P_M mit der Richtung $A''B''$ führt. Der letztere hat mit dem Büschel S_{N_1} den Strahl $S''A''$ gemeinsam, weshalb beide perspectivisch sein müssen. Ebenso muss auch der Aufriss des dem Büschel P_M in der Ebene M_1 affin entsprechenden Parallelstrahlenbüschels P_{M_1} zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch sein. Bestimmt man deshalb im Grundrisse zu dem in M_1 liegenden Punkte o der Selbstschattengrenze den affinen Punkt o auf M und zieht durch beide Punkte die Strahlen der Parallelbüschel, so treffen dieselben den entsprechenden Strahl o des Büschels S_{N_1} in 2 Punkten, durch welche die zu x_1 parallelen perspectivischen Achsen r_1 und ϱ_1 zu ziehen sind. Wird der Büschel S_{N_1} durch dieselben geschnitten, so liefert der dann durch die Punktreihe r_1 gehende Parallelstrahlenbüschel die auf M'' gesuchten Punkte, während der aus der Punktreihe ϱ_1 entstehende Parallelstrahlenbüschel nicht nur die Grundrisse der auf M_1 liegenden Isophotenpunkte gibt, sondern auch durch die

Aufrisse derselben geht. Letztere erhält man, wenn man durch die auf M'' entstehenden Punkte Parallele zu x_1 zieht.

Die ganze Construction kann noch dadurch ein wenig vereinfacht werden, dass man bei dem Beginne derselben die Tangente t_1 gar nicht führt, sondern N_1 gleich normal zu der durch den Kreis x sich ergebenden Richtung zieht.

Der mit der Scala zusammenfallende Strahl $S''\lambda_1$ des Normalbüschels liefert bei obigem Vorgange denjenigen Punkt der Seitenlinie M_1, welchem ein Maximum der Beleuchtungsstärke zukommt (Maximal-Isophotenpunkt). Es ist auch leicht einzusehen, dass man durch Unterteilung der Scala Punkte einer beliebigen Beleuchtungsstärke erhalten und auch zu jedem Punkte der gegebenen Fläche durch Ausführung obiger Construction in umgekehrter Aufeinanderfolge die Beleuchtungsstärke bestimmen kann.

Empfehlenswert ist es, vor allem diejenigen Seitenlinien zu behandeln, bei welchen der Maximal-Isophotenpunkt einer der 10 angenommenen Beleuchtungsstufen angehört. Die Scalen der betreffenden Normalbüschel müssen durch die Schnittpunkte der Geraden s mit den concentrischen Kreisen gehen und die ihnen entsprechenden Seitenlinien bekommt man, wenn man die zwischen den genannten Schnittpunkten und dem Punkte λ liegenden Strecken von S' aus bei dem Kreise k als Sehnen aufträgt und dann den Kreis x benutzt. Jede dieser Seitenlinien muss in ihrem Maximal-Isophotenpunkte eine Isophote berühren.

Wichtig ist auch die Vornahme der den Lichtpol enthaltenden, dann der durch den den Lichtstrahl Sl gehenden Seitenlinie und der beiden Hauptschnitte der Fläche.

Wir wollen noch in dem construirten Isophotenpunkte 5 die Isophotentangente bestimmen. Dieselbe ergibt sich, wenn man einen Lichtstrahl, z. B. den durch den Punkt 5 gehenden l, auf die das Paraboloid in dem Punkte 5 berührende Ebene E_5 projicirt, hierauf die sich dadurch ergebende Richtung als neue Lichtstrahlenrichtung betrachtet und für dieselbe im Punkte 5 die Tangente der Selbstschattengrenze construirt; letztere ist schon die gesuchte Isophotentangente [1]). Um die Ebene E_5 zu erhalten, bestimme man im Punkte 5 die Tangente τ an die Seitenlinie M_1 $[B''\sigma = \gamma B'']$

1) S. d. Verf. „Allgemeine Theorie der Isophotentangenten und Construction derselben für Flächen II. Grades" [Arch. d. Math. u. Phys., 2. Reihe, Teil V, p. 113.]

und suche ihren Grundspurpunkt t, durch welchen die Grundspur u der Berührungsebene parallel zu t_1 geht. Die in der Hauptschnittebene M liegende Spur derselben ergibt sich dann in $\sigma\zeta$. Um nun l auf die Ebene $u\sigma$ zu projiciren, führen wir zu letzterer durch den Punkt 5 eine Normale n [n'' senkr. auf $\sigma''\zeta''$, n' senkr. auf u] und bringen die durch l und n gehende Ebene, deren Grundspur Hh ist, mit der Ebene $u\sigma$ zum Schnitte. Die Schnittkante 5μ ist die neue Lichtstrahlenrichtung und die ihr entsprechende, durch den Punkt 5 gehende Ebene E_s der Selbstschattengrenze ist zu 5μ conjugirt. Durch den gemeinsamen Punkt v der Ebenen E_s und E_5 geht die verlangte Isophotentangente t.

Die behandelten Beleuchtungsconstructionen lassen sich in ungeänderter Form auch ausführen, wenn kein Hauptschnitt des Paraboloides zu einer Projectionsebene parallel ist, und auch dann, wenn statt desselben irgend eine andere Seitenlinie gegeben ist.

B. Für andere Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind.

§. 3.

Um die vorgeführte Beleuchtungsconstruction auf ein Ellipsoid anzuwenden, denken wir uns dasselbe durch die zur Grundrissebene normale Flächenachse BC und den zu BC normalen Hauptschnitt P gegeben. Wir zeichnen über BC als Durchmesser einen zur verticalen Projectionsebene parallelen Kreis M und legen ihn unserer Construction in derselben Weise zu Grunde, wie dies im vorigen Paragraphen bezüglich des Hauptschnittes M geschehen ist. Construirt man dann für eine bestimmte Seitenlinie M_1 den Normalbüschel S_{N_1} des Berührungscylinders wieder so, dass sein Scheitel S'' in die Verlängerung von $B''C''$ fällt [Fig. 3], so ergibt sich aus ihm in bekannter Weise der affin entsprechende, sich auf M'' beziehende Normalbüschel S_M. Verschiebt man letzteren, bis sein Scheitel in den Mittelpunkt A'' von M'' fällt, so ist er auch in dieser Stellung zum Büschel S_{N_1} perspectivisch, weil in $A''S''$ zwei einander entsprechende Strahlen zusammen fallen, und gibt gleich die auf M'' zu bestimmenden Punkte. Um die perspectivische Achse ϱ_1 beider Büschel zu erhalten, kann man auch hier, wie beim Paraboloide, vorerst den Grundriss der Selbstschattengrenze bestimmen und zu dem sich in M_1 ergebenden Grenzisophotenpunkte 0 den entsprechenden Punkt auf M'' suchen. Durch letzteren geht der Nullstrahl des Büschels A'', und wo dieser den Nullstrahl des Büschels S_{N_1} trifft, ist ein Punkt der perspectivischen Achse ϱ_1.

Die auf M_1 liegenden Isophotenpunkte bekommt man dann am schnellsten, wenn man den Büschel A'' nicht nur durch den Kreis M'' schneidet, sondern auch durch einen zweiten, zu M'' concentrischen Kreis N_1, dessen Durchmesser gleich ist der kleinen Achse der Ellipse M_1'' [Vergl. Fig. 2 unserer „Allgemeinen Theorie der Isophotentangenten . . .“].

Man kann aber das vorherige Zeichnen der Selbstschattengrenze auch vermeiden, wenn man einen Strahl des Büschels A'' direct bestimmt. Denkt man sich nämlich den dem Normalschnitte N_1 [vgl. Fig. 2] entsprechenden Tangentialbüschel T_{N_1} durch eine in der Entfernung $A'e_1$ von S parallel zu AB geführte Gerade geschnitten, so muss die entsprechende Gerade beim affinen Tangentialbüschel T_M die Entfernung $A'a'$ von S haben. Trägt man demnach, da wir die genannten Tangentialbüschel in einer um 90° gedrehten Stellung ausführen, die Strecke $A'e_1$ nach $S''\alpha$ [Fig. 3] auf und zieht r_1 normal zu $A''S''$, so ergibt sich auf r_1 eine Punktreihe, von welcher wir einen Punkt, z. B. 6, markiren. Aus ihr erhält man, wenn man

$$\alpha S_M = A'a'$$

macht, in $S_M 6$ den entsprechenden Strahl des nach S_M verschobenen Normalbüschels S_N. Parallel zu $S_M 6$ wird der Strahl 6 des Büschels A'' gezogen, und durch den Schnittpunkt des letzteren mit dem Strahle $S''6$ bekommt man die Affinitätsachse ϱ_1 zwischen den Büscheln S_{N_1} und A''.

Bei dem Ellipsoide sind für das Zeichnen der Grundriss-Isophoten auch die Isophotenpunkte der Horizontalcontour von grosser Wichtigkeit. Sie werden als Isophotenpunkte des die Fläche nach der Horizontalcontour berührenden Cylinders mittelst des im Grundrisse herzustellenden Tangentialbüschels erhalten, der $S'l'$ zur Richtung und zum Radius und die wahre Grösse von Sl zur Scalenlänge hat.

Unsere Construction lässt sich auch ganz einfach durchführen, wenn bei der beleuchteten Fläche die gegebenen Linien M'' und P ganz beliebig sind. Man zeichnet in diesem Falle die Evolute E von M'' und geht im übrigen so vor, wie es zuletzt bezüglich des Ellipsoides angedeutet wurde. Nur hat man hier nicht den Büschel A'', sondern den Büschel S_M zu bestimmen und parallel zu dessen Strahlen Tangenten an E zu führen. Aus den sich dadurch auf M'' ergebenden Fusspunkten werden schliesslich die entsprechenden

Punkte in M_1 mit Benutzung der Grundrisse von M und M_1 construirt [1]).

Wie sich unsere Construction bei Behandlung der beiden Hyperboloide gestaltet, werden wir im nächsten Paragraphen sehen.

---

1) Vergl. d. Verf. „Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung“ [Arch. d. Math. u. Phys. 2. Reihe, Teil I. p. 266.]

Bei dieser Gelegenheit erlaubt sich der Verfasser, die in der citirten Abhandlung in Folge eines Versehens stehen gebliebenen Druckfehler anzuführen:

Seite 267,	Zeile 21 v. ob.,	statt $k_1''h'$	setze $h''h'$
		$S'S = S'S''$	setze $S'S_0 = S'S''$
269	4	e_1, a_1'	$e_1 a_1'$
	5	M_1'	M'
	14 v. u.	der	die
270	10 v. o.	a_9	a_9
271	8 v. o. soll es heissen:	der Selbstschattengrenze die Schlagschattengrenze erhalten	
272	9 v. u., statt $e_1 B$	setze $(e_1)B$	
273	13 v. o.	$e_4 B$	$(e_4)B$
	6 v. u.	umgekehrte	umgeklappte
	4	$e(v_1 \parallel (l)$	$e(v_1) \parallel (l')$
275	8	e, a	$(e_1)a$
276	3 v. o,	$[(1)\alpha\beta,$	$[(1)a\beta,$
	4	r	ν
277	4 v. u.	k_1	h_1

Taf. VI, Fig. 1,	statt x_1'	setze x_1
	E	E''
	M_2	M_2'
	M_9	M_9'
	A	A'
	M'	M_1'

Zum Schnittpunkte der Geraden M_4' und t_4 setze a_4

Fig. 1a, Zum Schnittpunkte der gestrichelten Geraden $S'8$ und l_0 setze 0_0

Zum Schnittpunkte der Geraden $S'8$ und D' setze D_0

statt k setze k_0

III.

Beleuchtungs-Constructionen bei axonometrischer Darstellung.

A. Für das elliptische Hyperboloid.

§. 4.

In Fig. 4 ist bei axonometrischer Darstellung ein elliptisches Hyperboloid, dessen eine imaginäre Achse zur Projectionsebene

---

Fig. 2. Ganz oben statt 0 setze σ
Zum Berührungspunkte der durch s gehenden gestrichelten Geraden setze a_5
Zum Schnittpunkte der Geraden M_1' und t_1 setze a_1
mn t_1 e_1

Fig. 2a, Statt des Punktes S in der Geraden x setze S'
statt v setze v_1
vs verlängere bis δ
Zum Punkte 0 auf D_1 setze s_1
statt des Punktes 0 auf (D_1) setze (0)
𝔖 setze (𝔖)
Zum Mittelpunkte von k_0 setze S_0

Taf. VII, Fig. 3, Ganz oben, statt M setze μ
Die Gerade Aa bezeichne mit M'
Aa_1 M_1'
statt t setze t_1
Die Gerade $S'\lambda'$ beeeichne mit l'
Sh l
Zum Mittelpunkte von k_0 setze S_0

Fig. 4, Statt t_4 setze t_4''
t_1 t_1''
P P''
Zum Schnittpunkte der Linien Q'' und x_1 setze a''
Die Parabel bezeichne mit P'
Die durch den Punkt 9 gehende Gerade bezeichne mit t_9
statt a setze a'
a_1 a_1'
Die Gerade ne_3e_5 bezeichne mit nm

Fig. 4a, Statt S setze S'
9 $9'$
t_5 t_5'

parallel ist, so angenommen worden, dass AB die reelle Flächenachse, M ein Hauptschnitt mit den Asymptoten T, P ein zu AB normaler Flächenschnitt, x die zur Projectionsebene parallele Achse des letzteren und ν der Neigungswinkel der Ebene P gegen die Projectionsebene ist [1]).

Wir wählen die Ebene P als Constructionsgrundriss und benutzen wieder zur raschen Darstellung conjugirter Durchmesser von P einen Kreis $\varkappa$ mit dem Punkte ε. Die Lichtstrahlenrichtung ist durch Al und Al' vollkommen bestimmt. Um den in Fig. 2 im Grundrisse dargestellten Teil der ganzen Beleuchtungsconstruction auch hier ausführen zu können, müssen wir die Ebene P um x so lange drehen, bis sie zur Bildebene parallel wird. Dabei kommt l' nach (l'), so dass wir über $S'(l')$ als Durchmesser den Kreis (k) führen können.

Sollen die in einer beliebigen Seitenlinie M_1 des Hyperboloides liegenden Isophotenpunkte dargestellt werden, so bestimme man die umgeklappte Stellung (t_1) der entsprechenden Tangente t_1 $[t_1 \beta \alpha$, $\beta(\beta) \parallel AB$, $\alpha(\beta)(t_1)]$, und den zugehörigen Normalschnitt (N_1) des Berührungscylinders $[(N_1)$ senkr. auf $(t_1)]$. Construirt man noch ein für allemal die wahre Grösse ci_2 der Projicirenden ll'

$$[ci = ll', \quad ii_2 \parallel x]$$

so hat man alle Angaben zur Darstellung des in N_1 zu construirenden Tangentialbüschels T_{N_1}. Um die einzelnen Büschel bequem zeichnen zu können, legen wir auch bei axonometrischer Darstellung alle Scheitel derselben auf einen Punkt S der Flächenachse AB und drehen alle Normalschnitte vorerst um AB in die Lage M und aus dieser um die durch S gehende, zu x parallele Gerade m in eine zur Bildebene parallele Stellung. Wird jetzt der Tangentialbüschel T_{N_1} auf die im §. 2. angegebene Art dargestellt

$$[S\lambda = ci_2, \quad \lambda g \parallel x, \quad \lambda l_0 = A(l'); \quad \lambda\lambda_1 = S'd_1 \quad \text{u. s. w.}]$$

und um m in die Ebene M zurückgedreht, so müssen die Projectionen der beiden congruenten Tangentialbüschel affin sein. Denkt man sich hierauf den Normalschnitt N_1 des Berührungscylinders samt dem in seiner Ebene liegenden Büschel T_{N_1} aus der Ebene M in die Ebene N_1 zurückgedreht und von hier auf die Ebene M so projicirt, dass sich M als Projection von N_1 ergibt, so muss der

---

1) S. d. Verf. „Constructionen über Flächen II. Grades in allgemeiner Parallelprojection" (Progr. d. öffentl. Oberrealschule i. d. Josefstadt in Wien, 1881|2).

dadurch in der Ebene M entstehende Tangentialbüschel T_M ebenfalls zu dem Büschel T_{N_1} affin sein; SA ist dabei die Affinitätsachse. Nun sind parallel zu den Strahlen der Projection des Büschels T_M an das Bild M Tangenten zu führen und ihre Berührungspunkte zu bestimmen.

Die auf M entstehenden Berührungspunkte werden aber schneller erhalten, wenn man statt der Richtungen der Tangenten die durch S gehenden Richtungen der Normalen bezüglich des Bildes M bestimmt. Dies geschieht dadurch, dass man die ganze soeben besprochene Construction der Tangentialbüschel in einer um 90° gedrehten Stellung ausführt. Fällt man dann von S eine Normale auf die Asymptote F von M und zieht durch ihren Fusspunkt δ die zu x parallele Gerade $\{r_1\}$, so liefert der Normalbüschel S_M auf $\{r_1\}$ eine Punktreihe, die, mit 0 durch Strahlen verbunden, auf M die gesuchten Berührungspunkte gibt.

Denkt man sich den Tangentialbüschel T_{N_1} im Normalschnitte N_1 durch eine zu AS parallele Gerade g_N geschnitten, welche von S die Entfernung $A(e_1)$ hat, so entspricht dieser Punktreihe in dem Büschel T_M diejenige g_M, welche von S die Entfernung Aa hat. Werden diese beiden Büsehel in einer zur Bildebene parallelen Lage construirt, und dreht man dann ihre Ebene um m, bis sie in die Lage M kommt, so werden die Projectionen der Punktreihen g_N und g_M proportionale Verkleinerungen der Punktreihen g_N und g_M sein. Anstatt aber die Punktreihe g_M mit Beibehaltung ihres Trägers im Verhältnisse $Ci_2 : Ci$ zu verkleinern, kann man zur Projection des Büschels T_M auch gelangen, wenn man die Punktreihe g_M beibehält und ihre Entfernung Aa vom Scheitel S im Verhältnisse $Ci : Ci_2$ vergrössert

$$[C\gamma = Aa, \quad \gamma\gamma_2 \parallel x]$$

Da wir aber die genannten Büschel in einer um 90° gedrehten Stellung darstellen, so wollen wir, um die ganze Construction soweit möglich zu vereinfachen, den Scheitel S so annehmen, dass die Strecke $S\xi$ gleich wird der Strecke $C\gamma_2$. Man kann ja das rechtwinkelige Dreieck $S\xi\delta$, von welchem die Richtung der Hypotenuse und die Kathete $S\xi$ bekannt sind, vorerst weiter oben construiren und es dann so lange verschieben, bis der Eckpunkt δ in die Asymptote T fällt. Wir zeichnen nun bei dem Normalbüschel S_{N_1} den Träger $[r_1]$ jener Punktreihe, welche der Punktreihe g_N des Tangentialbüschels entspricht, in der Entfernung $A(e_1)$ von S. Die der Punktreihe $[r_1]$ congruente in der Projection des Normalbüschels S_M muss dann auf $\{r_1\}$ liegen. Weil aber der durch die Punktreihe $\{r_1\}$ und den Mittel-

punkt 0 des Hyperboloides bestimmte Strahlenbüschel ebenfalls zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegt, so bestimmen wir zunächst auf M nur einen Berührungspunkt, z. B. den Punkt 4, und construiren dann mittelst der beiden Strahlen $S4$ und 04 der zwei zuletzt genannten Büschel die perspectivische Achse r_1 derselben.

Die auf M entstehenden Punkte sind schliesslich auf die Seitenlinie M_1 zu projiciren. Denken wir uns dabei auch den Centralbüschel $0r_1$ mitprojicirt, so entsteht in der Ebene M_1 ein neuer Centralbüschel $0\varrho_1$, dessen Bild zum Büschel S_{N_1} gleichfalls perspectivisch liegen muss. Wir projiciren deshalb zunächt wieder nur den Punkt

$$4[4a\sigma, \quad a_1\sigma 4, \quad 44 \parallel a a_1]$$

führen durch den neuen Punkt 4 den Strahl des Büschels $0\varrho_1$ und bestimmen aus den beiden einander entsprechenden Strahlen der Büschel S_{N_1} und $0\varrho_1$ den Punkt 4 ihrer Affinitätsachse ϱ_1. Einen zweiten Punkt q derselben bekommt man auf der Geraden r_1, wenn man $0q$ parallel zu aa_1 zieht. Der Normalbüschel S_{N_1} ist also gleichzeitig durch die beiden Träger r_1 und ϱ_1 zu schneiden. Aus der Punktreihe r_1 ergeben sich dann die Punkte auf M. Nun werden die durch die Punktreihe ϱ_1 gehenden Strahlen geführt und schliesslich durch die auf M liegenden Punkte Parallele zu aa_1 gezogen.

Auch bei axonometrischer Darstellung lässt sich diejenige Seitenlinie, welche die Lichtpole der Fläche enthält, leicht finden. Ebenso ist es auch hier zweckmässig, den Meridian, welcher den Lichtstrahl Al enthält und auch den Hauptschnitt M der Fläche nicht unbehandelt zu lassen. Die in § 2. angegebene Construction von Isophotentangenten ist auch bei axonometrischer Darstellung durchführbar.

Von grosser Wichtigkeit für das Zeichnen der Isophoten sind auch die in der Contour liegenden Isophotenpunkte. Sie lassen sich einfach als Isophotenpunkte eines auf der Bildebene normal stehenden Cylinders mittelst eines Normalbüschels darstellen, dessen Richtung und Radius durch Sl angegeben wird, und dessen Scalenlänge gleich Sl_0 ist. Dabei ist es am zweckmässigsten, vorerst die Contour und ihre Asymptoten T_c zu construiren[1]), dann den Scheitel des erwähnten Normalbüschels nach S zu verlegen, von S eine Normale auf T_c zu fällen und in der mehrerwähnten Weise fortzufahren.

1) S. d. Verf. „Constructionen über Flächen II. Grades in allgemeiner Parallelprojection".

B. Für andere Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind.

§. 5.

Wird ein windschiefes Hyperboloid axonometrisch so dargestellt, dass eine reelle Axe x_1 der Fläche parallel zur Projectionsebene ist[1]), so kann man bei demselben die im vorigen Paragraphen behandelte Beleuchtungsconstruction mit nur wenigen Aenderungen durchführen. Der gemeinsame Scheitel der verschiedenen Normalbüschel S_N wird hier auf einen Punkt S_n der Flächenachse x_1 verlegt und die Hauptschnittebene M, in welcher diese Büschel darzustellen sind, muss man sich um x_1 so lange gedreht denken, bis sie zur Projectionsebene parallel wird. Man kann dann wieder durch S_n Normale zu den Asymptoten T des Bildes M ziehen und die durch ihre Fusspunkte gehende Gerade $\alpha\beta$ in der im vorigen Paragraphen kennen gelernten Weise benutzen. Auch bei dieser Fläche muss der sich bezüglich des Hauptschnittes M ergebende Centralbüschel 0_M zu dem ursprünglich zu construirenden Normalbüschel S_N perspectivisch sein. Da aber der sich auf M_1 beziehende Centralbüschel in diesem Falle zum Büschel S_{N_1} nicht perspectivisch liegt, so muss er aus dem Büschel 0_M durch Projection direct bestimmt werden. Bei dem windschiefen Hyperboloide soll man auch wegen des einfachen Vorganges die Isophotenpunkte des elliptischen Hauptschnittes construiren; dabei wird der entsprechende Tangentialbüschel in der umgelegten Lage des Constructionsgrundrisses P ausgeführt und mit Benutzung einer zur Projectionsebene parallelen Schnittgeraden in die räumliche Stellung aufgedreht. Die hierauf den Strahlen des Büschels auf P entsprechenden Berührungspunkte erhält man mittelst des Kreises $\varkappa$; sie werden schliesslich von P auf den elliptischen Hauptschnitt der Fläche central projicirt.

Ist ein Ellipsoid bei axonometrischer Darstellung durch einen Hauptschnitt P und die zu ihm normale Flächenachse BC gegeben, so betrachtet man wieder P als Constructionsgrundriss und legt die Normalbüschel durch einen auf der Verlängerung von BC liegenden Punkt S. Ebenso wird auch bei axonometrischer Darstellung das über BC geführte kreisförmige Bild M der ganzen Construction zu Grunde gelegt. Wenn irgend eine Seitenlinie M_1 behandelt wird, so ist auch hier der die auf M liegenden Punkte liefernde Centralbüschel A_M zu dem zuerst zu construirenden Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch, und denkt man sich bei dem Projiciren der Linie M

1) Vergl. Fig. 5 unserer „Allg. Theorie d. Isophotentangenten . . .“

auf die Seitenlinie M_1 auch den Büschel A_M mitprojicirt, so ergibt sich in der Ebene M_1 ein neuer Büschel A_{M_1}, dessen Bild gleichfalls zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegt. Bei der Construction der Isophotenpunkte benutze man wieder beide perspectivische Achsen.

Auch bei einem axonometrisch dargestellten elliptischen Paraboloide bietet unsere Beleuchtungsconstruction keine neuen Schwierigkeiten. Weil auch in diesem Falle die Bilder der beiden dem Hauptschnitt M und der Seitenlinie M_1 entsprechenden Parallelbüschel zu dem zugehörigen Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegen, so kann der in §. 2. behandelte Vorgang auch bei axonometrischer Darstellung ohne weiters ausgeführt werden. Die beiden perspectivischen Achsen sind in diesem Falle sogar parallel.

Unsere Construction lässt sich bei axonometrischer Darstellung auch dann leicht anwenden, wenn die die beleuchtete Fläche bestimmenden gegebenen Linien P und M nicht der II. Ordnung angehören.

IV.

Beleuchtungs-Constructionen bei perspectivischer Darstellung.

§. 6.

Die behandelten Flächen nehmen bei perspectivischer Darstellung die einfachste Lage dann ein, wenn die Flächenachse AB zur Bildebene parallel ist; die Fluchtlinie $\mu\nu$ der Parallelcurven muss dann durch den Augpunkt gehen. Wir nehmen an, dass von einer solchen Fläche die Achse AB, eine Parallelcurve P und die zur Bildebene parallele Seitenlinie M gegeben sei. Durch den Schnittpunkt A von AB mit der Ebene P führen wir das Bild l eines Lichtstrahles und auch das Bild l' seiner orthogonalen Projection auf die Ebene P. Um dann die den einzelnen Seitenlinien M_1 entsprechenden Tangentialbüschel, deren gemeinsame Scheitel wir auch bei perspectivischer Darstellung auf einen Punkt S der Flächenaxe AB verlegen, construiren zu können, drehen wir die Ebene P, welche auch hier als Constructionsgrundriss betrachtet wird, analog der axonometrischen Darstellung um die Schnittkante M' der Ebenen P und M in eine zur Bildebene parallele Lage; sie wird dadurch die Erweiterung der Ebene M. Wir werden wieder die Normalschnitte der Berührungscylinder samt den entsprechenden

Normalbüscheln drehen, bis sie in die Ebene M zu liegen kommen. Man kann überhaupt, damit die Erklärung des Verfahrens soweit möglich einfach werde, M als in der Bildebene liegend betrachten. Dadurch gestaltet sich die Construction der einzelnen Normalbüschel sogar einfacher, als bei axonometrischer Darstellung. Ebenso bietet die schliesslich vorzunehmende Projection der auf M entstehenden Punkte auf die Seitenlinie M_1 gar keine Schwierigkeiten.

Das in den früheren Paragraphen bezüglich der Lichtpole und einiger speciell liegender Seitnnlinien gesagte hat auch bei perspectivischer Darstellung seine volle Giltigkeit. Ebenso lassen sich bei derselben die Isophotenpunkte jener Parallelcurven leicht bestimmen, in welchen die gegebene Fläche von zu AB parallelen Cylindern berührt wird.

Bei der Behandlung des Ellipsoides hat man, wie bei axonometrischer Darstellung, über AB den Kreis M zu führen und den Umstand zu benutzen, dass die beiden den Linien M und M_1 entsprechenden Centralbüschel wieder zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegen. Ebenso einfach gestaltet sich die Behandlung der anderen Flächen II. Ordnung.

V.

Beleuchtungs-Construction für das windschiefe Paraboloid.

A. Bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

§. 7.

Bei dem in Fig. 5 gezeichneten hyperbolischen Paraboloide wollen wir zunächst den als eine Gerade sich ergebenden Grundriss der Selbstschattengrenze 0 bestimmen. Der im Hauptschnitte P liegende Punkt derselben ergibt sich auf die bei dem elliptischen Paraboloide angegebene Art, und um den im zweiten Hauptschnitte Q liegenden Punkt der Selbstschattengrenze zu erhalten, bestimmen wir gleich sämtliche Isophotenpunkte von Q. Zu dem Behufe denken wir uns Q in dem in die horizontale Projectionsebene umgeklappten Kreuzrisse dargestellt. Um aber diesen Hauptschnitt nicht zeichnen zu müssen, führen wir r normal zu x' und machen oF gleich der Subnormale der Parabel Q

$$[\varrho\alpha = 2\overline{B''C''},\quad C'''F \text{ senkr. auf } C'''a]$$

In F construiren wir nun den entsprechenden Normalbüschel, welcher den Kreuzriss von Sl zur Richtung und zum Radius und die wahre Grösse von Sl zur Scalenlänge hat, schneiden ihn durch die Gerade r und projiciren die sich dadurch ergebenden Punkte in der Richtung x' nach Q'. Durch die beiden Punkte der Selbstschattengrenze ergibt sich schliesslich der Grundriss derselben.

Der weiteren Construction der Isophoten legen wir das zur verticalen Projectionsebene parallele, aus lauter congruenten Parabeln bestehende Curvensystem zu Grunde. Die Richtungen $t_1, t_2, t_3 \ldots$ der dann den einzelnen Schnitten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ entsprechenden Umhüllungscylinder bekommen wir mittelst des Hauptschnittes Q im Kreuzrisse. Für den Schnitt P_1 ergibt sich schon in $\gamma_1 F$ die Richtung der Normalen seines in Q liegenden Punktes und in t_1''' [t_1''' senkr. auf $\gamma_1 F$] die Tangentenrichtung, so dass $\sigma\delta_1$ gleich der Subtangente und die Hälfte davon gleich der Abscisse des in P_1 liegenden Punktes des Hauptschnittes Q ist.

Wir legen sämtliche Normalschnitte, welche in diesem Falle normal zur Kreuzrissebene sind, durch einen Punkt S der Flächenachse und drehen dieselben um die Gerade m so lange, bis sie in die Ebene P zu liegen kommen. Um in dieser Stellung den Normalbüschel für den Normalschnitt N_1 zu erhalten, zeichnen wir ein für allemal über $S''' l'''$ als Durchmesser den Kreis k und tragen die sich dann ergebende Strecke $S''' d_1$ auf der durch l'' und l' gehenden Geraden g nach $\lambda\lambda_1$ auf. $S''\lambda_1$ gibt schon die Richtung und den Radius des betreffenden Büschels an. Schneidet man denselben durch eine zu x_1 parallele Gerade ϱ_1, welche von S'' dieselbe Entfernung hat, wie der Brennpunkt des parabolischen Normalschnittes N_1 von seiner Directrix, so kann man die sich auf ϱ_1 ergebenden Punkte durch zu x normale Ebenen auf N_1 projiciren. Durch die dadurch auf N_1 entstehenden Punkte gehen aber die Isophoten des Berührungscylinders, welche ebenfalls in den erwähnten Ordinalebenen liegen und den Schnitt P_1 in den gesuchten Isophotenpunkten treffen. Beide Projectionen der letzteren müssen demnach in den Strahlen liegen, welche man durch die Punktreihe ϱ_1 normal zu x_1 führt. Die Gerade ϱ_1 wird am einfachsten erhalten, wenn man durch den auf P_1 liegenden Punkt 0 der Selbstschattengrenze den zu x_1 normalen Strahl zieht und denselben mit dem Nullstrahle des Normalbüschels zum Schnitte bringt. Um die Aufrisse der gesuchten Isophotenpunkte zu bekommen, hat man schliesslich die Hälfte der Subtangente $\sigma\delta_1$ von den sich auf P'' ergebenden Punkten aus nach aufwärts aufzutragen. Damit man aber die Parabel P'' nicht zu erweitern braucht, ist es zweckmässig, statt dessen die entsprechende

Strecke von den auf P_2'' entstehenden Punkten aus nach abwärts aufzutragen.

Die den normal beleuchteten Punkt enthaltende Schnittebene P_3 bekommt man, wenn man $S''' l'''$ bis zur Geraden r verlängert.

Das in diesem Paragraphen behandelte Verfahren lässt sich auch in ungeänderter Weise auf das elliptische Paraboloid anwenden.

B. Bei axonometrischer Darstellung.

§. 8.

Der zuletzt eingeschlagene Vorgang ist besonders geeignet, in einem axonometrischen Bilde des hyperbolischen Paraboloides die Isophoten direct zu liefern. In Fig. 6 der Taf. III. ist von einer solchen Fläche ein Stück axonometrisch dargestellt, welches in derselben Weise begrenzt ist, wie das in Fig. 5 bezeichnete[1]), wobei B den Flächenscheitel und BA die Flächenachse vorstellt.

Weil die Constructionen, welche früher im Kreuzrisse ausgeführt wurden, jetzt in der Hauptschnittebene yz zu machen sind, projiciren wir die Lichtstrahlenrichtung $0l$ auf diese Ebene

$$[l'\beta \parallel x, \quad \beta l''' \parallel z, \quad l l''' \parallel x]$$

und stellen das ganze in ihr auszuführende Constructionsgebilde in wahrer Grösse in einer Nebenfigur 6a dar. Verlegt man nach $B\sigma$ die Achse und nach B den Scheitel des genannten Hauptschnittes, so hat man die wahren Grössen von

$$CB''[BB'' \parallel y] \text{ und } BB'' \text{ nach } B\sigma \text{ [Fig. 6a]}$$

beziehungsweise auf σC aufzutragen

$$B\alpha = B\sigma$$

zu machen und CF normal zu $C\alpha$ zu führen, um in σF die Subnormale für den Hauptschnitt CB zu erhalten. Damit sich in der Nebenfigur die Projection Fl''' der Lichtstrahlenrichtung ergibt, tragen wir die wahren Grössen von $\beta l'''$ und 0β beziehungsweise nach Fb und bl''' auf.

---

1) S. d. Verf. „Constructionen über Flächen II. Ordnung in allg. Parallelprojection".

Auch bei axonometrischer Darstellung ist es zweckmässig, vorerst die auf dem hyperbolischen Grenzschnitte entstehende geradlinige Projection $0'$ der Selbstschattengrenze zu construiren. Der auf Q' liegende Punkt derselben ergibt sich, wenn man in der Nebenfigur die Gerade Fo normal zu Fl''' führt und die sich dadurch ergebende Ordinate σo mit der entsprechenden Verkürzung auf Q' nach Ao' aufträgt. Einen zweiten, im Hauptschnitte P liegenden Punkt der Selbstschattengrenze erhält man, wenn man an den Grenzschnitt P_2 eine zu $l\beta$ parallele Tangente führt, ihren Berührungspunkt o bestimmt und dann oo' parallel zu z und $o'o'$ parallel zu y führt. Fallen die beiden construirten Punkte des Grundrisses der Selbstschattengrenze zu nahe an einander, so kann man auch mit Benutzung der Grenzhyperbel die zu $0l'$ conjugirte Richtung suchen.

Um nun die Isophotenpunkte der einzelnen zu P parallelen Flächenschnitte P_1, P_3, P_4 . . . zu erhalten, bestimmen wir nach dem aus der Figur 5 ersichtlichen Verfahren vorerst die entsprechenden Punkte auf dem Grenzschnitte P_2 und projiciren sie dann auf die Schnitte P_1, P_3, P_4 . . . Aus Fig. 5 ergibt sich, dass man die aus S'' beschriebenen concentrischen Kreise samt den aus ihnen entstehenden Normalbüscheln, Punktreihen und Parallelbüscheln auch als in der Ebene P_2 liegend betrachten kann. Wir machen von diesem Umstande bei der axonometrischen Darstellung Gebrauch und verlegen dem entsprechend den Scheitel S sämtlicher Normalbüschel in die Parabelachse $0C$. Um dann die einzelnen Büschel in wahrer Grösse construiren zu können, denken wir uns die Constructionsebene P_2 zuerst um $0C$ so lange gedreht, bis x parallel zur Bildebene wird, und hierauf um die durch S parallel zu letzterer gehende Gerade m so lange gedreht, bis die Ebene P_2 in eine zur Bildebene parallele Stellung kommt. In dieser Lage ist nun die Construction der Fig. 5 auszuführen. Wir tragen deshalb die wahre Grösse von $\beta l'$ nach $S\lambda$ auf, ziehen λg parallel zu z und tragen Fl''' [Fig. 6a] nach $\lambda\delta$ auf, um in $S\delta$ die wahre Grösse der Strecke Sl zu erhalten.

Soll nun der durch P_1' gehende, zu P_2 parallele Schnitt P_1 behandelt werden, so hat man die wahre Grösse von $A\gamma_1$ in der Nebenfigur nach $\sigma\gamma_1$ aufzutragen und $\gamma_1 Fd_1$ zu führen. Die sich dadurch ergebende Strecke Fd_1 wird dann in der Hauptfigur nach $\lambda\lambda_1$ aufgetragen und aus $S\lambda_1$ resultirt der dem Schnitte P_1 entsprechende Normalbüschel S_{N_1}. Letzterer ist nun in einer bestimmten Entfernung von S durch eine zu m parallele Gerade $[r_1]$ zu schneiden. Wird die den Büschel S_{N_1} und die Punktreihe $[r_1]$ enthaltende Constructionsebene nach einander um die Achsen m und z gedreht,

bis sie in die Ebene P_2 zu liegen kommt, und durch die sich dadurch ergebende neue Lage $\{r_1\}$ der Punktreihe $[r_1]$ der zu s parallele Strahlenbüschel gezogen, so muss der Letztere zu dem ursprünglich construirten Büschel S_{N_1} perspectivisch sein. Die perspectivische Achse ϱ_1 beider Büschel, welche zu m parallel ist, wird am schnellsten erhalten, wenn man durch den sich auf P_1' mit Benutzung der Selbstschattengrenze der Fläche ergebenden Punkt o' die zu y parallele Gerade $o'o'$ führt und dann $o'o$ parallel zu z zieht. Schneidet man jetzt den Büschel S_{N_1} mit der Geraden ϱ_1 und zieht durch die sich dadurch ergebenden Punkte Parallele zu z, so erhält man die gesuchten Punkte auf P_2. Da nun letztere auf den Flächenschnitt P_1 zu projiciren sind, so führe man ac' parallel zu y und $c'c$ parallel zu z. ca gibt dann die Richtung und Länge der betreffenden projicirenden Geraden an.

Auch hier kann man den den Lichtpol der Fläche enthaltenden Schnitt bestimmen, wenn man von der Nebenfigur ausgeht.

Um die sehr wichtigen Isophotenpunkte der Contourparabel zu erhalten, bestimme man vorerst ihren Scheitel, ihre Achse und die Subnormale. Der dann etwa im Brennpunkte der Contour zu construirende Normalbüschel hat Ol zur Richtung und zum Radius und od zur Scalenlänge.

Der soeben behandelte Vorgang lässt sich auch bequem bei perspectivischer Darstellung durchführen [1]).

Bielitz in Oesterr.-Schlesien, im Februar 1891.

---

1) Die in dieser Abhandlung vorgeführten Constructionen der Isophoten hat der Verfasser bei windschiefen Flächen II. Ordnung bereits im Jahre 1877 in seiner Abhandlung „Ueber die Construction der Linien von gleicher Beleuchtungsstärke auf windschiefen Flächen", welche sich als Manuscript im Archiv der „k. k. wissenschaftlichen Prüfungscommission für das Lehramt an Gymnasien und Realschulen zu Wien" befindet, durchgeführt.

VIII.

Zur Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Integrale.

Von

Emil Oekinghaus.

I.

Die nachfolgenden Entwickelungen werden sich auf einige Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale beziehen und zwar auf Grund der von uns schon früher aufgestellten Integralfunctionen, weshalb wir in Kürze die Betrachtungen wiederholen wollen, welche zu diesen hyperelliptischen Functionen hinüberführen. Ueber eine Merkwürdigkeit der Cassinischen Curve berichten wir am Schlusse.

Es sei die Gleichung $n$ten Grades

$$\varDelta = x^n + ax^{n-1} \dots px + q = 0$$

zugrunde gelegt.

Mit dieser sind die folgenden Relationen verknüpft, welche wir schon früher für den 4. Grad entwickelt haben, aber allgemein für jeden Grad gelten:

$$\Sigma \frac{x_k}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x}} = 0, \quad k = 0, 1, 2 \dots k-2$$

Enthält die obige Gleichung noch andere Variabele y etc., so ergiebt die Differentiation von $\varDelta(x, y)$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}dx + \frac{\partial \Delta}{\partial y}dy = 0$$

und in Benutzung dieser auf die obige Identität resultirt

$$\Sigma x^k \frac{dx}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}} = 0$$

Es sei

$$\Delta x, y = X_1 y^2 + 2X_2 y + X_3 = 0$$

worin die X Functionen von x sind; dann ist wegen

$$X_1 y + X_2 = \sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}$$

$$\Sigma \frac{x^k dx}{X_1 y + X_2} = \Sigma \frac{x^k dx}{\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} = 0$$

also auch

$$\Sigma \int \frac{x^k dx}{\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} = C$$

Wir werden diese Relation auf eine Gleichung anwenden, welche wir in der Abhandlung: „Trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen" bei der Untersuchung der Verhältnisse zwischen Kreis und Kegelschnitt aufgestellt und als Cosinusresolvente bezeichnet haben, welche u. a. auch zur Trisection des Winkels führte.

Wir nennen die 4 Winkel, welche die 4 Radien des Kreises nach den Schnittpunkten desselben mit dem Kegelschnitt mit der Centrale R beider Curven bilden, $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$. R habe gegen die grosse Achse die Neigung φ_1, und der Radius des Kreises sei s. Die Verbindungsgeraden von Kreis und Kegelschnitt schliessen in ihrem vollständigen Vierseit drei Winkel $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ein, für welche wir a. a. O. folgende Gleichung aufgestellt haben:

$$\cos\gamma^3 + \frac{2R^2(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) - 2a^2b^2 + (a^2+b^2)s^2}{c^2s^2}\cos\gamma^2$$

$$+ \left(\frac{4R^2}{c^2s^2}(a^4\sin\varphi^2 + b^4\cos\varphi^2) - 1\right)\cos\gamma$$

$$+ \frac{2R^2\frac{a^2+b^2}{c^2}(a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2) + 2a^2b^2 - (a^2+b^2)s^2}{c^2s^2} = 0$$

Im Anschluss an die vorhin aufgestellte Integralfunction betrachten wir $\cos\gamma$ als x und die in der vorliegenden Gleichung vorkommenden Parameter R, s, φ als y, wodurch wir verschiedene neue Functionen erhalten. Ist also zunächst

$$R = y$$

so erhält man schliesslich nach gehöriger Reduction der Form $X_2^2 - X_1 X_3$ nach Einführung von

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \tfrac{1}{2}(1-\cos\gamma)$$

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\frac{c^2}{a^2(1-b^2/s^2)}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\left(1+\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi^2\right)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)} = C$$

welches Integral auch noch unter dem Zeichen mit

$$\cos\gamma = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$

multiplicirt werden darf.

Die Σ bezieht sich, wie man sieht, auf drei Integrale, deren Amplituden $\tfrac{1}{2}\gamma_1\,\tfrac{1}{2}\gamma_2\,\tfrac{1}{2}\gamma_3$ sind. Die Summe dieser Integrale ist für alle Kreise von gleichem Radius s und gleicher Neigung φ desselben gegen die grosse Achse eine constante Grösse.

Man erkennt sofort, dass die vorstehende Relation ein Additionssatz ist für diejenigen Abel'schen Integrale, bei denen unter dem Integralzeichen eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck fünften Grades in Bezug auf die Integrationsvariabele steht, wie sich ergiebt, wenn wir

$$\cos\gamma \quad\text{oder}\quad \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = x$$

setzen. Man hat nämlich

$$\Sigma\int\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-u^2x)}} = C$$

welche Form an schon bekannte und untersuchte erinnert.

Um nun zu einem bestimmten Theorem zu kommen, gehen wir auf die kubische Gleichung für $\cos\gamma$ zurück, indem wir die Relation

$$\cos\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2}{1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2}$$

darin einführen und demgemäss folgende Gleichung erhalten:

$$b^4\cos\varphi^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^6-(a^2b^2\cos\varphi^2-(a^2+b^2)b^2\sin\varphi^2+R^{-2}b^2c^2(a^2-s^2))\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^4$$
$$+(a^2b^2\cos\varphi^2-(a^2+b^2)a^2\sin\varphi^2-R^{-2}a^2c^2(b^2-s^2))\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2-a^4\sin\varphi^2=0$$

Wir setzen

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad \beta^2 = \frac{c^2}{a^2}\,\frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}, \quad \gamma^2 = 1+\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi^2$$

also

$$\alpha'^2 = 1-\alpha^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \gamma_1{}^2 = -\alpha'^2\cot\varphi^2$$

Aus dem Absolutglied ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = \frac{a^4}{b^4}\operatorname{tg}\varphi^2$$

also

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = -\frac{1}{\alpha'^2\gamma'^2}$$

Diese Relation bildet eine erste Bedingungsgleichung zwischen den Amplituden der Function. Es tritt noch eine zweite auf. Wir bilden aus der letzten Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$ die Summen $\Sigma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$ und $\Sigma\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma^4$ und man erhält durch passende Zusammenstellung zunächst

$$\alpha'^2\gamma'^2\,\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma'^2 - \beta'^2\,\Sigma\cot\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (1+\alpha'^2)(\alpha'^2+\beta'^2)+\gamma'^2(1+\beta'^2)$$

oder auch, wenn wir durch $\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2$ dividiren und die obige Relation benutzen,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2\left(\frac{1}{\beta^2}+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2\right) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2\left(\frac{1}{\beta^2}+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2\right) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2\left(\frac{1}{\beta^2}+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2\right)$$
$$= (1+\alpha'^2)(\alpha'^2+\beta'^2)+\gamma'^2(1+\beta'^2)$$

Ist diese Bedingungsgleichung zwischen den drei Amplituden $\frac{1}{2}\gamma_1$ $\frac{1}{2}\gamma_2\frac{1}{2}\gamma_3$ und den Moduln $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ zugleich mit der zweiten

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = -\frac{1}{\alpha'^2\gamma'^2}$$

erfüllt, so ist die Summe der drei hyperelliptischen Integrale

$$\Sigma\int\frac{d\,\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{(1-\alpha^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)(1-\beta^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)(1-\gamma^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)}} = C$$

stets eine constante Grösse. Diese Relationen bilden also zusammen ein Additionstheorem dieser Integrale dar, deren Amplituden eine geometrische Bedeutung besitzen.

Um die Constante zu bestimmen, bemerke man, dass die Relationen für alle R und also auch für

$$R = 0$$

gültig sind. Damit rückt aber das Kreiscentrum in den Mittelpunkt des Kegelschnitts und die entsprechenden Wurzeln der kubischen Gleichung sind

$$\cos\gamma_1 = +1, \quad \cos\gamma_2 = -1, \quad \cos\gamma_3 = \frac{2a^2b^2 - s^2(a^2+b^2)}{c^2s^2}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma_3^2 = \frac{a^2}{c^2}\left(1-\frac{b^2}{s^2}\right)$$

Die Constante setzt sich also aus 2 Integralen zusammen. Das eine ist wegen

$$\tfrac{1}{2}\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$$

ein vollständiges, welches wir $H\frac{1}{2}\pi$ oder K nennen; das andere möge die Amplitude $\frac{1}{2}\sigma$ haben, hervorgehend aus

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{a^2}{e^2}\left(1-\frac{b^2}{s^2}\right) = \frac{1}{\beta^2}$$

und die Integralfunction wird nun zu

$$H\tfrac{1}{2}\gamma_1 + H\tfrac{1}{2}\gamma_2 + H\tfrac{1}{2}\gamma_3 = H\tfrac{1}{2}\pi + H\tfrac{1}{2}\sigma$$

Der bisher vorausgesetzte Kegelschnitt ist eine Ellipse, das umgekehrte Vorzeichen von b^2 ergiebt also eine Hyperbel.

Die analytischen Determinationen stehen also in Abhängigkeit von den geometrischen.

Wie schon bemerkt, kann man unterm Integralzeichen noch mit $\sin\frac{1}{2}\gamma^2$ multipliciren, ohne dass das Theorem seine Gültigkeit verliert.

Bemerkenswert ist, dass die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi$$

von der Centrale R und dem Halbmesser des Kreises s unabhängig ist. Sie gilt auch noch für die Asymptoten der Hyperbel mit den Halbachsen 0, also für zwei sich schneidende Geraden unter dem Winkel γ_1 oder γ_2 etc, für welche also auch $\frac{b}{a}$ bekannt ist. Die obige Relation bietet dann noch Veranlassung zu interessanten Entwickelungen zwischen einem Kreise und zweien ihn schneidenden Graden.

Ferner möge noch bemerkt werden, dass die zu Anfang aufgestellte Cosinusgleichung in der Form

$$\cos\gamma^3 + \alpha\cos\gamma^2 + \beta\cos\gamma + \gamma = 0$$

durch Gleichsetzen entsprechender Coefficienten zu einer geometrischen Auflösung dieser und ähnlicher Gleichungen dienen kann, freilich unter Beachtung, dass eine Wurzel negativ sein muss. Die Achsen des Kegelschnitts a, b sind im allgemeinen beliebig. Das Kreiscentrum sei x, y, der Radius $= s$

$$x^2 = \frac{a^4}{c^2}\,\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)}{P}, \quad y^2 = \frac{b^4}{c^2}\,\frac{(1-\alpha+\beta-\gamma)}{P}$$

$$s^2 = \frac{8a^4b^4}{c^6P}$$

$$P = \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)^3 + \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)^2\alpha + \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)\beta + \gamma$$

Die Wurzeln γ sind, wie schon angegeben, die 3 Winkel des von Kreis und Kegelschnitt gebildeten Vierseits.

Liege z. B. vor

$$\cos\gamma^3 - \tfrac{1}{2}\cos\gamma^2 - \tfrac{1}{4}\cos\gamma + \tfrac{1}{18} = 0$$

so würden für die gleichseitige Hyperbel die folgenden Coordinaten bestehen

$$x^2 = \frac{a^2}{2}\,\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)}{\gamma}, \quad y^2 = \frac{a^2}{2}\,\frac{(1-\alpha+\beta-\gamma)}{\gamma}$$

$$s^2 = \frac{a^2}{\gamma}$$

oder für $a = 1$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}, \quad s = 3\sqrt{2}$$

Die Construction des Kreises mit seinem Vierseit ergeben die Winkel γ, oder ausgewertet

$$\cos\gamma_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_2 = \tfrac{1}{3}, \quad \cos\gamma_3 = -\tfrac{1}{3}$$

Für diese Argumente hat man also auch

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{(1-2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)(1-\tfrac{18}{19}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)(1-\tfrac{3}{2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)}} = H\tfrac{1}{2}\pi + H\tfrac{1}{2}\sigma$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{\sqrt{19}}{6}$$

In der zugrunde gelegten Resolvente können wir ferner den Parameter s oder den Kreisradius variabel annehmen und dadurch zu einer neuen Entwickelung hyperelliptischer Integrale gelangen. Nach einer Reihe von Reductionen finden wir

$$\Sigma\int\frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}+\cos\gamma\right)\left\{\left(\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2}+\frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right)R^2-1\right)\cos\gamma^2+\frac{2R^2}{c^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\cos\varphi^2+\frac{a^2}{b^2}\sin\varphi^2\right)\cos\gamma+\frac{R^2}{c^2}(a^2+b^2)\left(\frac{\sin\varphi^2}{b^2}-\frac{\cos\varphi^2}{a^2}\right)+1\right\}}}=C$$

oder

$$\Sigma\int\frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}+\cos\gamma\right)(M+\cos\gamma)(N+\cos\gamma)}}=C$$

$$M=\frac{R^2(a^4\cos\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)+a^2b^2q^2}{R^2c^2(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)-a^2b^2c^2}$$

$$N=\frac{R^2(a^4\cos\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)-a^2b^2q^2}{R^2c^2(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)-a^2b^2c^2}$$

$$q^4=R^4-2c^2R^2\cos 2\varphi+c^4$$

Die Summe der obigen drei Integrale ist stets constant, sofern die Amplituden γ concentrischen Kreisen entsprechen.

Liegt das Kreiscentrum auf der Ellipse, so geht die Relation über in

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\left(1+\frac{b^4}{a^4}\cot\varphi^2\right)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)}}=C$$

und führen wir hierin ein

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\psi=\frac{a}{b}$$

also die neue Variabele ψ, so resultirt die elliptische Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{d\psi}{\sqrt{\left(1-\left(1+\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi^2\right)\cos\psi^2\right)}}=C$$

und es ist

$$\frac{b}{a}\cot\varphi=\cot E$$

wo E die excentrische Anomalie bedeutet.

Man kann endlich in der Resolvente φ als variabel betrachten und die Gleichung in der Form

$$X_1\sin\varphi+X_2\cos\varphi+X_3=0$$

aufstellen, worin X Functionen der Wurzeln sind. Die Integralfunction wird dann

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} = C$$

Die Resolvente nimmt nun die einfache Form

$$X_2 \cos 2\varphi + X_3 = 0$$

an, daher ist

$$\Sigma \int \frac{d \cos\gamma}{\sqrt{(X_2 + X_3)(X_2 - X_3)}} = C$$

worin

$$X_2 = \frac{R^2}{s^2} \cos\gamma^2 + \frac{2R^2}{c^4 s^2}(a^4 - b^4)\cos\gamma + \frac{R^2(a^2+b^2)^2}{c^4 s^2}$$

$$X_3 = -\cos\gamma^3 - (R^2(a^2+b^2) - 2a^2b^2 + (a^2+b^2)s^2)\frac{\cos\gamma^2}{c^2 s^2}$$

$$-\frac{2R^2(a^4+b^4)}{c^4 s^2}\cos\gamma$$

$$+\cos\gamma - \frac{R^2(a^2+b^2) + 2a^2b^2 - (a^2+b^2)s^2}{c^2 s^2}$$

Bei der Bildung der Summe $X_2 + X_3$ und der Differenz $X_2 - X_3$ lässt sich ein Factor $1 - \cos\gamma$, bzhw. $1 + \cos\gamma$ herausheben, deren Product $\sin\gamma^2$ ist; da aber

$$d\cos\gamma = -\sin\gamma\, d\gamma$$

ist, so erhält man schliesslich nach einigen Reductionen die Function

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\cos\gamma^2 + 2\frac{b^2R^2 - a^2b^2 + a^2s^2}{c^2s^2}\cos\gamma + n\right) \times \left(\cos\gamma^2 + 2\frac{a^2R^2 - a^2b^2 + b^2s^2}{c^2s^2}\cos\gamma + n'\right)}} = C$$

$$n = \frac{2R^2b^2(a^2+b^2) - 2a^2b^2c^2 + (a^4 - b^4)s^2}{c^4 s^2}$$

$$n' = \frac{2R^2a^2(a^2+b^2) + 2a^2b^2c^2 + (a^4 - b^4)s^2}{c^4 s^2}$$

$$m = \frac{b^2R^2 - a^2b^2 + a^2s^2}{c^2s^2}, \quad m' = \frac{a^2R^2 - a^2b^2 + b^2s^2}{c^2s^2}$$

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\sqrt{(\cos\gamma^2+2m\cos\gamma+n)(\cos\gamma^2+2m'\cos\gamma+n')}} = C$$

Zwischen den Werten $mm'nn'$ findet folgende Bedingungsgleichung statt:

$$(m+m'-\tfrac{1}{2}(n-n'))^2 = 2(m'-m+1)(n+n')$$

Für $\cos\gamma = x$ ergiebt sich eine Function 6. Grades, deren Radical man folgende Form geben kann

$$s = \sqrt{(1-x^2)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}$$

oder eine entsprechend andere, wenn

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = x$$

eingeführt wird. Die abgeleitete Function gilt für alle Kreise vom Halbmesser s, deren Centra auf einem mit dem Kegelschnitt concentrischen Kreise vom Halbmesser R liegen.

Die Functionen vereinfachen sich bedeutend für eine gleichseitige Hyperbel. Die Constante stellt sich wieder als eine Summe von Integralen dar, deren Amplituden sich aus der speciellen Lage des Kreises ergeben, wonach dessen Mittelpunkt entweder in der X- oder Y-Achse liegen kann, also $\varphi = 0$ oder $= 90^0$ ist.

Wir wählen jetzt als Variabele zwischen Kreis und Ellipse denselben excentrischen Winkel φ, welcher bei der Rectification der Ellipse vorkommt und leiten folgende Gleichung ab:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^4(s^2-R^2-b^2-2bR\sin\alpha)+4Ra\cos\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^3$$
$$+(2s^2-2R^2+2b^2-4a^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2+4Ra\cos\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi+s^2-R^2-b^2$$
$$+2Rb\sin\alpha = 0$$

Nach den von uns früher mitgeteilten Methoden ergiebt sich hieraus die Resolvente

$$\cos\gamma^3 - \frac{2(s^2-R^2)-a^2-b^2}{c^2}\cos\gamma^2 + \left(\frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-1\right)\cos\gamma$$
$$-\frac{2(s^2-R^2+a^2+b^2)}{c^2} - \frac{4R^2}{c^4}(-a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2) = 0$$

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4),\quad \gamma_2 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4) \text{ etc.}$$

Nach den anfangs aufgestellten Relationen betrachten wir hierin $\cos\gamma$ als x und R als y und erhalten nach Durchführung der Rechnungen

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\frac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\frac{c^2}{a^2-s^2}\sin\frac{1}{2}\gamma^2\right)(1-(1+\mathrm{tg}\alpha^2)\sin\frac{1}{2}\gamma^2)}} = C$$

Auch hier haben die γ geometrische Bedeutung. Errichtet man nämlich in den Schnittpunkten von Ellipse und Kreis Normalen zur grossen Achse, so geben ihre Schnittpunkte mit dem die Ellipse umschliessenden Kreise vom Radius a vier Punkte, deren Verbindungsgeraden ein Kreisvierseit liefern mit den durch sie gebildeten Winkeln $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Die Constante C der hyperelliptischen Integralfunction folgt aus der Bemerkung, dass die Function für alle R, also auch für

$$R = 0$$

gilt, wodurch die Wurzeln der Resolvente sich auf

$$\cos\gamma_{12} = \pm 1,\quad \cos\gamma_3 = \frac{2s^2-a^2-b^2}{c^2}$$

reduciren. Also ist hier

$$\gamma_1 = 0,\quad \gamma_2 = 180^{\circ},\quad \sin\frac{1}{2}\gamma_3^2 = \frac{a^2-s^2}{c^2} = \sin\frac{1}{2}\sigma^2$$

Die hyperelliptische Function hat also folgende Form

$$H\frac{1}{2}\gamma_1 + H\frac{1}{2}\gamma_2 + H\frac{1}{2}\gamma_3 = H\frac{1}{2}\pi + H\frac{1}{2}\sigma$$

Hierin ist, wie früher, $H\frac{1}{2}\pi$ das vollständige Integral.

Verallgemeinern wir auch hier wieder das geometrische Theorem zu ein analytisches, indem wir einführen die Moduli

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{a^2}\quad \text{etc.}$$

so gelangen wir wieder zu demselben Satze, den wir als den ersten vorhin aufgestellt haben.

Nehmen wir ferner in derselben kubischen Resolvente α variabel, wonach also jetzt der geometrische Ort der Kreiscentra ein Kreis vom Halbmesser R ist, so führen die bekannten Reductionen auf die Function

$$\Sigma\int\frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\cos\gamma^2-(m+1)\cos\gamma+m+\frac{4R^2a^2}{c^4}\right)\times\left(\cos\gamma^2-(m-1)\cos\gamma-m+\frac{4R^2b^2}{c^4}\right)}} = C$$

$$m = \frac{2(s^2 - R^2) - a^2 - b^2}{c^2}$$

deren Amplituden aus

$$\cos\gamma^3 - m\cos\gamma^2\left(\frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2) - 1\right)\cos\gamma + m$$
$$+ \frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2 - b^2\sin\alpha^2) = 0$$

folgen. Die Constante folgt aus der speciellen Lage des Kreises für $\alpha = 90^0$, es ist dann $\gamma_1 = 0$ und die andern Wurzeln folgen aus

$$\cos\gamma^2 - (m-1)\cos\gamma - m + \frac{4R^2 b^2}{c^4} = 0$$

und diese geben die Amplituden der Integralconstanten.

Ganz allgemein und von geometrischen Rücksichten frei kann man die Function in der Form schreiben

$$\Sigma\int\frac{d\gamma}{\sqrt{(\cos\gamma^2 - (m+1)\cos\gamma + m + g)(\cos\gamma^2 - (m-1)\cos\gamma - m + h)}}$$
$$\frac{4R^2 a^2}{c^4} = g, \quad \frac{4R^2 b^2}{c^4} = h$$

und die Elimination von $\sin\alpha^2$ aus den Wurzelformeln der Resolvente führt auf die Bedingungen

$$\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2 + \cos\gamma_3 = m$$

$$\cos\gamma_1\cos\gamma_2\cos\gamma_3(g-h) + (\cos\gamma_1\cos\gamma_2 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 + \cos\gamma_3\cos\gamma_1)(g+h)$$
$$= 2gh - m(g-h) - (g+h)$$

Sind diese Bedingungen zwischen den 3 Amplituden γ erfüllt, so besteht die Function

$$H\gamma_1 + H\gamma_2 + H\gamma_3 = H\sigma_1 + H\sigma_2$$

während die Amplituden der Integralconstanten aus

$$\begin{matrix}\cos\sigma_1 \\ \cos\sigma_2\end{matrix} = \frac{m-1 \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4h}}{2}$$

folgen. Man kann übrigens statt $\cos\gamma$ auch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$ einführen, wonach z. B.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{a}{b}\cot\alpha$$

und ähnliche andere Ausdrücke sich ergeben.

Alle bisher abgeleiteten Functionen stellen in gewissem Sinne Additionstheoreme hyperelliptischer Integrale dar, deren Amplituden und Moduli geometrische Bedeutung besitzen. In bestimmten Fällen können übrigens auch elliptische Integrale auftreten, beispielsweise, wenn wir die Resolvente der Gleichung der Normalen der Ellipse den Entwickelungen zugrunde legen.

Von einem Punkte $R(\alpha)$ ziehen wir Normalen an die Ellipse und von den 4 Fusspunkten Parallelen zur kleinen Achse b; die Schnittpunkte dieser mit dem die Ellipse umschliessenden Kreise $(r = a)$ liefern durch ihre Verbindungsgeraden ein Kreisvierseit mit den Winkeln $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, welche aus der Gleichung

$$\cos\gamma^3 + \left(\frac{R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2) - 1\right)\cos\gamma + \frac{R^2 ab}{c^4}\sin 2\alpha = 0$$

hervorgehen.

Vergl. die Abhandl.: Trigon. Aufl. biquadr. Gl. 1884.

Wir betrachten α als Veriabele und erhalten nach bekannten Principien

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma^4 - \left(1 - \frac{a^2+b^2}{c^4}R^2\right)\cos\gamma^2 + \frac{a^2b^2R^4}{c^8}}} = C$$

welche auch unter dem Zeichen noch mit $\cos\gamma$ multiplicirt werden darf. Diese Function kann in eine elliptische reducirt werden. Die Constante lässt sich berechnen aus einer speciellen Lage von $R(\alpha)$ Für $\alpha = 90^0$ wird

$$\gamma_1 = 90^0 \quad \text{und} \quad \sin\gamma_2 \quad \text{und} \quad \sin\gamma_3 = \pm\frac{bR}{c^2}$$

welches die Amplituden der Constante sind. Die Reduction wollen wir hier indessen nicht durchführen, da dieselbe leicht ist, aber noch bemerken, dass die obige kubische Gleichung leicht mit der aus

$$\cos 3\gamma = 4\cos\gamma^3 - 3\cos\gamma$$

folgenden

$$\cos\gamma^3 - \tfrac{3}{4}\cos\gamma - \tfrac{1}{4}\cos 3\gamma = 0$$

identificirt werden kann, deren Resultat auf eine Trisection des Winkels mit Hülfe der Normalen der Ellipse führt, was wenigstens theoretischen Wert besitzt.

Das vermittelst der Kegelschnitte und des Kreises die Trisection ermöglicht ist, haben wir in der oben citirten Abhandlung bewiesen.

In Bezug auf die Normalen der Ellipse wollen wir hier eine Integralfunction ableiten, welche mit einem Integral der Centralbewegung auf Grund des Newton'schen Attractionsgesetzes in Verbindung steht.

In der Ebene eines Kegelschnitts ziehen wir von einem Punkte xy Normalen an denselben, und bezeichnen die entsprechenden Radienvectoren von einem Brennpunkt an die 4 Fusspunkte mit r. Der Brennpunkt ist zugleich der Coordinatenanfangspunkt. Für

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

findet man folgende Gleichung

$$r^4 - 4ar^3 + (pa + 5a^2 + (2-e^2)u)r^2$$
$$-2(a^2p + a^3 + (2-e^2)(xe+2p)u)r + a^3p + (xe+2p)^2 u = 0$$

$$u = \frac{ae^2 . y^2}{p(1-e^2)^2}$$

Wir nehmen r und $xe+2p$ variabel an und suchen die entsprechende Function. Sie ist

$$\Sigma\int\frac{dr}{y(r-a)\sqrt{-r^2+2ar-a^2(1-e^2)}} = C$$

welche wir noch mit $r(r-a)$ multipliciren.

Demnach erhalten wir

$$\Sigma\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2+2ar-a^2(1-e^2)}} = Cy$$

Wir nehmen nun an, dass der Kegelschnitt von einem nach dem Newton'schen Gesetze afficirten Punkte beschrieben werde, welcher die 4 Normalenfusspunkte in den vom Perihel an gerechneten Zeiten $t_1 t_2 t_3 t_4$ passirt. Von diesen 4 Punkten wird einer in die eine, die drei andern in die andere Hälfte der Bahn fallen. Da nun das oben gefundene Integral die Zeit der Bewegung definirt, so existirt nach Feststellung der Vorzeichen und der Constanten für alle Normalen der Kegelschnitte der Centalbewegung die folgende Relation

$$-t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \tfrac{1}{2}T - \frac{2\sqrt{p}}{ke}\,y$$

worin T die Umlaufszeit bedeutet.

Es ist aber y oder $R\sin\alpha$ die Gleichung einer der grossen Achse parallelen Geraden; daher sagt die abgeleitete Formel, dass alle

Normalen, welche von Punkten einer der grossen Achse parallelen Geraden an die Planetenbahn gezogen werden können, in ihren Fusspunkten Bogen und damit entsprechende Zeiten begrenzen, deren algebraische Summe eine constante Grösse ist.

Wenn wir anstatt t_4 die Ergänzung zu $\frac{1}{2}T$ setzen, indem wir diese Zeit vom Aphel an rechnen, so erhalten wir die die einfachere Formel

$$t_1 - t_2 - t_3 + t_4 = \frac{2\sqrt{p}}{ke}\, y$$

Man bemerke, dass die Constante nur vom Parameter und der Excentricität abhängt und die Formel also für alle Gattungen der Kegelschnitte gültig ist. Indessen ist bei der Parabel nachzusehen, was aus t_4 wird, da der entsprechende Normalenfusspunkt in die Unendlichkeit fällt. Dass diese Zeit nicht gleich null gesetzt werden darf, dieselbe vielmehr einer bestimmten Grenze zustrebt, lässt sich so entwickeln: Die Normale bilde mit der grossen Achse den Winkel $\delta\omega$, und schneide mit letzterer auf der elliptisch-parabolischen Grenzcurve den Bogen $\delta\sigma$ ab, welchen wir mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{k}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

gleichförmig beschrieben denken. Alsdann ist

$$t_4 = \frac{\delta\sigma}{v_0}$$

Da ferner die Normale auf der Achse die Strecke

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p$$

abschneidet und

$$\varrho\,\delta\omega = \delta\sigma$$

ist, so folgt

$$t_4 = \varrho\,\frac{\delta\omega}{v_0} = p\,\frac{\delta\omega}{v_0}$$

Und indem wir noch berücksichtigen, dass

$$y = (ac(1+e) - x)\,\delta\omega$$

so folgt nach Einsetzen dieser Ausdrücke

$$t_4 = \sqrt{p}\,\frac{1+e}{k}\,\frac{y}{e(1+e) - \frac{x}{a}}$$

d. i. indem wir $e = 1$ einführen

$$t_4 = \frac{\sqrt{p}}{k} y$$

und die Zeitrelation für die Normalen der Parabel, deren drei sind, reducirt sich auf

$$t_1 - t_2 - t_3 = \frac{\sqrt{p}}{k} y$$

Wir haben also auch für die Parabel den Satz, dass die algebraische Summe der Zeiten, welche zur Zurücklegung der durch die 3 Normalen begrenzten vom Perihel an gerechneten Bogen eine constante Grösse ist, wenn der geometrische Ort der Schnittpunkte der Normalen eine der grossen Achse parallele Gerade $R \sin\alpha$ ist.

Die Gleichung dieser Normalen in Bezug auf die wahre Anomalie v ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v^3 + \left(1 + \frac{R}{q}\cos\alpha\right) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v = \frac{R}{q}\sin\alpha$$

Lassen wir $R \sin\alpha$ in die Directrix der Parabel fallen, so ist

$$R\cos\alpha = 2q$$

und die Gleichung wird

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v^3 = \frac{y}{3q} = \frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$$

welche eine reelle Wurzel besitzt.

Man kann dieselbe benutzen, um aus der Anomalie eines eine Parabel beschreibenden Kometen die verflossene Zeit mittels einer durch den betreffenden Parabelpunkt gehenden Normalen zu finden. Die von letzterer auf der Directrix abgeschnittene Strecke

$$y = \frac{k}{\sqrt{p}} t$$

ist der Zeit der kometarischen Bewegung proportional. Die Lösung dieser speciellen Aufgabe, Zeit aus Ort, wird also durch die Parabel selbst vermittelt.

Ein Kreis schneide einen Kegelschnitt in 4 Punkten. Die Centrale beider sei R, ihr Winkel gegen a gleich α, der Halbmesser sei gleich s, die Winkel, welche die 4 Halbmesser des Kreises nach den Schnittpunkten mit der Centrale bilden, seien $\vartheta_1 \vartheta_2$ etc. Alsdann hat man als Gleichung derselben

$$((R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4-2c^2s(R+s)\sin 2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3$$
$$+2((R^2-s^2)(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2$$
$$-2c^2s(R-s)\sin 2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+(R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2=0$$

In dieser nehmen wir $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta$ und R variabel und verfahren wie früher. Man findet schliesslch

$$\Sigma\int\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2}\sin\vartheta^2}}=C$$

Und da man noch mit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta$ multipliciren darf

$$\Sigma\int\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2}\sin\vartheta^2}}=C$$

mithin auch

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2}\sin\vartheta^2}}=C$$

Nennen wir r den Ellipsenradius, in dessen Richtung R liegt, so ist auch

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{rs}{ab}\right)^2\sin\vartheta^2}}=C$$

Sieht man s als den zu r conjugirten Halbmesser an, welche den Conjugationswinkel ω mit ihm bildet, wonach also

$$rs\sin\omega=ab$$

ist, so folgf auch noch

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\sin\omega^2\sin\vartheta^2}}=C$$

Durch Substitution der beiden ersten Integrale erhält man noch

$$\Sigma\int\frac{d\sin\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{rs}{ab}\right)^2\sin\vartheta^2}}=C$$

deren Integration ergiebt

$$\arcsin\left(\frac{rs}{ab}\sin\vartheta_1\right)+\arcsin\left(\frac{rs}{ab}\sin\vartheta_2\right)+\arcsin\left(\frac{rs}{ab}\sin\vartheta_3\right)$$
$$+\arcsin\left(\frac{rs}{ab}\sin\vartheta_4\right)=C$$

und hiermit verbindet sich noch die allgemein gültige Relation

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4=360^0-4\varphi$$

Betrachten wir dagegen den Radius des Kreises in Beziehung auf den Wurzelwert als variabel, so findet man

$$\Sigma\int\frac{\cos\tfrac{1}{2}\vartheta^2\, d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{a^2+b^2-R^2+c^2\sin 2\alpha\,.\sin 2\vartheta+(R^2-c^2\cos 2\alpha)\cos 2\vartheta}}=C$$

multiplicirt man diese Function mit $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2$ und addirt sie zur vorstehenden, so folgt

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\frac{a^2+b^2-R^2}{R^4-2c^2R^2\cos 2\alpha+c^4}+\cos 2(\vartheta-\varepsilon)}}$$

wenn wir einführen

$$\operatorname{tg}2\varepsilon=\frac{c^2\sin 2\alpha}{R^2-c^2\cos 2\alpha}$$

Diese Ausdrücke haben geometrische Bedeutung. Ziehen wir nämlich vom Mittelpunkt des Kreises nach den Brennpunkten des Kegelschnittes zwei Strahlen, welche einen Winkel β einschliessen, so lässt sich die folgende Formel leicht erweisen

$$\cos\beta=-\frac{a^2+b^2-R^2}{\sqrt{R^4-2c^2R^2\cos 2\alpha+c^4}}$$

und die Function nimmt die Form an

$$\Sigma\int\frac{d(\vartheta-\varepsilon)}{\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\beta^2-\sin(\vartheta-\varepsilon)^2}}=C$$

In dem genannten Dreieck. dessen Grundlinie $=2c$, dessen Mittellinie R ist, seien die durch letztere geteilten Winkel des Winkels β gleich γ und γ_1, dann besteht die Formel

$$\operatorname{tg}(\gamma-\gamma_1)=\frac{c^2\sin 2\alpha}{R^2-c^2\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\varepsilon,\quad \varepsilon=\frac{\gamma-\gamma_1}{2}$$

so dass auch ε geometrisch bekannt ist.

Wir betrachten endlich noch folgenden Fall:

Es sei der Mittelpunkt des Kreises vom Radius s um die Strecke R von einem Brennpunkt eines Kegelschnitts entfernt. Der Winkel, den R mit der X-Achse einschliesst, sei α. Die Schnittpunkte beider Curven verbinde man mit dem Kreiscentrum durch Radien, welche mit der verlängerten R die Winkel ϑ etc. einschliessen mögen. Aus den beiden Relationen

$$R\sin\alpha + s\sin(\vartheta+\alpha) = \frac{p\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}$$

$$R\cos\alpha + s\cos(\vartheta+\alpha) = \frac{p\cos\varphi}{1-e\cos\varphi}$$

folgt nach Elimination von φ die Gleichung

$$\begin{aligned}
&(R^2+s^2-p^2-e^2R^2\cos\alpha^2-2peR\cos\alpha-e^2s^2\cos\alpha^2+2Rse^2\cos\alpha^2\\
&\quad+2pes\cos\alpha-2Rs)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4\\
&+(4Rse^2\sin\alpha\cos\alpha+4pes\sin\alpha-4e^2s^2\sin\alpha\cos\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3\\
&+(2R^2+2s^2-2p^2-2e^2R^2\cos\alpha^2-4peR\cos\alpha-e^2s^2\\
&\quad+3e^2s^2\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2\\
&+(4Rse^2\sin\alpha\cos\alpha+4pes\sin\alpha+4e^2s^2\sin\alpha\cos\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta\\
&+R^2+s^2-p^2-e^2R^2\cos\alpha^2-2peR\cos\alpha-e^2s^2\cos\alpha^2\\
&-2Rse^2\cos\alpha^2-2pes\cos\alpha+2Rs=0
\end{aligned}$$

In Bezug auf $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta$ sehen wir R als variabel an, und erhalten nach den anfangs aufgestellten Regeln

$$\Sigma\int\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4-8(1-e^2)\sin\vartheta^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha\,.\sin\vartheta+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

$$\Sigma\int\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4-8(1-e^2)\sin\vartheta^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha\,.\sin\vartheta+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4-8(1-e^2)\sin\vartheta^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha\sin\vartheta+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

und aus den beiden ersten durch Subtraction für $\sin\vartheta=x$

$$\Sigma\int\frac{dx}{\sqrt{x^4-8(1-e^2)x^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha\,.x+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

Die Summe dieser Integrale ist constant für alle Kreise von constantem Radius, deren Centra auf einer gegen die Achse mit dem Winkel α geneigten Geraden liegen. Die drei ersten Functionen sind hyperelliptisch, die 4. elliptisch. Man kann also speciell der letztern in der Form

$$\Sigma\int\frac{dx}{\sqrt{x^4-Ax^2-Bx+C}}$$

eine geometrische Bedeutung abgewinnen, wenn man aus den Constanten ABC die Werte $\frac{p}{s}$, e, $\sin\alpha$ entwickelt und $x=\sin\vartheta$ setzt. Sehr einfach wird sie für die Parabel, da dann die Functionen

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4-16\frac{p}{s}\sin\alpha.\sin\vartheta+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

$$\Sigma\int\frac{dx}{\sqrt{x^4-16\frac{p}{s}\sin\alpha.x+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

auftreten.

Wenn wir die ϑ so wählen, dass sie 2 rechte Winkel nicht überschreiten, so müssen die Amplituden noch der Bedingung

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4=4\alpha$$

genügen.

In gleicher Weise erhält man für s als Variabele die hyperelliptische Function

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{A\sin\vartheta^4+B\sin\vartheta^3+C\sin\vartheta^2+D\sin\vartheta+1}}=C$$

$$A=\frac{1}{16}\left(\frac{R}{p}(1-e^2\cos\alpha^2)-e\cos\alpha\right)^2-\frac{1}{16}$$

$$B=\frac{1}{2}\frac{Re}{p}\sin\alpha\left(2-2e^2\cos\alpha+\frac{Re}{p}\cos\alpha\right)$$

$$C=\frac{R}{p}\left(2e\cos\alpha-\frac{R}{p}(1-e^2)\right)$$

$$D=2\frac{eR}{p}\sin\alpha$$

und analog wie vorhin für $\sin\vartheta=x$

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + 1}} = C$$

und die Amplitudenrelation

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 - \vartheta_4 = 4\alpha$$

gilt auch hier. Die obigen Functionen gelten für alle Kegelschnitte und Kreise mit hinsichtlich der letzteren festem Mittelpunkt und beliebigem Radius.

Die merkwürdigste und schönste Integration liefert uns die Cassinische Linie in Verbindung mit einem sie in vier Punkten schneidenden Kreise. Das Kreiscentrum habe wieder die Polarcoordinaten $R(\alpha)$. Wir ziehen von den beiden Brennpunkten nach den 4 Schnittpunkten Strahlen, welche die Winkel Θ bilden, und entwickeln die für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta$ geltende Gleichung, indem wir die Curvengleichung

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\varphi + c^4 = r^4$$

zugrunde legen. Nach einigen Entwickelungen folgt

$$\left((1-\beta)^2 - 4\frac{R^2}{q^2}\left(\frac{c^2}{q^2}-1\right)\cos\alpha^2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^4 - 4\frac{R}{c}(\beta-1)\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3$$
$$+\left(2\beta^2 - 2 + 4\frac{R^2}{c^2} - \frac{8c^2}{q^4}R^2\cos\alpha^2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2 - 4\frac{R}{c}(\beta+1)\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta$$
$$+(1+\beta)^2 - 4\frac{R^2}{q^2}\left(\frac{c^2}{q^2}+1\right)\cos\alpha^2 = 0$$

Hierin nehmen wir den Radius s oder β d. i.

$$\beta = \frac{R^2 + c^2 - s^2}{q^2}$$

variabel und verfahren wie früher. Nach einigen Reductionen erhalten wir die für alle concentrischen Kreise gültige Formel

$$\Sigma \int\limits_{\frac{4R}{c}\cos\alpha} \frac{\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2\, d\tfrac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\right)\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2\right)}} = C$$

$$\Sigma \int\limits_{\frac{4R}{c}\cos\alpha} \frac{\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\, d\tfrac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\right)\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2\right)}} = C$$

$$\Sigma \int\limits_{\frac{4R}{c}\cos a} \frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\sin\frac{1}{2}\Theta^2\right)\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\frac{1}{2}\Theta^2\right)}} = C$$

Diese Functionen sind dadurch ausgezeichnet, dass sie weder s noch R noch α enthalten, also ganz unabhängig sind von der Lage oder Grösse des Kreises, welcher auch in eine Gerade übergehen kann.

Die Constanten oder die Moduli der Function sind nur abhängig von den die Curve constituirenden Grössen c und q.

Die Integralfunction hat demnach einigen Wert für die Theorie der elliptischen Functionen und zwar um so mehr, als man dieselbe noch auf solche der ersten Art mit einer Amplitude reduciren kann, die ebenfalls eine geometrische Bedeutung hat. Der Focalwinkel Θ zwischen zwei Brennstrahlen der Cassinischen Curve steht nämlich mit dem von den zwei Scheitelstrahlen gebildeten Winkel γ in folgender Verbindung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{c^2+q^2}{c}}$$

Diese Scheitelwinkel sind die Winkel, welche die von den Endpunkten der grossen Achse nach einem beliebigen Punkte der Curve gezogenen Geraden mit einander einschliessen. Im folgenden nehmen wir stets den spitzen Nebenwinkel von γ. Die Ableitung dieser Formel kann vermittelst

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{2ra\sin\varphi}{r^2-a^2}, \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{2rc\sin\varphi}{r^2-c^2}$$

$$r^2 = c^2+q^2\cos\Theta \quad \text{etc.}$$

geschehen. Unter Benutzung der obigen Relation geht nun die Integralfunction über in

$$\int\frac{d\gamma_1}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_1^2}} + \int\frac{d\gamma_2}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_2^2}} + \int\frac{d\gamma_3}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_3^2}} + \int\frac{d\gamma_4}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_4^2}} = 0$$

welche also für alle Kreise oder Gerade in beliebiger Lage in Be-

ziehung auf die Cassinischen Linien gültig ist und sich durch Eleganz und Einfachheit auszeichnet.

Aus der allgemeinen Formel

$$\Sigma \frac{\cos \tfrac{1}{2}\Theta^2 d\gamma}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma^2}}$$

geht noch die folgende

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\gamma^2\right)\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma^2}} = C$$

also ein elliptisches Integral dritter Art hervor.

Die Einfachheit des Modulus dieser Integrale führt auf den Gedanken, denselben aus den Constanten der obigen Gleichung für

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta = \sqrt{1+\frac{q^2}{c^2}}\cot\gamma$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3 + B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2 - C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta + D = 0$$

zu entwickeln. Setzt man

$$\frac{c^2}{q^2} = x$$

so folgt nach einigen Rechnungen der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&x(A^2B-2AC)(x(1-D)+1+D)^2\\
&+(C^2-A^2D)(x(1-D)+1+D)(x^2(2-B)+Bx)\\
&=\frac{x}{4}(A^2(x(1-D)+1+D)-(C^2-A^2D)(x-1))^2\\
&+(C^2-A^2D)(x(1-D)+1+D)
\end{aligned}$$

also für x eine kubische Gleichung, deren Wurzeln drei verschiedene Werte von $\frac{c^2}{q^2}$ oder der Elemente der Cassinischen Linie repräsentiren. Bedingung ist nur, dass die Werte Θ der Curve den Wurzeln der Gleichung genügen.

Die Integralfunction der Cassinischen Linie

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma^2}} = C$$

ist sehr merkwürdig, weshalb wir noch etwas bei ihr verweilen wollen. Die Constante ist entweder = null oder = $2K$. Wir wollen für die getrennten Ovalen der Curve die verschiedenen Formen der Functionen aufführen.

Legen wir durch diese Ovalen einen beliebigen Kreis oder eine Gerade und zwar durch die obern Hälften der Curven, so ist die Function

$$F_1+F_2=F_3+F_4$$

wonach also γ_1 und γ_2 in der einen, γ_3, γ_4 in der anderen Hälfte liegen.

Geht nun der Kreis oder die Gerade durch einen äussern Scheitelpunkt, für welchen also

$$\gamma_4=90^0$$

so ist

$$F_1+F_2=F_3$$

Wandert nun der 4. Schnittpunkt von Kreis und Curve in die untere linke Hälfte der letztern, so ändert das entsprechende Integral sein Vorzeichen, und man hat

$$F_1+F_2=F_3-F_4$$

Rückt der 3. Schnittpunkt in den innern Scheitelpunkt, so ist wegen $\gamma_3=0$

$$F_1+F_2=K-F_4 \quad \text{oder} \quad F_1+F_2+F_4=K$$

Wandert auch der 3. Schnittpunkt in die untere linke Hälfte, so wird

$$F_1+F_2+F_3+F_4=2K$$

Berührt der Kreis oder die Gerade die linke Ovale, so ist

$$F_1+F_2+2F_3=2K$$

Berührt er auch die rechte, so folgt

$$F_1+F_3=K$$

Für eine tangirende Gerade lässt sich dies leicht bewahrheiten Man hat nämlich für diesen Grenzfall

$$\sin 2\varphi=\frac{q^2}{c^2},\quad r^4=c^4-q^4,\quad \cos\Theta=-\frac{2c^2}{q^2}\sin\varphi^2$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2=\sqrt{\frac{c^2+q^2}{c^2-q^2}}$$

also

$$\operatorname{tg}\gamma^2 = \sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}} = \sqrt{1-k^2} = k'$$

Die Bedingung für

$$2F_1 = K$$

oder

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\cos\gamma^2}} = \frac{K}{2}$$

ist aber

$$\operatorname{cotg}\gamma^2 = \frac{1}{k'}$$

welche mit der abgeleiteten übereinstimmt. Die obigen Relationen geben Lösungen von Additionsproblemen elliptischer Integrale der ersten Art

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

wenn man aus

$$k = \frac{q^2}{c^2}$$

die ensprechende Cassinische Curve construirt und die

$$\gamma = 90^0 - \varphi$$

als spitze Scheitelwinkel darin einträgt. Tut man dies für die drei Argumente $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$, und legt einen Kreis durch diese Punkte, so entspricht der 4. Kreispunkt in seinem Winkel

$$\gamma_4 = 90^0 - \varphi_4$$

der gesuchten Amplitude für diejenige Function, welche unter den angeführten enthalten ist, unter welchen also die Relation

$$F_1 + F_2 = F_3$$

nur ein specieller Fall ist.

Ist k^2 grösser als die Einheit, so tritt eine geschlossene Cassinische Curve mit Grenzbedingungen

$$\cos\gamma_0 = \frac{c^2}{q^2}$$

auf, während die Relationen im wesentlichen die entwickelten sind.

An sie knüpfen sich eine zahlreiche Menge von Formeln zwischen den Amplituden unter den Beziehungen von

$$\cos\varphi, \sin\varphi, \sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}$$

wie

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\varDelta\sigma = \cos\varphi_3\cos\varphi_4 - \sin\varphi_3\sin\varphi_4\,\varDelta\sigma$$

$$\cot\sigma = \frac{\cot\gamma_1\,\varDelta\gamma_2 + \cot\gamma_2\,\varDelta\gamma_1}{1-\cot\gamma_1\cot\gamma_2\,\varDelta\gamma_1\,\varDelta\gamma_2} = \frac{\cot\gamma_3\,\varDelta\gamma_4 + \cot\gamma_4\,\varDelta\gamma_3}{1-\cot\gamma_3\cot\gamma_4\,\varDelta\gamma_3\,\varDelta\gamma_4}$$

u. a. m.

Man bemerke noch, dass in der Relation

$$F_1 + F_2 = F_3 - F_4$$

für $F_1 = F_2 = F_4$ hervorgeht

$$F_3 = 3F_1$$

was eintritt, wenn der Kreis die erste Ovale in einem Punkte γ_1 berührt, und die andere in einem ähnlich liegenden Punkte schneidet. Die gesuchte γ_3 gehört dem 4. Schnittpunkte an.

Die Cassinische Linie, hat also, wie wir bewiesen, für die elliptischen Integrale dieselbe Bedeutung, wie die Kegelschnitte.

II.

Die folgenden Entwickelungen werden im Auschluss an die „Transformationen der ellipt. Integrale u. Funct. etc." eine Reihe hyperelliptischer Integrale aufstellen, welche auf elliptische reducirbar sind.

Am a. O. haben wir auf S. 171 eine Kettenlinie zugrunde gelegt in der Form

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und haben für x, y, s vermittelst

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{s}{y-k'}$$

folgende Reihen abgeleitet

$$\tfrac{1}{8}x = \frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \tfrac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} \ldots$$

$$y = \frac{E}{k'K} - \frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\ldots\right)$$

$$z = \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{5q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right)$$

deren Argument u das Integral

$$u = \int\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1+k'^2-2k'y)}}$$

ist. Eine weitere Entwickelung für hyperelliptische Integrale lässt sich und zwar für den 5. Grad auf Grund der Formeln

$$y_3 = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}, \quad z_3 = \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$$

$$u_3 = \int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2}}, \quad \sin\varphi_3 = \frac{z_3}{y_3-k'}$$

anbahnen. Man hat zunächst

$$y_3+z_3 = e^{3x}, \quad y_3-z_3 = e^{-3x}$$

$$e^x = \sqrt[3]{y_3+z_3}, \quad e^{-x} = \sqrt[3]{y_3-z_3}$$

und weil

$$z_3 = \sqrt{y_3^2-1}$$

so folgt weiter

$$e^x = \sqrt[3]{y_3+\sqrt{y_3^2-1}}$$

und

$$e^{-x} = \sqrt[3]{y_3-\sqrt{y_3^2-1}}$$

Aus beiden folgt durch Addition

$$y = \frac{\sqrt[3]{y_3+\sqrt{y_3^2-1}}+\sqrt[3]{y_3-\sqrt{y_3^2-1}}}{2}$$

welches die reelle Wurzel der Gleichung

$$y^3 - \tfrac{3}{4}y - \tfrac{1}{4}y_3 = 0 \text{ ist.}$$

Bez. d. Aufl. d. kubischen u. höheren Gleichungen durch die Kettenlinie sehe man a. a. O. S. 262 nach.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$y_3 = 4y^3 - 3y$$
$$dy_3 = 3(4y^2-1)\,dy$$

Führen wir diese Ausdrücke in

$$u_3 = \frac{dy_3}{\sqrt{(y_3^2-1)(1+k'^2-2k'y_3)}}$$

ein, so erhalten wir das hyperelliptiche Integral

$$u_3 = \int \frac{3\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{1+k'^2}{2k'}+3y-4y^3\right)}} = \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-k^2 \sin\varphi_3^2}}$$

Die Variabele y dieser Art von hyperelliptischen Integralen und der dieser Form analogen kann man also als die Ordinate einer Kettenlinie

$$y = \frac{e^{+x}+e^{-x}}{2}$$

betrachten, deren entsprechendes x zugleich mit $3x = x_3$ auch y_3 und damit s_3 bestimmt, womit dann auch die entsprechende Amplitude φ_3 des elliptischen Integrals desselben Arguments vermittelst

$$\sin\varphi_3 = \frac{s_3}{y_3-k'}$$

erhalten wird.

Verfährt man in ähnlicher Weise für

$$y_5 = \frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2}, \quad s_5 = \frac{e^{5x}-e^{-5x}}{2}$$

so ergiebt sich das hyperelliptische Integral

$$u = \int \frac{5\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{1+k'^2}{2k'}-5y+20y^3-16y^5\right)}} = \int \frac{d\varphi_5}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_5^2}}$$

für welche dieselbe Construction von

$$5x = x_5$$

etc. wie vorher durchzuführen ist.

Demnach ist allgemein das hyperelliptische Integral

$$u_n = \int \frac{n\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{1+k'^2}{2k'}+\left(ny-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}y^3+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}y^5-\ldots\right)(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\right)}}$$

auf das elliptische

$$u_n = \int \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_n^2}}$$

zurückzuführen, wenn n eine ungerade Zahl ist, denn die gesuchte Amplitude φ_n ergiebt sich durche eine leichte Construction aus

$$\sin\varphi_n = \frac{s_n}{y_n - k'}$$

und y_n und s_n sind bekannt durch

$$x_n = nx$$

weil durch die bekannte Variabele y des Integrals auch x und demnach auch das übrige bekannt ist. Vermöge der Eigenschaften der Kettenlinie ist der letzte Ausdruck leicht geometrisch zu deuten. Vergl. a. a. O. S. 173.

Vermöge

$$y = \frac{\sqrt[n]{y_n + s_n} + \sqrt[n]{y_n - s_n}}{2}$$

hat man unter Benutzung der angeführten Reihen

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{E}{k'K} + \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u_n}{2K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u_n}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u_n}{2K} + \ldots\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{E}{k'K} - \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u_n}{2K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u_n}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u_n}{2K} - \ldots\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

wodurch die Umkehrung des hyperelliptischen Integrals bewerkstelligt ist.

Man kann auch zur Darstellung von y sich der Formeln auf S. 174 und 185 ibid. bedienen und demnach

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1 + 2q\sin\frac{\pi u_n}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K} + \ldots}{1 - 2q\sin\frac{\pi u_n}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K} + 2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K} + \ldots}\right)^{\frac{2}{n}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1-2q\sin\frac{\pi u_n}{2K}-2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K}+2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K}+\dots}{1+2q\sin\frac{\pi u_n}{2K}-2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K}-2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K}+\dots}\right)^{\frac{2}{n}}$$

benutzen. Führt man die elliptische Transcendente

$$\Theta=1-2q\cos\frac{\pi u_n}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u_n}{K}+\dots$$

ein, so ist auch noch vermittelst dieser Thetafunction

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta\left(\frac{K}{2}-u_n\right)}{\Theta\left(\frac{K}{2}+u_n\right)}\right)^{\frac{2}{n}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta\left(\frac{K}{2}+u_n\right)}{\Theta\left(\frac{K}{2}-u_n\right)}\right)^{\frac{2}{n}}$$

Ferner sei

$$y_2=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2},\quad s_2=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$

dann ist

$$y_2=2y^2-1=2s^2+1$$

und

$$u_2=\int\frac{2\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{(1+k')^2}{2k'}-2y^2\right)}}=\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_2^2}}$$

$$y=\frac{E}{Kk'}-\frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u_2}{K}-\frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u_2}{K}+\dots\right)$$

oder man hat

$$u_2=\int\frac{2\,ds}{\sqrt{2k'(s^2+1)\left(\frac{(1-k')^2}{2k'}-2s^2\right)}}$$

$$s^2=\frac{2\pi^2}{K^2k'}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u_2}{2K}-\frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u_2}{2K}+\dots\right)$$

Führen wir hierin

$$s=\operatorname{tg}\delta$$

wo δ der Winkel der Tangente am Punkte xy der Kettenlinie ist, ein, so folgt

$$u_2=\int\frac{2\,d\delta}{(1+k')\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2-\sin\delta^2}}$$

welches Integral man mit dem bekannten der Pendelbewegung in Beziehung setzen kann, wenn der Ausschlagwinkel α durch

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-k'}{1+k'}$$

bestimmt wird. Der Elongationswinkel ϑ ist dann gegeben durch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi t}{2T} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi t}{2T} + \ldots\right)$$

$$k' = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\beta^2, \quad \alpha+\beta = 180^0$$

Eine weitere Transformation der durch die Kettenlinie vermittelten Integrale führt für gerade n auf

$$u_4 = \int \frac{4\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{(1-k')^2}{2k'}+8y^2-8y^4\right)}}$$

$$u_4 = \int \frac{4\,ds}{\sqrt{2k'(s^2+1)\left(\frac{(1-k')^2}{2k'}-8s^2-8s^4\right)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Auf S. 191 der „Transformationen" haben wir die Formel entwickelt

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^{\frac{1}{2}x}+1} = \frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ldots}{1-2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K}}$$

Dafür können wir schreiben

$$\frac{e^{+\frac{1}{4}x}-e^{-\frac{1}{4}x}}{e^{+\frac{1}{4}x}+e^{-\frac{1}{4}x}} = \frac{s_{\frac{1}{4}}}{y_{\frac{1}{4}}}$$

wo $s_{\frac{1}{4}}$, $y_{\frac{1}{4}}$ wie x Coordinaten der Kettenlinie sind, und zwar ist

$$y_{\frac{1}{4}} = \frac{e^{\frac{1}{4}x}+e^{-\frac{1}{4}x}}{2}, \quad s_{\frac{1}{4}} = \frac{e^{\frac{1}{4}x}-e^{-\frac{1}{4}x}}{2}$$

also ist wegen

$$y_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\cos\delta_{\frac{1}{4}}}, \quad s_{\frac{1}{4}} = \operatorname{tg}\delta_{\frac{1}{4}}$$

auch

$$\frac{s_{\frac{1}{4}}}{y_{\frac{1}{4}}} = \sin\delta_{\frac{1}{4}} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^{\frac{1}{2}x}+1}$$

Der obige Quotient der Jacobi'schen Transcendenten ist damit geometrisch definirt und zwar durch den Tangentenwinkel $\delta_{\frac{1}{4}}$ des Punktes $x_{\frac{1}{4}} y_{\frac{1}{4}}$, wofür

$$x = 4x_{\frac{1}{4}}^{2}$$

gilt. Erhebt man entsprechende Coordinaten zur 4. Potenz, so resultirt

$$y = 8y_{\frac{1}{4}}^{4} - 8y_{\frac{1}{4}}^{2} + 1$$

Es ist aber das Argument u mit y durch die Definition

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1+k'^2-2k'y)}}$$

verknüpft. Führen wir hierin anstatt y seinen obigen Wert

$$y = \frac{8}{\cos\delta_{\frac{1}{4}}^{4}} - \frac{8}{\cos\delta_{\frac{1}{4}}^{2}} + 1$$

ein und setzen

$$\sin\delta_{\frac{1}{4}} = z$$

so erhält man

$$u = \int \frac{4dz}{(1-k')\sqrt{\left(\left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)^2 - z^2\right)\left(\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2 - z^2\right)}}$$

$$z = \frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \dots}{1 - 2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K} + \dots}$$

Indem wir hierin einführen

$$\sin\psi = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\sin\delta_{\frac{1}{4}}$$

wird

$$u = \frac{4}{(1+\sqrt{k'})^2}\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^4\sin\psi^2}}$$

und die Umkehrung dieses Integrals

$$\sin\psi = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}} \cdot \frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K}}{1 - 2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K}}$$

Wir haben ferner auf S. 191 die Formel

$$\frac{1+\sqrt{k}\sin\varphi}{1-\sqrt{k}\sin\varphi} = e^4\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

aufgestellt, welche wir noch zu einigen Transformationen benutzen wollen.

Wir setzen

$$x = \frac{4\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{4}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots$$

als Abscisse einer Kettenlinie fest, und führen ein

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad s = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{tg}\delta$$

und es ist

$$y = \frac{1+k\sin\varphi^2}{1-k\sin\varphi^2}, \qquad s = \frac{2\sqrt{k}\sin\varphi}{1-k\sin\varphi^2}$$

also

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{k}\sin\varphi$$

$$u = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

Wir haben nun nachgewiesen, dass für diejenigen Coordinaten, welchen

$$x_n = nx$$

entspricht, also für

$$y_n = \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}, \qquad s_n = \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}$$

in Bezug auf die entsprechenden Tangentenwinkel δ und δ_n, deren Complemente E und E_n seien, die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_n = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E^n$$

besteht. E ist also hier der Winkel zwischen Tangente und Y-Achse. Demnach ist auch

$$\operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta_n) = \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)^n$$

also wegen

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{k}\sin\varphi$$

$$\frac{1-\sqrt{k}\sin\varphi_n}{1+\sqrt{k}\sin\varphi_n} = \left(\frac{1-\sqrt{k}\sin\varphi}{1+\sqrt{k}\sin\varphi}\right)^n$$

Diese Ausdrücke können aber in die zu Grunde gelegte Formel eingeführt werden, und man hat also für die beiden Integrale

$$u = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}, \quad u_n = \int \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_n^2}}$$

die Relation

$$\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u_n}{2K} - \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u_n}{2K}$$

$$= n\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

Beispielsweise würde für $n = 3$ zu setzen sein

$$\varphi_n = \varphi_3$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{3\sin\varphi + k\sin\varphi^3}{1+3k\sin\varphi^2}$$

Allgemein ist für φ_n

$$k\sin\varphi_n^2 = \frac{y_n-1}{y_n+1}, \quad y = \frac{1+k\sin\varphi^2}{1-k\sin\varphi^2}$$

$$y^n = 2^{n+1}.(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(ny - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}y^5 \dots\right)$$

wenn n ungerade, und

$$y_n = 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{n^2}{2}y^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}y^4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}y^6\right)$$

wenn n gerade ist.

Hierdurch erhält man allgemein $\sin\varphi_n$ durch $\sin\varphi$ ausgedrückt, und man hat für diese Amplituden und Integrale die obige Relation zwischen den betreffenden Argumenten u und u_n.

III.

Ein bemerkenswerter Fall der Transformationen ist der, dass sich aus ihnen eine Reihe von Functionalgleichungen dritten, vierten und höheren Grades entwickeln lassen, von welchen wir eine schon mitgeteilt haben. Es sind Gleichungen, deren Absolutglied eine Reihe nach Art der elliptischen Functionen ist, und deren eine Wurzel sich ebenfalls durch eine solche darstellen lässt.

Auf Seite 179 der „Transformationen“ haben wir für

$$y=\frac{1+k'\Delta}{k'+\Delta},\quad u=\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

die Gleichung

$$y^3-\frac{1+k'^2}{2k'}y^2+\frac{\pi^6}{2k'^3K^6}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)^2=0$$

gefunden, deren eine Wurzel

$$y=\frac{E}{kK}-\frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\ldots\right)$$

oder auch (a. a. O. S. 175)

$$y=\frac{(1-k')^2}{4k'}+\frac{(1+k')^2}{4k'}\cos 8\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right)$$

ist.

Wir führen ein

$$y=\frac{1+k'^2}{2k'}-x^2$$

also

$$x=\frac{k}{\sqrt{2k'}}\sqrt{\frac{\Delta-k'}{\Delta+k'}}$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$x^3-\frac{1+k'^2}{2k'}x+\frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right)=0$$

welche zu den irreducibeln gehört. Und eine Wurzel ist

$$x=\frac{1+k'}{\sqrt{2k'}}\sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\tfrac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\right)$$

Diese merkwürdige Reihe stellt also einen Wurzelwert der reducirten Gleichungen 3. Grades mit 3 reellen Wurzeln dar. Man kann sie als eine indirecte Lösung der Gleichung

$$x^3-Ax+B=0$$

betrachten, deren Coefficient

$$A=\frac{1+k'^2}{2k'}$$

den Modul

$$k'=A-\sqrt{A^2-1}$$

ergiebt.

Würde also aus dem Absolutglied

$$B = \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}\,K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right)$$

umgekehrt der Wert von $\cos\frac{\pi u}{2K}$ sich ermitteln lassen, so wäre damit die Wurzel x gemäss der obigen Reihe bekannt. Infolge von

$$x = \frac{k}{\sqrt{2k'}}\sqrt{\frac{\Delta - k'}{\Delta + k'}}$$

können wir eine S. 157 gegebene Reihe benutzen, und man hat

$$x = \frac{4\pi}{\sqrt{2k'}\,K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

wonach wir also für die Unbekannte zwei Reihen zur Verfügung haben. Führen wir noch den bekannten trigonometrischen Winkel E ein, so ist noch

$$\cos(60^0 + E) = \frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{3}{1+k'^2}}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2(1+k'^2)}{3k'}}\cos E, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2(1+k'^2)}{3k'}}\cos(60^0 - E)$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{2(1+k'^2)}{3k'}}\cos(60^0 + E)$$

Im Anschluss hieran, wollen wir noch die Discriminante D der kubischen Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

durch eine Reihe darstellen. Führen wir ein

$$\operatorname{tg}\tau = 3x^2 - 2ax + b$$

und eliminiren aus beiden x, so folgt

$$\operatorname{tg}\tau^3 - (a^2 - 3b)\operatorname{tg}\tau^2 - D = 0$$

Identificiren wir diese mit der obigen Gleichung für y, indem wir setzen

$$\operatorname{tg}\tau = y$$

und

$$a^2 - 3b = \frac{1+k'^2}{2k'}$$

so wird

$$D = -\frac{\pi^6}{2k'^3 K^6}\left(\frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right)$$

und es ist

$$3x^2 \cdot 2ax + b = \frac{E}{k' K} - \frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Andererseits kann man auch

$$u_1 = x_2 - x_3, \quad u_2 = x_3 - x_1, \quad u_3 = x_1 - x_2$$

einführen als Wurzel von

$$u^3 - (a^2 - 3b)u + \sqrt{-D} = 0$$

und es folgt

$$u = \frac{1+k'}{\sqrt{2k'}}\sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi n}{2K} + \ldots\right)$$

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$
$$= \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Die bisher entwickelten Formeln und Reihen enthielten den Cosinus. Man sieht aber auch, dass dieselben sich durch Sinusfunctionen ersetzen lassen unter Benutzung der Relation

$$\varDelta\,\mathrm{am}(K-u) = \frac{k'}{\varDelta\,\mathrm{am}\,u}$$

So hat man also auch für

$$z^3 - \frac{1+k'^2}{2k'}z + \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right) = 0$$

$$z = \frac{1+k'}{\sqrt{2k'}}\sin\left(\frac{4q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right)$$

und dem entsprechend die übrigen

$$z = \frac{4\pi}{kK}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right), \text{ etc.}$$

Man kann ferner solche Gleichungen für den 4. und 5. Grad ableiten, wenn wir in

$$u = \int\frac{d\varphi}{\varDelta} \quad \text{für} \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y-k'}$$

welcher Wert aus

$$y = \frac{1 + k'\Delta}{k' + \Delta}$$

folgt, die Abscisse y der Kettenlinie einführen, man hat

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 + k'^2 - 2k'y)(y^2 - 1)}}, \quad \frac{1 + k'^2}{2k'} = A$$

woraus

$$dy - \sqrt{2k'(y^2 - 1)(A - y)}\, du = 0$$

Wir differentiiren nun die oben aufgestellte kubische Gleichung für y in der Form

$$y\sqrt{A - y} = \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}\, K^3}\left(\frac{q}{1 - q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1 - q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\right)$$

und benutzen den vorhergehenden Differentialausdruck, wodurch wir folgende Gleichung erhalten

$$y^4 - \tfrac{4}{3}Ay^3 + (\tfrac{4}{9}A^2 - 1)y^2 + \tfrac{4}{3}Ay - \tfrac{4}{9}A^2$$
$$= \frac{\pi^8}{36k'^4 K^8}\left(\frac{q}{1 - q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{27q^3}{1 - q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\right)$$

deren eine Wurzel wieder unter der oben angegebenen Form bekannt ist.

Wir differentiiren diese Gleichung noch einmal und führen

$$x^2 = A - y$$

ein und erhalten

$$x^5 - \tfrac{5}{3}Ax^3 + \tfrac{1}{6}(4A^2 - 3)x$$
$$= \frac{\pi^5}{24\sqrt{2k'^5}\, K^5}\left(\frac{q}{1 - q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{81q^3}{1 - q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)$$

welche sich als eine reducirte Gleichung 5. Grades darstellt.

Denken wir uns eine Gleichung dieses Grades

$$z^5 - Pz^3 + Qz - R = 0$$

mit der obigen identisch und setzen

$$z = \frac{x}{n}$$

also

$$x^5 - Pn^2x^3 + Qn^4x - Rn^{0} = 0$$

und demnach

$$Pn^2 = \tfrac{5}{3}A, \quad Qn^4 = \tfrac{2}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}$$

$$R n^5 = \frac{\pi^5}{24\sqrt{2k'^5}\,K^5}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{81\,q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

so folgt

$$n^4 = \frac{25}{2(6P^2 - 25\,Q)}$$

$$A = \frac{3P}{\sqrt{12P^2 - 50\,Q}}, \quad k' = \frac{3P - \sqrt{50\,Q - 3P^2}}{\sqrt{12\,P^2 - 50\,Q}}$$

mit der Bedingung

$$4 > \frac{50\,Q}{3P^2} > 1$$

und das Absolutglied ist folglich nach einer Transformation

$$R = \frac{\pi^5}{24\,K^5\,n^5\sqrt{2k'^5}}\left(\frac{1^4 q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{3^4 q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{5^4 q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right)$$

und die Wurzel der Gleichung 5. Grades ist

$$z = \frac{1+k'}{n\sqrt{2k'}}\sin\left(\frac{4q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Die auf S. 145 abgeleitete Function

$$\tfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}$$

wollen wir zur Aufstellung eines transcendenten elliptischen Integrals benutzen. Wir führen ein

$$\frac{1-\Delta}{1+\Delta} = y^2$$

also

$$\Delta = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad d\Delta = -\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$$

und demzufolge ist

$$d\varphi = \frac{1-y^2}{1+y^2}\,\frac{2\,dy}{k\sqrt{y^4 - 2\frac{1+k'^2}{1-k'^2}y^2 + 1}}$$

Wir multipliciren nun die linke Seite der obigen Gleichung mit $\frac{d\varphi}{\Delta}$ und die rechte mit du, und integriren, dann folgt

$$\frac{\pi}{4kK}\int\frac{\arcsin\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\,y\,.\,dy}{\sqrt{y^4-2\frac{1+k'^2}{1-k'^2}y^2+1}}$$

$$=-\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\tfrac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots$$

welche für

$$y\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}=\sin\psi$$

übergeht in

$$-\int\frac{\psi\,d\psi}{\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2-\sin\psi^2}}$$

$$=4K\frac{(1+k')}{\pi}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\tfrac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\right)+C$$

Die Constante folgt aus

$$0=4K\frac{(1+k')}{\pi}\left(\frac{q}{1+q^2}+\tfrac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6}\dots\right)+C$$

und so erhält man das merkwürdige Integral

$$\int_0^\psi\frac{\psi\,d\psi}{\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2-\sin\psi^2}}$$

$$=\frac{8K}{\pi}(1+k')\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u^2}{4K}+\tfrac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u^2}{4K}+\dots\right)$$

$$\sin\psi=\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}\,\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}},\quad \sin\varphi=\frac{2\sin\psi}{1-k'+(1+k')\sin\psi^2}$$

Demnach kann man das vorstehende Integral und analoge andere in Reihen entwickeln. Man könnte sie elliptisch-transcendente Integrale nennen.

Der grösste Wert desselben geht aus

$$\sin\psi=\frac{1-k'}{1+k'}$$

hervor und ist

$$\int_0^{\psi} \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2 - \sin\psi^2}}$$
$$= \frac{4K}{\pi}(1+k')\left(\frac{q}{1+q^2} + \frac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6} + \frac{1}{25}\frac{q^5}{1+q^{10}} + \dots\right)$$

Zum Zweck einer Verification haben wir angenommen

$$k = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

also

$$k' = \tfrac{1}{2}, \quad q = 0{,}085\,795\,73. \quad q^2 = 0{,}007\,361, \quad K = 2{,}156\,515$$

wodurch das letzte Integral übergeht in

$$\int \frac{\psi d\psi}{\sqrt{1-(3\sin\psi)^2}} = 2 \cdot \frac{K}{\pi}\left(\frac{q}{1+q^2} + \frac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6} + \dots\right)$$
$$\frac{K}{\pi} = 0{,}686\,43$$

Es sei

$$3\sin\psi = x, \quad \psi = \arcsin\frac{x}{3}, \quad 3\cos\psi\, d\psi = dx$$

dann ist

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\frac{x}{3} \cdot dx}{3\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}$$
$$= \int_0^1 \frac{x\left(1+\frac{x^2}{54}+\frac{x^4}{1080}\dots\right)\left(1+\frac{x^2}{18}+\frac{x^4}{216}\dots\right)dx}{9\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\left(x+\frac{2}{27}x^3+\frac{8}{1215}x^5\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\varphi + \frac{2}{27}\sin\varphi^3 + \frac{8}{1215}\sin\varphi^5 + \dots\right)d\varphi$$

wenn

$$x = \sin\varphi$$

gesetzt wird. Die Ausführung der Integration und die Wertbestimmung zeigt die Uebereinstimmung der beiden Seiten der obigen Gleichung und damit die Richtigkeit des transcendenten Integrals.

Wir wenden endlich noch die Formel S. 146 an

$$\tfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}\,\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}} = \frac{\pi u}{8K} + \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \tfrac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}$$

indem wir einführen

$$\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta} = y^2, \quad y\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \sin\tau$$

und beiderseitig die Gleichung mit

$$\frac{d\varphi}{\varDelta} = u$$

multipliciren und integriren unter Benutzung von

$$\frac{d\varphi}{\varDelta} = \frac{2\,dy}{k\sqrt{\left(\left(\frac{1+k'}{1-k'}\right)^2 - y^2\right)\left(\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2 - y^2\right)}}$$

Man findet wie vorher in analoger Art das transcendente Integral

$$\int\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\sin\tau^2}}$$

$$= 2(1+k')\,\frac{K}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{16}\,\frac{u^2}{K^2} + \frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K} + \tfrac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u^2}{2K}\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{9}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u^2}{2K}\right)$$

$$\sin\tau = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}\,\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}}, \quad \sin\varphi = \frac{2\sin\tau}{1-k'+(1+k')\sin\tau^2}$$

Um noch einige Gleichungen zu entwickeln, benutzen wir die Reihe für

$$\sin\operatorname{am} u = \sin\varphi = y$$

für welche besteht

$$y = \frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

$$dy = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\;du$$

Differentiirt giebt dies

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \frac{\pi^2}{4K^2}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{2\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

nochmals differentiirt folgt

$$y^3-\frac{1+k^2}{2k^2}y+\frac{\pi^3}{4k^3K^3}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{9\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

und ferner

$$y^5-\tfrac{5}{6}\frac{1+k^2}{k^2}y^3+\frac{1+14k^2+k^4}{24k^4}y$$
$$-\frac{\pi^5}{192k^5K^5}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{81\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

Die obige Reihe für y ist eine Wurzel dieser Gleichungen.

Nach den Formeln S. 238 findet man ähnlich

$$y^3-\frac{1+k'^2}{1-k'^2}y+\frac{2\pi^3}{k^3K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\dots\right)$$

$$y=\frac{4\pi}{kK}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

und ähnlich für den 5. Grad, wenn wir setzen

$$\frac{1+k'}{1-k'}=\alpha$$

$$y^5-\frac{1}{12}\left(\frac{11\alpha^2+9}{\alpha}\right)y^3+\frac{1}{12}(\alpha^2+7)y$$
$$-\frac{\pi^5}{6k^5K^5}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{81q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

$$y=\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\sin\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi u}{8K}+\frac{\frac{1}{2}q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots\right)$$

Die Reihe für $\sin\operatorname{am}u^2$ führt nach einigen Differentiationen auf

$$x^3-\frac{1+k^2}{k^2}x^2+\frac{x}{k^2}-\frac{\pi^6}{k^6K^6}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}\dots\right)^2=0$$

$$x=\frac{K-'E}{k^2K}-\frac{2\pi^2}{k^2K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots\right)$$

Die Reihe für

$$\cos\operatorname{am}\varphi=y$$

liefert wie auch die für $\dfrac{k'\sin\operatorname{am}u}{\Delta}$

$$y^3 - \frac{(1-2k'^2)}{2k^2}\,y - \frac{\pi^3}{4k^3K^3}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{9\sqrt{q^3}}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\right)$$

$$y = \frac{2\pi}{4K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)$$

und ferner die Reihe für Δ

$$y^3 - \frac{(1+k'^2)}{2}\,y - \frac{\pi^3}{K^3}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}\ldots\right) = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)$$

Weitere Differentiationen würden Gleichungen 5. Grades hervorbringen.

Nach den Formeln S. 276 folgt für

$$x^3 - 2\,\frac{1+k^2}{1-k^2}\,x + \frac{4\pi^6}{k^6\;K^6}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)^2 = 0$$

$$x = y + \frac{1}{y}$$

$$\log y = 8\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

u. a. m.

Zum Schluss geben wir einige Näherungswerte für K und E.

Auf S. 148 haben wir die Reihen aufgestellt

$$(1+\sqrt{k'})^2 = \frac{2\pi}{K}\left(1 + \frac{4q^4}{1+q^8} + \frac{4q^8}{1+q^{16}} + \frac{4q^{12}}{1+q^{24}}\ldots\right)$$

$$\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}} = \frac{2\pi}{K}\left(1 - \frac{4q^4}{1+q^8} + \frac{4q^8}{1+q^{16}} - \frac{4q'^2}{1+q^{24}}\ldots\right)$$

oder

$$(1+\sqrt{k'})^2 = \frac{2\pi}{K}(1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}\ldots)^2$$

$$\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}} = \frac{2\pi}{K}(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36})^2$$

$$\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{k'})^2 = \frac{2\pi}{K}(q+q^9+q^{25}+\ldots)^2$$

Aus der Addition der beiden reducirten vorletzten Relationen folgt

$$1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}}=\sqrt{\frac{8\pi}{K}}\,(1+2q^{16}\ldots)$$

voraus

$$\frac{\pi}{K}=\tfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}}\right)^2-\frac{4\pi}{K}q^{16}$$

bis q^{16} genau folgt.

Um E darzustellen, folgt aus den obigen Formeln zunächst

$$(1+\sqrt{k'})^2+\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}}=\frac{4\pi}{K}(1+4q^8+4q^{16}\ldots)$$

Auf S. 156 steht aber abgeleitet

$$\frac{E}{K}=1-\frac{k^2}{1-\sqrt{k'}}+\frac{\pi^2}{K^2}(1+8q^8-8q^{16}+\ldots)$$

In diese Formel setzen wir den Wert für $\left(\frac{\pi}{K}\right)^2$ aus der vorhergehenden ein, und erhalten

$$\frac{E}{K}=1-\frac{k^2}{1-\sqrt{k'}}+\frac{1}{16}\left((1+\sqrt{k'})^2+\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}}\right)^2(1-32q^{16})$$

oder

$$\frac{E}{K}=\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{2}\right)^4-k'+\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{2(1+k')\sqrt{k'}}$$

und da

$$K=\frac{8\pi}{\left(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}}\right)^2}$$

so ist auch

$$E=\pi\,\frac{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{k'})^4-8k'+(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}}}{\left(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}}\right)^2}$$

beide bis q^{16} genau.

IX.

Zur Theorie der quadratischen Reste.

Von

Karl Reich.

I. „Hat die Primzahl p die Form $4n-1$ und fügt man jedem „von allen incongruenten quadratischen Resten a von p die gegebene „durch p nicht teilbare Zahl h hinzu, so gibt es unter den so ent„standenen $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen $\frac{1}{4}(p-3)$ solche, welche wiederum „quadratische Reste von p sind".

Beweis. Wenn a und $a+h$ quadratische Reste von p sind, so gibt es Zahlen x und y, welche den Congruenzen

$$x^2 \equiv a+h, \quad y^2 \equiv a \pmod{p}$$

Genüge leisten. Hieraus folgt

$$(x+y)(x-y) \equiv h \pmod{p} \qquad (1)$$

Und umgekehrt: Wenn zwei Zahlen x und y der Congruenz (1) genügen, so ist nicht allein y^2, sondern auch y^2+h quadratischer Rest von p. Es handelt sich also darum, die Anzahl derjenigen von null verschiedenen Lösungen (x, y) der Congruenz (1) ausfindig zu machen, von denen keine zwei (x_1, y_1) und (x_2, y_2) so beschaffen sind, dass

$$y_1^2 \equiv y_2^2 \pmod{p}$$

ist. Zu dem Behufe scheide man zunächst aus der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots p-1 \tag{2}$$

die beiden Wurzeln ϱ und $p-\varrho$ der Congruenz

$$z^2 \equiv \left(\frac{h}{p}\right) h \pmod{p}$$

aus. Bedeutet alsdann r irgend eine der noch übrigen $p-3$ Zahlen der Reihe (2), so gibt es in derselben Reihe eine, aber auch nur eine von r und $p-r$ notwendig verschiedene Zahl s von der Beschaffenheit, dass

$$rs \equiv h \pmod{p}$$

ist. Setzt man

$$x+y \equiv r, \quad x-y \equiv s \pmod{p}$$

so entspricht jedem der $p-3$ Paare r, s eine Lösung (x, y), welche sich aus den Congruenzen

$$2x \equiv r+s, \quad 2y \equiv r-s \pmod{p}$$

sofort ergibt. Da umgekehrt einer bestimmten Lösung (x, y) ein bestimmtes Paar r, s entspeicht, so gibt es $p-3$ verschiedene Lösungen der Congruenz (1), von denen aber je vier, wie

$$(x, y); \quad (x, p-y); \quad (p-x, y); \quad (p-x, p-y)$$

welche den Paaren

$$r, s; \quad s, r; \quad p-s, p-r; \quad p-r, p-s$$

entsprechen, zu dem nämlichen quadratischen Reste a führen. Also gibt es $\frac{1}{4}(p-3)$ quadratische Reste a, welche die Eigenschaft haben, dass die Zahlen $a+h$ wiederum quadratische Reste von p sind. —

Da $-a = b$ quadratischer Nichtrest von p ist, $b+h = -(a-h)$ aber Rest oder Nichtrest, je nachdem $a-h$ Nichtrest oder Rest ist, so folgt aus dem eben bewiesenen Satze unmittelbar der andere:

„Hat p die Form $4n-1$ und fügt man jedem von allen incongruenten quadratischen Nichtresten b von p die durch p nicht teilbare Zahl h hinzu, so gibt es unter den so entstandenen $\frac{1}{2}(p-1)$ $\frac{1}{4}(p-3)$ solche, welche wiederum Nichtreste von p sind".

In gleicher Weise wie den ersten Satz beweist man den folgenden:

„Hat p die Form $4n+1$ und fügt man jedem von allen incongruenten quadratischen Resten a von p die durch p nicht teilbare Zahl h hinzu, so gibt es unter den so entstandenen $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen $\frac{1}{4}(p-5)$ oder $\frac{1}{4}(p-1)$ Reste, je nachdem h Rest oder Nichtrest von p ist".

Bedeutet β einen bestimmten Nichtrest von $p = 4n+1$, so ist $\beta a = b$ ein Nichtrest, $\beta h = h'$ ein Nichtrest oder Rest, je nachdem h ein Rest oder Nichtrest ist und $b+h'$ ein Nichtrest, wenn $a+h$ ein Rest von p ist. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus dem letzterem Satze der andere:

„Hat p die Form $4n+1$ und fügt man jedem von allen incon- „gruenten quadratischen Nichtresten b von p die durch p nicht „teilbare Zahl h hinzu, so gibt es unter den so entstandenen $\frac{1}{2}(p-1)$ „Zahlen $\frac{1}{4}(p-5)$ oder $\frac{1}{4}(p-1)$ Nichtreste, je nachdem h Nichtrest „oder Rest von p ist".

Bei Benutzung des Legendre'schen Symbols kann man die bisher gefundenen Sätze in den einen zusammenfassen:

„Bedeutet h eine gegebene durch die ungerade Primzahl p nicht „teilbare Zahl, so gibt es

$$m' = \tfrac{1}{4}(p - 3 - \tfrac{1}{4}[1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}]\left(\frac{hc}{p}\right)$$

„incongruente Zahlen c, für welche $\left(\frac{e}{p}\right)$ und $\left(\frac{b+h}{p}\right)$ constant und „gleich sind".

Wenn man voraussetzt, „dass $\left(\frac{e+h}{p}\right)$ immer gleich ist $-\left(\frac{c}{p}\right)$, wenn $c+h$ durch p teilbar ist", so ist die Anzahl m'' der incongruenten Zahlen c, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{o+h}{p}\right)$ constant und entgegengesetzt gleich sind, $= \frac{1}{2}(p-1) - m'$. Mit Rücksicht hierauf kann man statt des letzten Satzes den allgemeineren setzen:

„Bedeutet h eine gegebene durch die ungerade Primzahl p nicht „teilbare Zahl, so gibt es

$$m = \tfrac{1}{2}(p-1) - \left(\frac{c+h}{p}\right)\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{c}{p}\right) + \tfrac{1}{4}\left[1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left(\frac{h}{p}\right)\right\}$$

„incongruente Zahlen c, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant sind".

Wenn man insbesondere $h = 1$ setzt, so erhält man die folgenden Sätze:

„Hat die Primzahl p die Form $4n-1$, so gibt es ebensowol „unter ihren quadratischen Resten wie auch unter ihren Nichtresten, „welche zwischen kp und $(k+1)p$ liegen, $\frac{1}{4}(p-3)$ Paare unmittel-

bar aufeinander folgender Zahlen c und $c+1$". So sind z. B. unter den zwischen 0 und 11 liegenden Resten von 11 die zwei Paare 3, 4; 4, 5, unter den Nichtresten die zwei Paare 6, 7; 7, 8.

„Hat die Primzahl p die Form $4n+1$, so gibt es unter ihren zwischen kp und $(k+1)p$ liegenden Resten $\frac{1}{4}(p-5)$, unter ihren zwischen denselben Grenzen liegenden Nichtresten $\frac{1}{4}(p-1)$ Paare unmittelbar aufeinander folgender Zahlen c und $c+1$". So sind z. B. unter den zwischen 0 und 13 liegenden Resten von 13 die 2 Paare 3, 4; 9, 10, unter den Nichtresten die 3 Paare 5, 6; 6, 7; 7, 8.

II. „Bezeichnet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht theilbare Zahl, und lässt man c alle incongruenten quadratischen Reste [Nichtreste] von p durchlaufen, für welche $c+h$ gleichfalls Rest [Nichtrest] von p ist, so besteht die Congruenz

$$\Sigma\, c(c+h) \equiv h^2(\tfrac{1}{2}(p+1))^5 \pmod{p}$$

sofern $p > 5$ ist".

Beweis. Sind zunächst $c = a$ und $a+h$ quadratische Reste von p, und behält man die früheren Bezeichnungen bei, so ist

$$16a(a+h) \equiv 16x^2y^2 \equiv r^4+s^4-2r^2s^2 \pmod{p}$$

Bei einiger Ueberlegung findet man leicht: Wenn p die Form $4n-1$ hat, so ist

$$\Sigma(r^4+s^4) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4-h^2,$$
$$\Sigma r^2s^2 \equiv h^2\,\frac{p-3}{4} \pmod{p}$$

wenn dagegen p die Form $4n+1$ hat, so ist entweder

$$\Sigma(r^4+s^4) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4-2h^2$$
$$\Sigma r^2s^2 \equiv h^2\,\frac{p-5}{4} \pmod{p}$$

oder

$$\Sigma(r^4+s^4) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4$$
$$\Sigma r^2s^2 \equiv h^2\,\frac{p-1}{4} \pmod{p}$$

je nachdem h Rest oder Nichtrest von p ist. Daher ist für alle Fälle

$$\Sigma 16a(a+h) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4-\tfrac{1}{2}(p-1)h^2 \pmod{p}$$

Nun ist die Summe

$$1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4=\frac{p(p^2-1)}{2^5.5}(p^2-\tfrac{7}{3})$$

teilbar durch p, wenn $p>5$ ist [1]). Demnach wird

$$\Sigma\,16a(a+h)\equiv\tfrac{1}{2}(p+1)h^2 \pmod{p}$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Congruenz mit $(\frac{1}{2}(p+1))^4$, so erhält man die zu beweisende Congruenz

$$\Sigma\,a(a+h)\equiv(\tfrac{1}{2}(p+1))^5h^2 \pmod{p}$$

Durch Multiplication derselben mit β^2 ergibt sich

$$\Sigma\,b(b+h')\equiv(\tfrac{1}{2}(p+1))^5h'^2 \pmod{p}$$

wo $b=a\beta$ und $b+h'$ Nichtreste von p sind, wenn β einen bestimmten Nichtrest von p bedeutet. —

Lässt man z alle incongruenten quadratischen Reste von p durchlaufen, so wird

$$\Sigma z(z+h)=\Sigma z^2+\Sigma zh\equiv 0 \pmod{p}$$

denn es ist

$$\Sigma z^2\equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4\equiv 0 \pmod{p}$$

wenn $p>3$ ist; ebenso ist Σzh, d. i. die Summe aller incongruenten quadratischen Reste oder Nichtreste von p, (je nachdem h Rest oder Nichtrest von p ist) $\equiv 0 \pmod{p}$, wenn $p>3$ ist. Hieraus und aus dem vorhin bewiesenen Satze folgt der andere:

„Bezeichnet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht teilbare

---

1) Vermittelst der Bernoulli'schen Reihe findet man bei Berücksichtigung der Identität

$$m-2\binom{2m+1}{2}B_1+2^3\binom{2m+1}{4}B_3-\ldots$$
$$\ldots(-1)^m2^{2m-1}\binom{2m+1}{2m}B_{2m-1}=0$$

dass die Summe

$$1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}+\ldots+\left[\frac{p-1}{2}\right]^{2m}$$
$$-\frac{p(p^2-1)}{2^{2m+1}(2m+1)}\left(p^{2m-2}-\frac{2m^2+m-3}{3}p^{2m-4}+\ldots\right)$$

teilbar ist durch die Primzahl p, wenn $p>2m+1$ ist.

„Zahl, und lässt man c alle incongruenten quadratischen Reste „[Nichtreste] von p durchlaufen, für welche $c+h$ Nichtrest [Rest] „von p ist, so besteht die Congruenz

$$\Sigma\, c(c+h) \equiv -(\tfrac{1}{2}(p+1))^5 h^2 \pmod{p}$$

„sofern $p > 5$ ist".

Man kann beide Sätze in dem folgenden zusammenfassen:

„Bedeutet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht teilbare „Zahl, und lässt man c alle in Bezug auf den Modul p incongruenten „Zahlen durchlaufen, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant bleiben, „so ist

$$2^5\, \Sigma\, c(c+h) \equiv \left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{c+h}{p}\right) h^2 \pmod{p}$$

„wenn $p > 5$ ist".

Dieser und manch anderer Satz lässt sich auch leicht aus dem folgenden viel allgemeineren Satze ableiten, dessen Beweisführung nach der eben angewandten Methode ich dem Leser überlassen kann:

„Bedeutet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht teilbare „Zahl, und durchläuft c alle in Bezug auf den Modul p incongru„enten Zahlen, für welche nicht allein $\left(\frac{c}{p}\right)$, sondern auch $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ „constant bleibt, so ist

$$„\Sigma c^k \equiv (-1)^{k+1} 2^{p-2k-2} \left(\frac{c+h}{p}\right) \left[\left(2^{2k-1} + \binom{2k-1}{k-1}\right)\left(\frac{c}{p}\right) + 2^{2k-1}\left(\frac{-h}{p}\right)\right] h^k \pmod{p}$$

„wobei k eine positive ganze Zahl bedeutet, welche $< \tfrac{1}{2}(p-1)$ ist".

Wir wollen im folgenden die Auswertung der Determinanten einiger besonderer Systeme vornehmen. Hiezu bedürfen wir jedoch einiger Identitäten, die ich vorerst ableiten will.

Bei **positiven** x besteht die identische Gleichung

$$\binom{2x-1}{x-2} = \frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} + \frac{2}{3}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} + \frac{2}{4}\binom{5}{2}\binom{2x-7}{x-4} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\binom{1}{0} \qquad (1)$$

Für $x = 1$ besteht diese Gleichung zu Recht, da $\binom{1}{-1} = 0$ ist. Wenn $x > 1$ ist, so vereinige man in der Function

$$\chi(x) = \binom{2x-1}{x-2} - \frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} - \frac{2}{3}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} - \cdots$$
$$\cdots - \frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\binom{1}{0}$$

je zwei Glieder wie

$$-\frac{2}{y}\binom{2y-3}{y-2}\binom{2x-2y+1}{x-y} \quad \text{und}$$

$$-\frac{2}{x-y+2}\binom{2x-2y+1}{x-y}\binom{2y-3}{y-2} \quad \text{zu}$$

$$-\frac{2x+4}{y(x-y+2)}\binom{2y-3}{y-2}\binom{2x-2y+1}{x-y}$$

und erhält so

$$\chi(x) = \binom{2x-1}{x-2} - \frac{2x+4}{2x}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} - \frac{2x+4}{3(x-1)}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} - \cdots$$

Das letzte Glied dieser Reihe ist

$$-\frac{2}{\frac{x+2}{2}}\binom{x-1}{\frac{x-2}{2}}^2 \quad \text{oder}$$

$$-\frac{2x+4}{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x+3}{2}}\binom{x}{\frac{x-1}{2}}\binom{x-2}{\frac{x-3}{2}}$$

je nachdem x gerade oder ungerade ist. Durch successive Vereinigung der aufeinander folgenden Glieder erhält man leicht

$$\binom{2x-1}{x-2} = \frac{x-1}{x+1}\binom{1}{0}\binom{2x-1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x+1}\binom{1}{0}\binom{2x-1}{x-1} - \frac{2x+4}{2x}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} = \frac{x-3}{x+1}\binom{3}{1}\binom{2x-3}{x-2}$$

$$\frac{x-3}{x+1}\binom{3}{1}\binom{2x-3}{x-2} - \frac{2x+4}{3(x-1)}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} = \frac{x-5}{x+1}\binom{5}{2}\binom{2x-5}{x-3}$$

. . . .

Und da allgemein

$$\frac{x-2y-1}{x+1}\binom{2y+1}{y}\binom{2x-2y-1}{x-y-1}-\frac{2x+4}{(y+2)(x-y)}\binom{2y+1}{y}\binom{2x-2y-3}{x-y-2}$$
$$=\frac{x-2y-3}{x+1}\binom{2y+3}{y+1}\binom{2x-2y-3}{x-y-2}$$

ist, so wird schliesslich $\chi(x)$ entweder

$$=\frac{x-2y-3}{x+1}\binom{2y+3}{y+1}\binom{2x-2y-3}{x-y-2}-\frac{2}{\frac{x+2}{2}}\binom{x-1}{\frac{x-2}{2}}^2 \text{ für } y=\frac{x-4}{2}$$

oder

$$=\frac{x-2y-2}{x+1}\binom{2y+3}{y+1}\binom{2x-2y-3}{x-y-2} \text{ für } y=\frac{x-3}{2}$$

je nachdem x gerade oder ungerade ist. In beiden Fällen aber ergiebt sich, dass $\chi(x)=0$ ist. —

Von der Identität (1) nicht wesentlich verschieden sind die anderen:

$$\binom{2x+1}{x}=3\binom{2x-1}{x-1}+\frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2}+\frac{2}{3}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\binom{1}{0} \quad (2)$$

$$\frac{2}{x+2}\binom{2x+1}{x}=\frac{2}{x+1}\binom{2x-1}{x-1}+\binom{1}{0}\cdot\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}+\frac{2}{3}\binom{3}{1}$$
$$\times\frac{2}{x-1}\binom{2x-5}{x-3}+\cdots+\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\cdot\frac{2}{2}\binom{1}{0}+\frac{2}{x+1}\binom{2x-1}{x-1}$$

Der Nachweis der identischen Gleichungen

$$\frac{2}{2}\binom{1}{0}2^{2x-2}+\frac{2}{3}\binom{3}{1}2^{2x-4}+\cdots+\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}2^2+\frac{2}{x+1}\binom{2x-1}{x-1}$$
$$+\binom{2x+1}{x}=2^{2x} \quad (3)$$

$$\binom{1}{0}2^{2x-2}+\binom{3}{1}2^{2x-4}+\cdots+\binom{2x-3}{x-2}2^2=2x\binom{2x-1}{x-1}-2^{2x-1} \quad (4)$$

durch vollständige Induction ist so einfach, dass ich ihn übergehe. — Gleichfalls durch Induction beweist man die Identität

$$\binom{1}{0}\binom{2x-1}{x-1}+\binom{3}{1}\binom{2x-3}{x-2}+\binom{5}{2}\binom{2x-5}{x-3}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{2x-1}{x-1}\binom{1}{0}=\binom{2x+1}{x}-2^{2x} \quad (5$$

Dass diese Gleichung für

$$x = y+1$$

gilt, wenn sie für

$$x = 0.\ 1,\ 2 \dots y$$

richtig ist, zeigt man in der folgenden Weise: Man setze

$$x = y,\ y-1\ \dots\ 1,\ 0$$

multiplicire die so erhaltenen $y+1$ Gleichungen bzhw. mit

$$3,\ \frac{2}{2}\binom{1}{0},\ \frac{2}{3}\binom{3}{1},\ \dots,\ \frac{2}{y}\binom{2y-3}{y-2},$$
$$\frac{2}{y+1}\binom{2y-1}{y-1}+\binom{2y+1}{y}$$

und addire sie alsdann mit Berücksichtigung der Identitäten (2) und (3). —

Wir schreiten nun zur Auswertung der Determinante $k$ten Grades (die leeren Stellen des Systems enthalten Nullen)

$$R_k = \begin{vmatrix} 1, & 2 & & & \\ -\binom{3}{1} & 1, & 4 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ (-1)^{k-2}\binom{2k-3}{k-2}, & (-1)^{k-3}\binom{2k-5}{k-3}, & (-1)^{k-4}\binom{2k-7}{k-4} & & \\ & & & \dots & (2k-2) \\ (-1)^{k-1}\binom{2k-1}{k-1}, & (-1)^{k-2}\binom{2k-3}{k-2}, & (-1)^{k-3}\binom{2k-5}{k-3} & & \\ & & & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Zu dem Behufe addire man zu der mit $2k+1$ multiplicirten $k$ten Zeile ihres Systems die anderen Zeilen, nachdem man vorher die $k-1$te Zeile mit $8k-1$ und von den ersten $k-2$ Zeilen allgemein die $i$te mit $(-1)^{k-i-1}\frac{2}{k-i}\binom{2k-2i-3}{k-i-2}$ multiplicirt hat. Bezeichnet a_h das $h$te Element der so transformirten $k$ten Zeile des Systems der Determinante $(2k+1)R_k$, so ist demnach, wenn $h < k$ ist,

$$a_h = (-1)^{k-h}\Big[(2k+1)\binom{2k-2h+1}{k-h} - (8k-1)\binom{2k-2h-1}{k-h-1}$$
$$-\frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2k-2h-3}{k-h-2} - \dots - \binom{2k-2h-3}{k-h-2}\binom{1}{0}$$
$$+\frac{2}{k-h+1}\binom{2k-2h-1}{k-h-1}(2h-2)\Big]$$

Durch die Vereinigung des ersten, zweiten und letzten Gliedes der rechten Seite erhält man leicht

$$(2k+1)\binom{2k-2h+1}{k-h}-(8k-1)\binom{2k-2h-1}{k-h-1}$$
$$+\frac{2}{k-h+1}\binom{2k-2h-1}{k-h-1}(2h-2)=\binom{2k-2h-1}{k-h-2}$$

Mit Rücksicht auf die Identität (1) ist also

$$a_h=0 \quad \text{für} \quad h=1,2,3\ldots k-1$$

wogegen man unmittelbar findet

$$a_k=(2k+1)\binom{1}{0}+(8k-1)(2k-2)=(4k-3)(4k-1)$$

Hieraus folgt sofort, dass

$$(2k+1)R_k=(4k-2)(4k-3)R_{k-1}$$

aus welchem recursiven Ausdrucke, bei Rücksichtnahme auf $R_1=1$, der independente

$$R_k=(2k+3)(2k+5)(2k+7)\ldots(4k-1)$$

sich ergibt.

In ähnlicher Weise wie R_k berechnet man die Determinante $k$ten Grades

$$S_k=\begin{vmatrix} 1, & 2 & & & \\ \binom{3}{1} & 1, & 4 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \binom{2k-3}{k-2}, & \binom{2k-5}{k-3}, & \binom{2k-7}{k-4}, & \ldots & (2k-2) \\ \binom{2k-1}{k-1}, & \binom{2k-3}{k-2}, & \binom{2k-5}{k-3}, & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

deren System aus jenem der Determinante R_h hervorgeht, wenn man sämtliche Elemente positiv nimmt. Behufs Bestimmung von S_k addire man zu der mit $2k-1$ multiplicirten $k$ten Zeile die anderen Zeilen, nachdem man vorher die $k-1$te Zeile mit $-(8k-7)$ und von den ersten $k-2$ Zeilen allgemein die $i$te mit $\frac{2}{k-i}\binom{2k-2i-3}{k-i-2}$ multiplicirt hat. Bezeichnet b_h das $h$te Element der so transformirten $k$ten Zeile des Systems der Determinante $(2k-1)S_k$. so findet man wie früher

$$b_h = 0 \quad \text{für} \quad h = 1, 2, 3 \ldots k-1$$

$$b_k = (2k-1)\binom{1}{0} - (8k-7)(2k-2) = -(4k-5(4k-3)$$

woraus

$$(2k-1)S_k = -(4k-5)(4k-3)S_{k-1}$$

und, mit Rücksicht auf $S_1 = 1$

$$S_k = (-1)^{k-1}(2k+1)(2k+3)(2k+5)\ldots(4k-3)$$

folgt. —

Das System von k^2 Elementen der Determinante S_k lässt sich in ein System von $(k-1)^2$ Elementen verwandeln. Man transformire zunächst der Reihe nach die 1te, 2te ... $k-1$te Colonne jenes Systems derart, dass man allgemein zur $h$ten Colonne die folgenden Colonnen addirt, nachdem man vorher die $h+1$te, $h+2$te ... $k$te Colonne bzhw. mit

$$-3, \quad -\frac{2}{2}\binom{1}{0}, \quad -\frac{2}{3}\binom{3}{1} \ldots -\frac{2}{k-h}\binom{2k-2h-3}{k-h-2}$$

multiplicirt hat. Auf Grund der Identität findet man, dass das so transformirte System nach erlaubter Unterdrückung der letzten Zeile und Colonne die folgende Gestalt hat:

$$\begin{array}{llll}
-5, & 2 & & \\
-\frac{2}{2}\binom{1}{0}4, & -6.1-5, & 4 & \\
-\frac{2}{3}\binom{3}{1}6, & -\frac{2}{2}\binom{1}{0}6, & -6.2-5, & 6 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\frac{2}{k-2}\binom{2k-7}{k-4}(2k-4), & -\frac{2}{k-3}\binom{2k-9}{k-5}(2k-4), & \cdot & \cdot \\
 & & & (2k-4) \\
-\frac{2}{k-1}\binom{2k-5}{k-3}(2k-2), & -\frac{2}{k-2}\binom{2k-7}{k-4}(2k-2), & \cdot\ \cdot & \cdot \\
 & & & -6(k-1)-5
\end{array}$$

In diesem Systeme transformire man nun der Reihe nach die $k-1$te, $k-2$te ... 2te Zeile derart, dass man allgemein zur $i$ten Zeile die vorangehenden Zeilen addirt, nachdem man vorher von diesen $i-2$ Zeilen allgemein die $i-x$te mit $\binom{2x+1}{x}$ multiplicirt hat. Mit Rücksicht auf die Identitäten (2) und (5) geht hiedurch das letzte System über in das folgende:

$$\begin{matrix} -[1+2^2], & 2 & & \\ -\left[\binom{3}{1}+2^4\right], & -[1+2^2], & 4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \\ -\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right], & -\left[\binom{2k-7}{k-4}+2^{2k-6}\right], & \ldots & (2k-4) \\ -\left[\binom{2k-3}{k-2}+2^{2k-2}\right], & -\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right], & \ldots & -[1+2^2] \end{matrix}$$

Die Determinante dieses Systems hat den Wert S_k. Multiplicirt man jedoch die ungeraden Zeilen und die geraden Colonnen mit -1 und bezeichnet die Determinante $k-1$ ten Grades des so erhaltenen Systems mit T_{k-1}, so ist

$$T_{k-1} = \begin{vmatrix} 1+2^2, & 2 & & \\ -\left[\binom{3}{1}+2^4\right], & 1+2^2, & 4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ (-1)^{k-3}\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right], & (-1)^{k-4}\left[\binom{2k-7}{k-4}+2^{2k-6}\right] & & \\ & \ldots\ (2k-4) & & \\ (-1)^{k-2}\left[\binom{2k-3}{k-2}+2^{2k-2}\right], & (-1)^{k-3}\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right] & & \\ & \ldots\ 1+2^2 & & \end{vmatrix}$$

$$T_{k-1} = (-1)^{k-1} S_k = (2k+1)(2k+3)(2k+5)\ldots(4k-3)$$

Den Wert der Determinante T_{k-1} erhält man auch unmittelbar, wenn man zu der mit $2k-1$ multiplicirten $k-1$ ten Zeile ihres Systems die vorangehenden Zeilen addirt, nachdem man vorher die $k-2$ te Zeile mit $8k-5$ und von den ersten $k-3$ Zeilen allgemein die $i$te mit $(-1)^{k-i}\dfrac{2}{k-i-1}\binom{2k-2i-5}{k-i-3}$ multiplicirt hat. Bei Benutzung der Identitäten (1) und (3) findet man, dass die Elemente der so transformirten $k-1$ ten Zeile mit Ausnahme des letzten, welches

$$= 5(2k-1)+(2k-4)(8k-5) = (4k-5)(4k-3)$$

wird, verschwinden. Also ist

$$(2k-1)\,T_{k-1} = (4k-5)(4k-3)\,T_{k-2}$$

woraus, mit Rücksicht auf $T_1 = 5$, der independente Ausdruck für T_{k-1} sich sofort ergibt.

Behufs Auswertung der Determinante $k-1$ ten Grades

$$U_{k-1} = \left|\begin{array}{llll} 1+2^2, & 2 & & \\ \binom{3}{1}+2^4, & 1+2^2, & 4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \\ \binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}, & \binom{2k-7}{k-4}+2^{2k-6}, & \ldots & (2k-4) \\ \binom{2k-3}{k-2}+2^{2k-2}, & \binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}, & \ldots & 1+2^2 \end{array}\right|$$

deren System aus jenem der Determinante T_{k-1} hervorgeht, wenn man sämtliche Elemente positiv nimmt, addire man zu der mit $(2k-3)(8k-19)$ multiplicirten $k-1$ ten Zeile ihres Systems die anderen Zeilen, nachdem man vorher die $k-2$ te Zeile mit $-(64k^2-240k+201)$ und von den ersten $k-3$ Zeilen allgemein die i te mit

$$\frac{2}{k-i-1}\binom{2k-2i-5}{k-i-3}(8k-19)+3i\binom{2k-2i-5}{k-i-3}$$

multiplicirt hat. Bei Benutzung der Identitäten (1), (3), (4) und (5) findet man, dass alle Elemente der so transformirten $k-1$ ten Zeile mit Ausnahme des letzten, welches

$$= 5(2k-3)(2k-19)-(2k-4)(64k^2-240k+201)$$
$$= -(4k-11)(4k-9)(8k-11)$$

wird, verschwinden. Daher ist

$$(2k-3)(8k-19)\,U_{k-1} = -(4k-11)(4k-9)(8k-11)\,U_{k-2}$$

woraus, mit Rücksicht auf $U_1 = 5$, der independente Ausdruck

$$U_{k-1} = (-1)^k(2k-1)(2k+1)(2k+3)\ldots(4k-9).(8k-11)$$
$$= (-1)^{k-2}(8k-11)\,R_{k-2}$$

sich ergibt. Tatsächlich geht das System

$$\begin{array}{lllll} -1, & 2 & & & \\ -\binom{3}{1}, & -1, & 4 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & & \\ -\binom{2k-7}{k-4}, & -\binom{2k-9}{k-5}, & \ldots & (2k-6) & \\ -\binom{2k-5}{k-3}, & -\binom{2k-7}{k-4}, & \ldots & -1, & (2k-4) \\ 0, & 0, & \ldots & & (8k-11) \end{array}$$

dessen Determinante den Wert $(-1)^{k-2}(8k-11)R_{k-2}$ hat, in das System der Determinante U_{k-1} über durch die folgende Umwandlung: Man transformire zunächst der Reihe nach die $k-1$te, $k-2$te ... 2te Zeile derart, dass man zur $k-1$ten Zeile die mit -4 multiplicirte $k-2$te Zeile, sonst aber allgemein zur $i$ten Zeile die vorangehenden $i-1$ Zeilen addirt, nachdem man vorher von diesen die $i-1$te, $i-2$te ... 1te Zeile bzhw. mit

$$-3, \quad -\frac{2}{2}\binom{1}{0}, \quad -\binom{2}{3}\binom{3}{1}, \quad \ldots \quad -\frac{2}{i-1}\binom{2i-5}{i-3}$$

multiplicirt hat; in dem so erhaltenen Systeme transformire man wieder der Reihe nach die 1te, 2te ... $k-2$te Colonne derart, dass man allgemein zur $h$ten Colonne die nachfolgenden $k-h-1$ Colonnen addirt, nachdem man vorher von diesen die $h+1$te, $h+2$te ... $k-1$te Colonne bzhw. mit

$$\binom{3}{1}, \quad \binom{5}{2}, \quad \binom{7}{3}, \quad \ldots \binom{2k-2h-1}{k-h-1}$$

multiplicirt hat.

Ersetzt man in den Systemen der Determinanten R_k, S_k, T_k, U_k die parallel zur Diagonale verlaufenden Elemente

$$2, \quad 4, \quad 6 \quad \ldots \quad (2k-2)$$

durch die Glieder der allgemeineren arithmetischen Reihe

$$x, \quad 2x, \quad 3x \quad \ldots \quad (k-1)x$$

und in den Systemen der Determinanten T_k, U_k überdies jedes andere Element von der Form

$$\pm\left\{\binom{2y+1}{y}+2^{2y+2}\right\} \text{ durch } \pm\left\{\binom{2y+1}{y}+2^{2y+1}x\right\}$$

und bezeichnet man die Determinanten der so verallgemeinerten Systeme bzhw. mit $R_{k,x}$, $S_{k,x}$, $T_{k,x}$, $U_{k,x}$, so erhält man leicht bei Zugrundelegung der hier angewandten Methode

$$R_{k,x} = ((k+1)x+1)((k+2)x+1)((k+3)x+1) \ldots ((2k-1)x+1)$$

$$S_{k,x} = (-1)^{k-1}((k+1)x-1)((k+2)x-1)((k+3)x-1) \ldots \ldots ((2k-1)x-1)$$

$$T_{k,x} = ((k+1)x+1)((k+2)x+1)((k+3)x+1) \ldots (2kx+1)$$

$$U_{k,x} = (-1)^{k-1}((k+1(x-1)((k+2)x-1)\dots$$
$$\dots((2k-2)x-1).(2kx^2-x-1)$$

ausgenommen

$$U_{1,x} = \frac{1}{x-1}(2x^2-x-1) = 2x+1$$

Die Werte der Determinanten R_k, S_k, T_k, U_k ergeben sich aus diesen Formeln, wenn man $x = 2$ setzt. Auch die Determinanten $R_{k,x}$, $S_{k,x}$, $T_{k,x}$, $U_{k,x}$ sind wiederum nur specielle Fälle von Determinanten ähnlicher, aber noch allgemeinerer Systeme.

IV. Man bilde die Combinationen $k$ten Grades aller nach dem ungeraden Primzahlenmodulus p incongruenten Zahlen c, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant bleiben (h bedeutet wieder eine gegebene durch p nicht teilbare Zahl), betrachte die Combinationen als Producte mit a_k Wir stellen uns die Aufgabe a_k zu finden.

Wie früher (II) werde die Summe Σc^k mit s_k bezeichnet Die Newton'schen Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 & \equiv s_1 \\ s_1 a_1 - 2a_2 & \equiv s_2 \\ s_2 a_1 - s_1 a_2 + 3a_3 & \equiv s_3 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ s_{k-1} a_1 - s_{k-2} a_2 + s_{k-3} a_3 - \dots + (-1)^{k-1} k a_k & \equiv s_k \end{array}\right\} \pmod{p}$$

ergeben für a_k die Lösung

$$k!\, a_k \equiv \begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ s_{k-1} & s_{k-2} & . & . & . & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & . & . & . & s_1 \end{vmatrix} \pmod{p}$$

Man setze nun in dem System der Determinante auf der rechten Seite dieser Congruenz für die Grössen $s_1, s_2 \dots$ die ihnen congruenten Werte (II) und transformire alsdann das System derart, dass man dessen Zeilen und Colonnen, u. zw. allgemein die $i$te Zeile mit $2^{2i+1}h^{-(i-1)}$ und die $n$te Colonne mit $2^{-2(n-1)}h^{n-1}$, multiplicirt. Von jetzt an sind vier Fälle zu unterscheiden.

a. Wenn

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right) = -\left(\frac{-h}{p}\right)$$

ist, so erhält man

$$s_k \equiv (-1)^{k+1}\, 2^{p-2k-2} \binom{2k-1}{k-1} h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1} R_k h^k = 2^{p-3k-2}(2k+3)(2k+5)\ldots(4k-1)h^k \pmod{p}$$

b. Wenn

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right) = \left(\frac{-h}{p}\right)$$

so ist

$$s_k \equiv (-1)^{k+1}\, 2^{p-2k-2} \left[\binom{2k-1}{k-1} + 2^{2k}\right] h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1} T_k h^k = 2^{p-3k-1}(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+1)h^k \pmod{p}$$

c. Wenn

$$\left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right) = -\left(\frac{-h}{p}\right)$$

so ist

$$s_k \equiv (-1)^{k}\, 2^{p-2k-2} \binom{2k-1}{k-1} h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1}.(-1)^k S_k h^k = -2^{p-3k-1}(2k+1)(2k+3)\ldots(4k-3)h^k \pmod{p}$$

d. Ist endlich

$$\left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right) = \left(\frac{-h}{p}\right)$$

so erhält man

$$s_k \equiv (-1)^{k}\, 2^{p-2k-2} \left[\binom{2k-1}{k-1} + 2^{2k}\right] h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1}.(-1)^k U_k h^k = -2^{p-3k-1}(2k+1)(2k+3)\ldots(4k-5).(8k-3)h^k \pmod{p}$$

Wenn man insbesondere für k den grössten Wert m, den es anzunehmen vermag, setzt (I), so erhält man nach einigen leichten Rechnungen den folgenden Lehrsatz:

„Bedeutet h eine gegebene durch die ungerade Primzahl p nicht „teilbare Zahl, und bezeichnet a_m das Product der m in Bezug auf „den Modul p incongruenten Zahlen, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ „constant bleiben, so ist“

$$a_m \equiv h^m \quad (\text{mod. } p), \text{ wenn } \left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right)$$

$$a_m \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} h^m \ (\text{mod } p) \quad ,, \quad \left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right)$$

$$a_m \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2h^m \ (\text{mod. } p) \quad ,, \quad \left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{h}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right)$$

$$2a^m \equiv h^m \ (\text{mod. } p) \quad ,, \quad \left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{h}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right)$$

X.

Curve gegebener Krümmung auf gegebener Fläche.

Von

R. Hoppe.

Die folgende Untersuchung beschränkt sich auf das Ziel die genannte geometrische Bestimmung einer Curve durch eine Differentialgleichung auszudrücken. Doch hat vielleicht schon dieser Anfang der Darstellung der Curve wegen der unerwarteten Einfachheit des Resultats, zu welcher der Weg nicht sogleich zu Tage liegt, einiges Interesse.

Die Coordinaten x, y, z eines Punkts der Fläche seien gegebene Functionen der beliebigen Parameter u, v, die Richtungscosinus der Normale p, q, r, das Element einer beliebigen Linie s auf der Fläche sei bestimmt durch

$$\partial s^2 = e\,\partial u^2 + 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2$$

und zwar sei

$$t^2 = eg - f^2$$

Die Fundamentalgrössen 2. Ordnung seien

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots;\quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots;\quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots$$

Längs einer gesuchten Linie s sei

$$k = \frac{\partial v}{\partial u};\quad k' = \frac{\partial k}{\partial u}$$

Betrachtet man u, v, k als unabhängig, so sei

$$J' = \frac{\partial J}{\partial u} + k\frac{\partial J}{\partial v} \tag{1}$$

so dass, wenn J längs s differentiirt und

$$w = e + 2kf + k^2 g \tag{2}$$

setzt, man erhält

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{w}}\left(J' + k'\frac{\partial J}{\partial k}\right) \tag{3}$$

Ferner sei

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A\frac{\partial x}{\partial u} + A_1\frac{\partial x}{\partial v} + Ep \\
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + Fp \\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + Gp
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mit Anwendung auf y und z, ferner

$$\left.\begin{aligned}
A_2 &= Ae + A_1 f = \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u}; \quad A_3 = Af + A_1 g = \frac{\partial f}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} \\
B_2 &= Be + B_1 f = \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}; \quad B_3 = Bf + B_1 g = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} \\
C_2 &= Ce + C_1 f = \frac{\partial f}{\partial v} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}; \quad C_3 = Cf + C_1 g = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ferner

$$D_j = A_j + 2kB_j + k^2 C_j \quad (j = 0,\ 1,\ 2.\ 3) \tag{6}$$

$$S = D_2; \quad T = D_3 \tag{7}$$

ferner

$$X = x'; \quad Y = y'; \quad Z = z'; \quad R = X'^2 + Y'^2 + Z'^2$$

woraus:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = w \tag{8}$$

endlich bezeichne ϱ den Krümmungsradius von s und

$$H = \frac{E + 2kF + k^2 G^2}{w} \tag{9}$$

die Krümung des Normalschnitts, welcher s berührt.

Nun ist bekanntlich

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{X}{\sqrt{w}}\right)^2+\ldots=\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial X}{\partial s}-\frac{X}{2w^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2+\ldots$$

$$=\frac{1}{w}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2+\ldots\right]-\frac{1}{w^2}\frac{\partial w}{\partial s}\frac{X\partial X+\ldots}{\partial s}+\frac{X^2+\ldots}{4w^3}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2$$

nach Gl. (8)

$$=\frac{1}{w}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2+\ldots\right]-\frac{1}{4w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2$$

nach Gl. (3)

$$=\frac{1}{w^2}\left[\left(X'+k'\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\ldots\right]-\frac{1}{4w^3}[w'+2(f+kg)k']^2 \tag{10}$$

Nach Gl. (1) hat man:

$$X=x'=\frac{\partial x}{\partial u}+k\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$X'=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+2k\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+k^2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

d. i. nach Gl. (4) (6) (7):

$$X'=D\frac{\partial x}{\partial u}+D_1\frac{\partial x}{\partial v}+Hwp$$

$$X'\frac{\partial x}{\partial v}+\ldots=Df+D_1 g=T$$

$$X'^2+\ldots=D^2e+2DD_1f+D_1^2g+H^2w^2$$

was sich auch schreiben lässt:

$$R=SD+TD_1+H^2w^2 \tag{11}$$

Jetzt lautet Gl. (10):

$$\frac{w^3}{\varrho^2}=Rw-\tfrac{1}{4}w'^2+k'[2Tw-(f+kg)w']+k'^2[gw-(f+kg)^2] \tag{12}$$

Dies hat die Form

$$w^3\left(\frac{1}{\varrho^2}-H^2\right)=L+2k'M+k'^2N \tag{13}$$

Die Klammer zur Linken bedeutet das Quadrat der geodätischen Krümmung und sei bezeichnet durch K^2. Die Werte der Coefficienten sind nach Gl. (12):

$$N=eg-f^2=t^2$$

ferner, weil nach Gl. (2) (1) (5) (7)

$$w' = \frac{\partial e}{\partial u} + k\frac{\partial e}{\partial v} + 2k\frac{\partial f}{\partial u} + 2k^2\frac{\partial f}{\partial v} + k^2\frac{\partial g}{\partial u} + k^3\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$= 2(A_2 + 2kB_2 + kA_3 + k^2C_2 + 2k^2B_3 + k^3C_3)$$
$$= 2(S + kT) \qquad (14)$$

ist:

$$M = Tw - (S+kT)(f+kg)$$
$$= T(e+kf) - S(f+kg)$$
$$= (D_1 - kD)t^2$$
$$L = (SD + TD_1)w - (S+kT)^2$$

und zwar ist

$$Dt^2 = Sg - Tf; \quad D_1t^2 = Te - Sf$$

Drückt man überall D und D_1 in S und T aus, so ergibt sich identisch:

$$LN - M^2 = 0$$

daher ist die rechte Seite der Gl. (13) ein Quadrat, und die Gleichung lautet:

$$w^3K^2 = \left(k't + \frac{M}{t}\right)^2$$

woraus:

$$k' = kD - D_1 \pm w^{\frac{3}{2}}\frac{K}{t} \qquad (15)$$

Ist die geodätische Krümmung gegeben, so ist K bekannte Function von u, v, desgleichen e, f, g, t; w, S, T, D, D_1 enthalten ausserdem k im 2. Grade. Die Gleichung, welche die Curve bestimmt, ist 2. Ordnung; da sie $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ explicit gibt, so lässt sich die Lösung in taylor'scher Reihe ausdrücken. Ist statt dessen die Krümmung im Raume gegeben, so ist

$$K = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - H^2}$$

zu setzen und H in u, v, k bekannt

Ist die Fläche abwickelbar, so ist für constantes K die Linie offenbar ein geodätischer Kreis, daher die Integration der Gl. (15) immer ausführbar.

XI.

Miscellen.

1.

Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Neoide mittelst eines Kegelschnittes.

Bekanntlich ist die Polar-Subnormale der Neoide constant und gleich a, wenn ihre Polargleichung

$$r = b + a\varphi$$

lautet. Diese Eigenschaft lässt sich auch elementar mit Benutzung ähnlicher Dreiecke ableiten.

Ist O der Pol, P irgend ein Punkt der Neoide und K der mit dem Halbmesser a beschriebene Polar-Subnormalenkreis, so erhält man die Normale N des Punktes P, wenn man in O den auf dem Leitstrahl

$$OP = r$$

senkrechten Halbmesser OQ errichtet und Q mit P verbindet.

Um den Krümmungsmittelpunkt M zu finden, hat man den Schnittpunkt von N mit der unendlich nahen Normale zu suchen Der unendlich nahe Punkt P' der Neoide liegt aber in der Tangente T des Punktes P, die auf N senkrecht steht. Errichtet man in O auf OP' eine Senkrechte, so schneidet diese K in Q', und es ist $Q'P'$ die unendlich nahe Normale N'. Da aber Q' unendlich nahe an Q zu liegen kommt, so kann man Q' auch als in der Tangente L des Kreises K, mit dem Berührungspunkte Q, gelegen betrachten. Wenn man aber einen rechten Winkel um seinen Scheitel O herumdreht, so schneiden seine Schenkel zwei feste Geraden L und T

in zwei projectivischen Punktreihen $QQ' \dots$ und $PP' \dots$, deren Verbindungslinien bekanntlich einen Kegelschnitt einhüllen, der auch die festen Geraden in den Punkten A und B berührt, die man erhält, wenn man O mit C verbindet und auf OC in O eine Senkrechte errichtet. Die zwei unendlich nahen Normalen N und N' der Neoide sind demnach auch zwei unendlich nahe Tangenten des Kegelschnittes, und ihr Schnittpunkt, der Krümmungsmittelpunkt M, der Berührungspunkt von N, und als solcher der vierte harmonische Punkt zu D (dem Schnittpunkt der Tangente N mit der Verlängerung der Berührungssehne AB) in Bezug auf QP. Er kann demnach, nachdem einmal der Polar-Subnormalenkreis gezogen wurde, mit dem Lineal allein gefunden werden, dass man im Vierecke $AQPB$ die Diagonalen zieht, und ihren Schnittpunkt E mit C verbindet.

Der normalen Schenkel wegen ist

$$\text{Wkl. } DOQ = QCO \qquad 1)$$

Da aber OQ auf QC und OP senkrecht steht, so ist

$$\text{Wkl. } QCO = COP$$

daher mittelst 1)

$$\text{Wkl. } DOQ = \text{Wkl. } COP \qquad 2)$$

Der rechten Winkel bei O und P wegen ist $CPOD$ ein Kreisviereck, daher die Peripheriewinkel ODQ und OCP einander gleich, und mittelst 2)

$$\triangle DQO \sim \triangle OCP$$

daher

$$DQ : CP = a : r \qquad 3)$$

Endlich sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke QPC und QPO ähnlich, da die Winkel QCP und OQP der normalen Schenkel wegen einander gleich sind, daher

$$CP : a = PQ : r$$

und da im rechtwinkligen Dreiecke OQP

$$PQ = \sqrt{a^2 + r^2}$$

auch

$$CP = \frac{a\sqrt{a^2 + r^2}}{r}$$

Dies in 3) eingesetzt folgt:

$$DQ = \frac{a^2\sqrt{a^2 + r^2}}{r^2}$$

Der harmonischen Punkte wegen ist aber ohne Rücksicht auf die Vorzeichen der Strecken

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{DP}{DQ}$$

daher, wenn man den Krümmungsradius mit ϱ bezeichnet:

$$\frac{\varrho}{\sqrt{a^2+r^2}-\varrho} = \frac{\sqrt{a^2+r^2}+\frac{a^2\sqrt{a^2+r^2}}{r^2}}{\frac{a^2\sqrt{a^2+r^2}}{r^2}}$$

woraus sich der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius der Neoide

$$\varrho = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$$

ergibt.

Wien, im October 1891.

Wilhelm Rulf.

2.

Ueber den Einfluss der Aenderung der Excentricität der Erdbahn auf die mittlere Umlaufszeit des Mondes.

Wie aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung und dem Gravitationsgesetz folgt, wirkt ein ausserhalb eines Systems von Himmelskörpern befindlicher Körper annähernd so auf dasselbe, als ob die Masse sämtlicher Körper des Systems in dem Schwerpunkte desselben vereinigt wäre. Für den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Erde und des Mondes beträgt die Genauigkeit dieser Bestimmung in Bezug auf die Entfernung von der Sonne annähernd

$$\frac{Mm_1\,r^4}{m_2\,R^4}$$

wo M, sowie m_1 und m_2 die Masse der Sonne, bezüglich des Mondes und der Erde, R und r die Radien der Erd- bezüglich der Mondbahn bezeichnen, oder

$$\frac{1}{224\,.\,400\,.\,80}$$

(Prof. Dr. Dziobek, Die math. Theorieen der Planetenbewegungen. Seite 157).

Es seien x_1 und x_2 u. s. w. die Coordinaten von m_1 und m_2 in Bezug auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt s, x und y die Coor-

dinaten von m_1 in Bezug auf den Schwerpunkt der Erde, l die Entfernung des Schwerpunktes s von der Sonne S, die X-Achse falle mit l oder deren Verlängerung zusammen, die Constante der Anziehung k sei der Einfachheit wegen vorläufig $= 1$, dann ist, wenn l vorläufig als constant und s als ruhend gedacht, ferner die Neigung i der Mondbahn nicht berücksichtigt wird,

$$1)\quad \frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{M(l\mp x_1)}{\{(l\mp x_1)^2+y_1^2\}^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{M(l\pm x_2)}{\{(l\pm x_2)^2+y_2^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$2)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{My_1}{\{(l\mp x_1)^2+y_1^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{My_2}{\{(l\pm x_2)^2+y_2^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

wo für m_1+m_2 der Ausdruck μ gesetzt ist. Das Vorzeichen — oder + wird dadurch bestimmt, je nachdem Annäherung oder Entfernung der Körper durch die betreffende Componente bewirkt wird. Die Werte der Coordinaten sind als absolut zu denken.

Da

$$x = x_1 + x_2 = \frac{\mu}{m_2} x_1 = \frac{\mu}{m_1} x_2$$

so erhält man, wenn man Gleich. 1) mit $2dx$ und Gleich. 2) mit $2dy$ mult., darauf beide Gleichungen addirt und integrirt

$$3)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V_1^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{2M\mu}{m_2 r_1} + \frac{2M\mu}{m_1 r_2} - (b_1 + b)$$

wo r, sowie r_1 und r_2 die bezüglichen Entfernungen der Himmelskörper, b_1 und b Constante bezeichnen.

Ohne Berücksichtigung von M würde man erhalten haben

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - b$$

ferner in bekannter Weise

$$r^2 dv = c\,dt$$

(Flächensatz) und hieraus die Umlaufszeit

$$4)\quad T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

wo a die halbe grosse Achse bezeichnet.

Führt man in Gleich. 4) die Constante

$$b = \frac{\mu}{a}$$

ein, so erhält man

$$T = \frac{2\pi\mu}{bl} \tag{5}$$

Diese Formel lässt sich erweitern, so dass sie näherungsweise die Umlaufszeit ergiebt, wenn M berücksichtigt wird.

In der Gleichung

$$r^2 dv = c\,dt$$

wird statt c dann $F(t)$ zu setzen sein. Für eine bestimmte Zeit t_1 habe nun $F(t_1)$ den Wert c_1; setzt man nun aus Gleich. 3)', deren rechte Seite man auch schreiben kann

$$\frac{2\left\{\mu + \left(\frac{M\mu}{m_2 r_1} + \frac{M\mu}{m_1 r_2} - b_1\right) r\right\}}{r} - b = \frac{2\mu_1}{r} - b \tag{6}$$

diesen Ausdruck μ_1, wo r im Zähler, sowie r_1 und r_2 jetzt auch bestimmte zu t_1 gehörige Werte bezeichnen sollen, in Gleichung 5) statt μ, so erhält man eine Umlaufszeit, die durch diese Werte bedingt wird. Giebt man nun r, sowie r_1 und r_2 alle möglichen Werte, welche diese Grössen annehmen können, und dividirt durch die Anzahl derselben, so wird man eine Umlaufszeit erhalten, welche annähernd der wirklichen entspricht. Da durch den Einfluss von M die Zeit T nur um etwa 0,04 Tage vergrössert wird, so kann man zu dieser angenäherten Berechnung den aus Gleich. 4) sich ergebenden Wert von T benutzen. Die Anzahl der verschiedenen Werte von r_1 und r_2 ist dann

$$\frac{T}{dt} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-\eta^2}}{r^2 dv}$$

wo η die numerische Excentricität der Mondbahn bezeichnet. Nun ist, wenn r_3 und r_4 die Entfernung der Körper m_1 und m_2 vom gemeinschaftlichen Schwerpunkt s und φ den von r_3 und l eingeschlossenen Winkel bezeichnet,

$$r_1^2 = l^2 - 2lr_3\cos\varphi + r_3^2$$

ebenso

$$r_2^2 = l^2 + 2lr_4\cos\varphi + r_4^2$$

ferner ist

$$d\varphi = dv$$

Für t_0 ist $\varphi = 0$, für $t = T$ ist $\varphi = 2\pi$.

Wegen Drehung der Apsidenlinie der Mondbahn kann man annähernd r als unabhängig von φ ansehen und für r einen Mittelwert setzen, da r zwischen $a(1+\eta)$ und $a(1-\eta)$ liegen muss.

Die Constante b_1 muss so bestimmt werden, dass in Gleich. 3)

$$r_1 = r_2 = l$$

gesetzt wird, da dann M auf s sowol als auch auf m_1 und m_2 in gleicher Stärke wirkt, also keinen ändernden Einfluss auf m_1 und m_2 in Bezug auf das System ausübt.

Dann würden m_1 und m_2, sowie s auf der Peripherie eines mit l als Radius beschriebenen Kreises, anstatt auf der Sehne zwischen m_1 und m_2 liegen. Bezeichnet s_1 den auf dieser Sehne liegenden Schwerpunkt, so ist, wenn wir die Entfernung zwischen s und s_1 mit p bezeichnen, da die fast gleichschenkligen Dreiecke Sm_1s und sm_2s_1 ähnlich sind,

$$p = \frac{m_1 m_2 r^2}{\mu^2 l}$$

Diese Formel ist wegen der Kleinheit von r im Verhältniss zu hinreichend genau und giebt annähernd

$$p = \frac{1}{80.81.\,400^2}$$

wenn $l = 1$ gesetzt wird. Annähernd ebenso gering ist der Unterschied, wenn r_1 und r_2 etwas grösser als l genommen werden, indem man durch s eine zu der Sehne parallele Tangente sich gezogen denkt und auf dieser m_1 und m_2 annimmt. Verwandelt man nun

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{l\left(1 - \frac{2lr_3\cos\varphi - r_3^2}{l^2}\right)^{1/2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{l\left(1 + \frac{2lr_4\cos\varphi + r_4^2}{l^2}\right)^{1/2}}$$

vermittelst des binomischen Satzes in eine nach Potenzen von

$$-\frac{2lr_3\cos\varphi - r_3^2}{l^2} \quad \text{bezüglich} \quad \frac{2lr_4\cos\varphi + r_4^2}{l^2}$$

fortschreitende Reihe, deren Convergenz sosort einleuchtet, da

$$\frac{r}{l} \text{ etwa } \frac{1}{400}$$

ist, multiplicirt dann mit

$$\frac{r^2\,d\varphi}{2\pi a^2\sqrt{1-\eta^2}}$$

und integrirt zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man, wenn man b wieder $= \frac{\mu}{a}$ setzt, im Zähler und Nenner durch μ dividirt und schliesslich $k^2\mu$ und k^2M für μ und M schreibt,

$$7)\qquad T_1 = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{\mu}}\left\{1 + \frac{1}{4}\frac{M r_0^3}{\mu l^3} + \dots\right\}$$

Die folgenden Glieder sind von höherer Ordnung. Für r_0^3 ist ein Mittelwert zu setzen, der zwischen $a^3(1+\eta)^3$ und $a^3(1-\eta)^3$ liegt. Nimmt man die halbe Summe der beiden Grenzwerte, so erhält man

$$r_0^3 = a^3(1 + 3\eta^2 + \dots)$$

Da die Apsidenlinie der Mondbahn sich nicht nach dem Flächengesetze

$$r^2 dv = c\,dt$$

bewegt, diese Bewegung vielmehr von M abhängig, die Entfernung Ml aber fast constant ist, so kann man r als unabhängig von φ ansehen und für r_0^3 den bei der Berechnung von Gleich. 7) sich ergebenden Mittelwert

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^5(1-\eta^2)^5\,dv}{a^2\sqrt{1-\eta^2}\,(1+\eta\cos v)^5}$$

setzen, da

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos v}$$

welcher ebenfalls

$$= a^3(1 + 3\eta^2 + \dots) \text{ beträgt.}$$

Der Einfluss, den die Neigung i der Mondbahn ausübt, ist nur gering; er ist kleiner als $\frac{3}{80\,000}$ des 2. in Klammern eingeschlossenen Gliedes der Gleichung 7), denn es ist

$$\sqrt{\frac{l^2 \pm 2lr\cos i + r^2}{(l\pm r)^2}} = 1 \pm \frac{2lr\sin^2\frac{1}{2}i}{(l+r)^2} + \dots \quad\text{oder}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{200\,.\,400} + \dots$$

wenn i etwa $5\frac{1}{2}^0$ gesetzt wird.

Denkt man sich nun den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Erde und des Mondes durch die elliptische Bahn um die Sonne bestimmt und bezeichnet l jetzt durch R, so lässt sich zwischen R_1 und R_2 am Anfang und Ende eines Mondumlaufs immer ein mittlerer Wert R_m denken, welcher zwischen diesen liegt, so dass die Gleich. 7) bestehen bleibt, wenn man für l den Wert R_m setzt. Diese R_m werden, da man T_1 als irrational zur Umlaufszeit der Erde annehmen kann, nach einer grossen Zahl von Umläufen proportional dem Flächensatz verteilt liegen; nur in der Nähe der grossen Achse $2A$

werden innerhalb eines Winkels von etwa 7° zu beiden Seiten derselben diese R_m nicht vorkommen. Da aber der Wert eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner proportional wachsen, so kann man, um einen Näherungswert für die mittlere Umlaufszeit des Mondes zu erhalten, sich die Werte R_m in dem Winkel v_1 der Erdbahn zwischen den Grenzen

$$v_1 = 0 \quad \text{und} \quad v_1 = 2\pi$$

in der angebenen Weise verteilt denken. Bezeichnet man nun die numerische Excentricität der Erdbahn mit ε, multiplicirt

$$\frac{1}{R^3} \quad \text{mit} \quad \frac{R^2\, dv_1}{2\pi A^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

und integrirt zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man

$$8)\quad T_\varepsilon = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{\mu}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{4} \frac{M}{\mu} \frac{a^3(1+3\eta^2+\ldots)}{A^3(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} + \ldots \right\}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach ε, setzt

$$d\varepsilon = -0{,}000053$$

so erhält man annähernd die von der Aenderung der Excentricität der Erdbahn abhängige säculare Beschleunigung der mittleren Umlaufszeit des Mondes. Dieselbe beträgt also

$$9)\quad \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{\mu}} \cdot \tfrac{1}{4} \frac{M}{\mu} \frac{a^3(1+3\eta^2)\, 3\varepsilon\, d\varepsilon}{A^3(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die von ε abhängigen Aenderungen von i und η gegen $d\varepsilon$ unbedeutend sind.

Die Gleich. 8) kann auch dazu dienen, annähernd das Verhältniss $\frac{M}{\mu}$ zu bestimmen, wenn das Verhältniss $\frac{a}{A}$ und die übrigen Grössen ausser $\frac{M}{\mu}$ bekannt sind.

Es ist der aus der Ellipse sich ergebende Wert

$$\eta^2 = 1 - \frac{bc^2}{\mu^2}, \quad c^2 = r^2 V^2 \sin^2\alpha$$

wo α den vom Radiusvector und der zugehörigen Tangente gebildeten Winkel bezeichnet.

Der kleinste Wert von $\sin^2\alpha$ ist $1-\eta^2$, denn es ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r\,d\varphi}{dr}, \qquad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos v}, \quad \vartheta = -\frac{(1+\cos v)\cos v}{\eta\sin^2 v} - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\eta^2}{\eta\sqrt{1-\eta^2}}$$

u. s. w., $\sin^2\alpha$ also stets fast 1, da $\eta < 0{,}06$ ist.

Setzt man in der Gleichung

$$\eta^2 = 1 - \frac{b\,r^2\,V^2\sin^2\alpha}{\mu^2}$$

den Wert von $\sin^2\alpha = 1$, für V^2 den Wert $V_1^{\,2}$ aus Gleichung 3), für μ den Wert μ_1 aus Gleich. 6), für b den Ausdruck $\frac{\mu}{a}$, so sieht man, dass der Ausdruck $\frac{b\,r^2 V^2}{\mu^2}$, der ohne Berücksichtigung der Einwirkung von M gleich $\frac{1-\eta^2}{1}$ also nahe $= 1$ ist, mit Berücksichtigung von M im Zähler um ein Glied von der Ordnung $M\frac{r^3}{R^3}$, im Nenner um mehr als das Doppelte dieses Gliedes vermehrt wird, der Ausdruck $\frac{b r^2 V^2}{\mu^2}$ also kleiner, folglich der elliptische Wert von η^2 durch die Einwirkung von M auf das System vergrössert wird. Daraus folgt aber auch, dass in Gleich. 9) $\frac{d\eta}{d\varepsilon}$ vernachlässigt werden kann, da diese Grösse gegen die andern Glieder von der Ordnung $\frac{Mr^3}{R^3}$, also überhaupt von der Ordnung $\left(M\frac{a^3}{A^3}\right)^2$ ist.

Dass überhaupt eine Beschleunigung der Umlaufszeit des Mondes stattfinden muss, wenn ε kleiner wird, erkennt man auch schon daraus, dass der Wert der mittleren Anziehung von M auf einen in einer Ellipse sich um denselben bewegenden Körper, nach der Zeit berechnet, grösser ist als derjenige, welcher sich ergiebt, wenn ein Körper sich in einem mit der halben grossen Achse beschriebenen Kreise um M bewegt; denn es ist

$$\frac{M}{2\pi A^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int_0^{2\pi}\frac{R^2\,dv_1}{R^2} = \frac{M}{A^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

für den Kreis erhält man $\frac{M}{A^2}$, das Verhältniss ist also

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} : 1$$

Setzt man in Gleich. 8) $T_\varepsilon = 27,321\,660890$ Tage, $M = 1$, $k = 0,017\,2021$, $\varepsilon = 0,0168$, $\eta = 0,054\,908$, $a = 51\,804,96$ geogr. Meilen, die Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne 8″, 8737, also

$$\log\frac{a}{A} = 0,413\,836\,33 - 3$$

und löst die Gleich. 8) oder

$$M^{\frac{3}{2}} + PM^{\frac{1}{2}} = Q, \quad \text{wo} \quad M = \frac{1}{\mu}$$

nach $M^{\frac{1}{2}}$ auf, so erhält man

$$M^{\frac{1}{2}} = 565,6426, \quad \text{also} \quad M = 319\,951,54$$

Gleich. 9) giebt dann als säculare Beschleunigung der mittleren Umlaufszeit des Mondes

$$0,000\,000\,10288 \text{ Tage} \quad \text{oder} \quad 0,008\,8894 \text{ Secunden}$$

Bemerkung. Nach den in jüngster Zeit erfolgten Bestimmungen beträgt die Sonnenparallaxe 8″, 880 mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0″, 002.

C. Benz.

3.

Ueber harmonische Strahlen.

Zum Begriff der harmonischen Strahlen gelangt man sehr schnell auf folgende Weise. Man nehme eine feste Gerade als Axe und einen festen Punkt in ihr als Coordinatenanfang an. Von jedem zu bestimmenden Punkte ziehe man in 2 festen Richtungen Strahlen, welche die Axe in 2 Punkten mit den Abständen x und y vom Coordinatenanfang treffen. Schreibt man in diesem Coordinatensystem die Gleichung einer Geraden

$$\frac{x-A}{y-A} = B$$

so ist B eine Function nur der auftretenden Winkel und giebt an, in welchem Verhältniss die Gerade diejenige Strecke teilt, welche die beiden Strahlen von einem ihrer Punkte auf der Axe abschneiden.

Nun wird für die Gerade durch die Punkte

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad \text{und} \quad x = x_2, \quad y = y_2$$

$$B' = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

für die Geraden durch die Punkte

$$x = x_1, \quad y = y_2 \quad \text{und} \quad x = x_2, \quad y = y_1$$

$$B'' = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} = -B'$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass Strahlen, welche in 4 gewissen Richtungen durch einen Punkt gehen, die Eigenschaft haben, jede Gerade harmonisch zu teilen, sowie dass diese Richtungen die der Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms sind.

Rudolf Skutsch.

4.

Zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels.

Es giebt verschiedene Methoden zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels; für die wirklich auszuführende Construction wird man aber immer die versuchsweise Teilung jeder solchen Näherungsmethode vorziehen.

Die nachfolgenden Untersuchungen haben deshalb auch nur den Zweck, über einige Beziehungen, die sich bei der Dreiteilung eines Winkels ergeben, zu berichten.

I.

Es sei der Winkel CAB in drei gleiche Teile zu teilen.

Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser OA einen Halbkreis über den Schenkel AB, halbire OB in M und ziehe MN senkr. auf OB, ferner $MK \parallel OH$, wodurch

$$\text{Wkl. } KMB = 2\alpha$$

wird, so liegt innerhalb des Bogenstückes NP der Teilungspunkt D, welcher den Bogen BH, der zum Peripheriewinkel α gehört, in

$$HD = \tfrac{2}{3}\alpha \quad \text{und} \quad BD = \tfrac{4}{3}\alpha \quad \text{zerlegt.}$$

Denkt man sich die Linie AD bereits gezogen, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke, welche ähnlich sind

$$\triangle\, AOD \text{ ähnlich } \triangle\, ODE$$

weil die den gleichen Schenkeln gegenüberliegenden Winkel in beiden Dreiecken $\frac{2}{3}\alpha$ sind.

Daraus fogt die Proportion, wenn man für den Halbmesser immer r schreibt:

$$r : ED = AD : r \qquad \text{(I)}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABL ist D der Fusspunkt der Senkrechten, die vom Scheitel des rechten Winkels B auf die Hypotenuse gefällt werden kann, daher

$$4r^2 = AD \,.\, AL \qquad \text{(II)}$$

Aus der Verbindung von (I) und (II) folgt:

$$ED = \tfrac{1}{4} AL \qquad \text{(III)}$$

Wäre die Länge AL bekannt, so würde $\frac{1}{4}AL$ von O nach E aufgetragen die Teilungslinie AD ergeben. Die Kenntniss von der Länge AL würde natürlich die Dreiteilung auch aus dem Dreieck ABL finden lassen.

Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks OED lässt auch folgenden Ausdruck zu:

Wenn man auf der Linie OH einen Punkt E aufsucht, dessen Entfernung vom Mittelpunkt O gleich ist derjenigen von der Peripherie in der Richtung nach AL gemessen, so geht durch E die Teilungslinie.

Nach der Construction $OM = \frac{1}{4} AB$ wird

$$GF = \tfrac{1}{4} AL \qquad \text{(IV)}$$

somit:

$$GF = ED \qquad \text{(V)}$$

Die Dreiecke OGE und MFK sind ebenfalls ähnlich, und zwar sind die Seiten des kleineren zwei Drittteile derjenigen des grösseren Dreiecks.

Aus (V) folgt

$$GE = FD \qquad \text{(VI)}$$

daher

$$FD = \tfrac{2}{3} FK \qquad \text{(VII)}$$

und diese Gleichung kann man zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels benutzen.

Nachdem man die Linien MN und MK nach früher gezogen hat, verbindet man den Durchschnittspunkt P mit A und teilt die Strecke PQ in 3 gleiche Teile; zieht man durch den ersten Teilpunkt R die Linie MR, so schneidet diese den Kreis sehr nahe dem Punkte D.

Es würde diese Construction den Punkt D absolut genau geben, wenn $PQ \parallel KF$ gezogen werden könnte, was wieder nicht sein kann, weil sonst die Teilung bereits bekannt sein müsste.

Noch genauer könnte man an den Punkt D heran kommen, wenn man eine zweite Linie nach A oberhalb D ziehen würde, die innerhalb des Winkels NMK fallende Strecke ebenfalls in drei gleiche Teile teilte, und den ersten Teilpunkte oben mit dem ersten Teilpunkte (R) unten verbinden möchte, diese Linie schneidet den Kreisbogen noch näher an D.

II.

Ein Papierstreifen als Trisector.

Wenn man in der vorherigen Fig. 1 das Dreieck AOE betrachtet, so erkennt man, dass

$$\text{Wkl. } EAO = \tfrac{1}{3} EOB$$

und dass

$$AG = 2OE \text{ ist.}$$

Auf Grundlage dieser Beziehung lässt sich die Dreiteilung eines Winkels mit einem Papierstreifen ausführen. Fig. 2.

Es sei CAB der zu teilende Winkel; man verlängere AB über den Scheitel nach D, und errichte AF senkr. auf AB; hierauf wähle man auf dem Schenkel AC den Punkt E beliebig und trage die Strecke AE zweimal auf einen geradlinig beschnittenen Papierstreifen auf; es sei

$$MN = 2AE$$

Nun lege man den Papierstreifen so auf die früher gezogenen Hülfslinien, dass N auf AD und M auf AF zu liegen kommt, wobei noch die Verlängerung von MN durch den Punkt E gehen muss. Dies erreicht man leicht nach einigen Verschiebungen.

Liegt der Papierstreifen richtig, dann kann man längs MN eine Bleistiftlinie ziehen, und dann ist

$$\text{Wkl. } MNA = \tfrac{1}{3} EAB$$

Dieses Verfahren kann auch zur Dreiteilung eines stumpfen

Winkels angewendet werden. Es liegt dann der Punkt E im Winkelraum DAF, und auf der Strecke MN zwischen den Punkten M und N.

Anmerkung. Es lässt sich nach diesem leicht ein Instrument zusammenstellen, welches aus einem rechten Winkel und zwei beweglichen Schenkeln besteht, das als Trisector für spitze Winkel mit aller Genauigkeit verwendet werden könnte

III.

Ein auf die Dreiteilung eines Winkels Bezug habender Lehrsatz ist noch folgender:

Hat ein Sehnenwinkel die Eigenschaft, dass die Bögen, auf welchen er steht, sich verhalten wie 1 : 2, so ist der auf denselben Bögen stehende Secantenwinkel 'ein Drittel des Sehnenwinkels.

Beweis. Es sei α der Sehnenwinkel, β der Secantenwinkel, welche beide auf denselben Bögen aufstehen, b und $2b$ diese Bögen im Kreise, so ist

$$\text{Wkl. } \alpha = \tfrac{3}{2} b$$
$$\text{Wkl. } \beta = \tfrac{1}{2} b$$

somit

$$\text{Wkl. } \beta = \tfrac{1}{3} \alpha$$

A. v. Frank,
Professor a. d. k. k. Staatsgewerbeschule in Graz.

5.

Asymtotischer Wert der Facultätencoefficienten.

Bekanntlich ist der aus der Zalenreihe 1, 2, 3 ... $n-1$ gebildete Facultätencoefficient

$$C^n{}_k = (-1)^k \binom{n-1}{k} \left[D^k \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^n \right]_{x=0}$$

$$= (n-k) \binom{n+k}{2k} \left\{ \frac{\binom{2k}{0}}{n+k} C^{-k}{}_k - \frac{\binom{2k}{1}}{n+k-1} C_k{}^{-(k-1)} + \frac{\binom{2k}{2}}{n+k-2} C_k{}^{-(k-2)} - \ldots \right.$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{\binom{2k}{k-1}}{n+1}C_k^{-1}\Big\}$$ 1)

wo

$C^{-m}{}_k$

$$=\frac{1}{m!}\left[\binom{m}{0}m^{m+k}-\binom{m}{1}(m-1)^{m+k}+\ldots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}1^{m+k}\right]$$

$$=\frac{1}{m!}\left[D^{m+k}(e^x-1)^m\right]_0$$ 2)

Ersetzt man in 1) die $C^{-m}{}_k$ durch die Nullwerte, dividirt beiderseits durch n^{2k}, bringt den ersten Factor rechter Hand $n-k$ in die Klammer und lässt bei constant bleibendem, endlichem k den Exponenten n über alle Grenzen zunehmen, so ist

$$\lim\frac{1}{n^{2k}}\binom{n+k}{2k}=\lim\frac{1}{(2k)!}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{(2k)!}$$

ferner

$$\lim\frac{n-k}{n+k}=\lim\frac{n-k}{n+k-1}=\ldots=\lim\frac{n-k}{n+1}=1$$

folglich, wenn noch

$$+(-1)^k\binom{2k}{k}D^k(e^x-1)^0{}_0=0$$

hinzugefügt wird,

$$\lim\frac{1}{n^{2k}}C^n{}_k=\frac{1}{(2k)!}\Big\{\frac{1}{k!}\binom{2k}{0}D^{2k}(e^x-1)^k{}_0$$

$$-\frac{1}{(k-1)!}\binom{2k}{1}D^{2k-1}(e^x-1)_0^{k-1}+\frac{1}{(k-2)!}\binom{2k}{2}D^{2k-2}(e^x-1)^{k-2}{}_0\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k-1}\binom{2k}{k-1}D^{k+1}(e^x-1)^1{}_0+(-1)^k\binom{2k}{k}D^k(e^x-1)_0{}^0\Big\}$$

Wenn nun von der leicht beweisbaren Formel

$$\binom{2k}{h}\left[D^{2k-h}(e^x-1)^{k-h}\right]_0=\frac{1}{h!}D^{2k}\left[x^h(e^x-1)^{k-h}\right],$$

Gebrauch gemacht, sodann

$$\frac{1}{h!(k-h)!}=\frac{1}{k!}\binom{k}{h}$$

gesetzt und schliesslich der gemeinsame Factor $\frac{1}{k!}$ herausgehoben wird, so ist der Ausdruck

$$\lim \frac{C^n{}_k}{n^{2k}} = \frac{1}{k!\,(2k)!}\Big[\binom{k}{0} D^{2k}(e^x-1)^k{}_0 - \binom{k}{1} D^{2k}x(e^x-1)^{k-1}{}_0$$
$$+ \binom{k}{2} D^{2k}x^2(e^x-1)^{k-2}{}_0 - + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} D^{2k}x^{k-1}(e^x-1)^1{}_0$$
$$+ (-1)^k \binom{k}{k} D^{2k}x^k(e^x-1)^0{}_0\Big]$$

in seiner jetzigen Form unschwer als $2k$ter Differentialquotient von

$$(e^x-1-x)^k = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^k = \frac{x^{2k}}{2^k} + \frac{k}{2^{k-1}3!}x^{2k+1} + \ldots$$

zu erkennen, daher identisch mit

$$\left\{\frac{(2k)!}{2^k} + \frac{k(2k+1)!}{2^{k-1}3!}x + \ldots\right\}_{x=0} = \frac{(2k)!}{2^k}$$

Es ist somit

$$\lim \frac{1}{n^{2k}} C^n{}_k = \frac{1}{k!\,2^k} \qquad 3)$$

Hieraus folgt noch

$$\lim \frac{1}{n^{4k}} C^n{}_{2k} = \frac{1}{(2k)!\,2^{2k}}$$

$$\lim \frac{1}{n^{4k}} (C^n{}_k)^2 = \frac{1}{(k!)^2\,2^{2k}}$$

mithin

$$\lim \frac{(C^n{}_k)^2}{C^n{}_{2k}} = \binom{2k}{k} \qquad 4)$$

Endlich wäre zu bemerken, dass das Ergebniss 1) mit der bekannten Formel

$$C^{n+1}{}_k = C^n{}_k + n\,C^n{}_{k-1}$$

nicht im Widerspruch steht.

Nach Einsetzung der Grenzwerte kommt nämlich

$$\lim \frac{(n+1)^{2k}}{k!\,2^k} = \lim \frac{n^{2k}}{k!\,2^k} + \lim n\,.\,\frac{n^{2k-2}}{(k-1)!\,2^{k-1}}$$

oder

$$\lim (n+1)^{2k} = \lim (n^{2k} + 2k\,.\,n^{2k-1})$$

Franz Rogel.

6.

Ueber die Verwendung des Rechenbrettes zur Darstellung beliebiger Zahlensysteme.

Der Gedanke, unser dikadisches Zahlensystem durch ein bestimmtes anderes zu ersetzen, ist nicht neu. Napoleon, dem ein solcher Plan vorgelegt wurde, soll geantwortet haben: „Dann rechne man erst die Logarithmen in das neue System um!“ Ein anderer Einwand hätte vielleicht ebenso nahe gelegen: erst ändere man die menschliche Sprache und das menschliche Fingersystem, das der Zahlenanschauung zu Grunde liegt und ihr noch heute bei jeder Gelegenheit zu Hülfe kommt. Dem Wesen der Zahl gegenüber ist unser dekadisches System ein Zufall, und ich vermag nicht zu beurteilen, welchen Wert es haben würde, wenn es gelänge, diesen Zufall zu beseitigen. Soviel aber scheint mir einleuchtend: erstens, dass mit einem einzelnen neuen Systeme für die Wissenschaft wenig gewonnen wäre, dass es vielmehr darauf ankäme, jede beliebige Zählmethode zu ermöglichen; — und zweitens, dass dies tunlichst in so mechanischer Weise geschehen müsste, dass sich unsre dekadischen Vorstellungen und Gewohnheiten nicht störend dazwischen dringen könnten.

Das chinesische Rechenbrett

dient mir dabei als Vorbild. Dasselbe besteht aus einem flachen, länglichen Kasten, der der Länge nach durch eine Scheidewand in zwei ungleiche Hälften geteilt ist. Durch diese Scheidewand bis in die beiden äusseren Längswände sind in Abständen von etwa einem Zoll Stäbe oder Drähte gezogen. Auf jeden dieser Stäbe sind auf der grösseren, dem Rechnen zugewendeten Seite fünf, auf der kleineren Seite zwei dicke Kugeln oder flache Perlen aufgereiht. Von jenen fünf Kugeln gilt jede eine Einheit, von den zwei letztgenannten jede eine Fünfheit der betreffenden dekadischen Stelle. Die Zahlen werden notirt („angelegt“), indem man die Kugeln an die Scheidewand schiebt.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Der Stellenwert ist derselbe, wie bei den arabischen Ziffern. Man sieht, es kann auf jedem Stabe bis zu fünfzehn angelegt werden. Liegen nun aber auf einem Stabe 10 oder mehr an, so legt man auf dem nächsten Stabe (nach links zu) 1 an uüd schiebt dafür jene 10 nach dem Stande zurück, so machen sich Additionen und Subtractionen rein mechanisch. Die Multiplication und Division können natürlich durch ($n-1$) malige Addition bzhw. durch n malige Subtraction geschehen, werden aber in der Regel auf kürzerem Wege ausgeführt. Die Multiplication mit Hülfe des Einmaleins, die Division mit Decimalbrüchen nach einer analogen Tabelle, die gleichfalls auswendig gelernt wird. In dieser wird stillschweigend der Dividendus mit 10 multiplicirt, und es heisst also z. B. 3 in 1 ist 3, bleiben 1; 8 in 1 ist 1, bleiben 2 u. s. w. Die übrigen Vorschriften, die der chinesische Rechenlehrer seinem Schüler giebt, sind rein technisch und dürften sich zumeist durch Uebung und Nachdenken von selbst ergeben. Die Grösse des Brettes, die Zahl der Stäbe, richtet sich nach dem Bedürfnisse des Rechners.

Man hat nun beobachtet, dass die Chinesen mit dieser einfachen Maschine die gestellten Aufgaben schneller lösen, als geübte europäische Rechner mit Bleistift und Papier. Wichtiger für unsern Zweck ist aber dies, dass jene Rechenmethode mit ihrer constructiven Anschaulichkeit fast ebenso bequem auf jedes andere Zahlensystem anzuwenden wäre. Die dazu nötige Maschine, ein

„n-adisches“ Rechenbrett

wäre meiner Meinung nach in folgender Weise herzustellen: Ein Kasten, dem chinesischen ähnlich, aber grösser und allenfalls mit mehreren Zwischenwänden, welche, gleich der oberen Längswand, verstellbar sein mögen, um gleichmässige Spielräume zum Verschieben der Kugeln herzustellen; ferner zum Aufreihen möglichst viele durchbohrte Kugeln. Ist n (die Zahl, die mit 10 geschrieben werden soll) nicht zu gross, so genügt eine einzige Scheidewand. Wieviele Kugeln nun auf der unteren und auf der oberen Hälfte jedes Stabes aufgereiht werden, und welchen Wert die oberen Perlen erhalten, richtet sich nach dem Werte von n. Ich würde in dieser Hinsicht folgendes empfehlen:

I. Die Werte der oberen Kugeln zusammenaddirt seien $= n$. Sind sie also alle angelegt, so schiebt man sie nach dem äusseren Rande zurück und legt dafür auf dem nächstfolgenden Stabe (nach links zu) 1 an. Dem analog ist der Zahlenwert der sämtlichen Kugeln der unteren Abteilung gleich dem Werte einer einzelnen

Kugel in der (nächst-) oberen, sodass auch hier die Uebertragung mechanisch geschieht.

II. Ist n teilbar (keine Primzahl), so sei der Wert jeder oberen Kugel der des grössten Divisors.

III. Ist n eine Primzahl und nicht zu gross, so wären vielleicht Kugeln von zweierlei Farbe zu empfehlen. Entweder

a) man lässt die Scheidewand weg, reiht die je n Kugeln auf die Stäbe und wählt für jede fünfte Kugel oder für je fünf Kugeln der besseren Uebersicht wegen die andere Farbe; oder

b) man dividirt n mit der grössten Ziffer, die man auf einen Blick übersehen und mit einem Griffe sicher fassen kann, m, reiht auf die untere Hälfte der Stäbe m Kugeln und, wenn

$$m \times o + p = n$$

ist, auf die obere Hälfte zunächst o Kugeln, deren jeder man den Wert m beilegt und dann, als oberste, p farbige, die wieder je 1 gelten.

Bezeichne ich nun die Scheidewand durch einen doppelten Querstrich, so ist das Rechenbrett etwa folgenderweise einzurichten:

Zu II. $n = 12$

3 Kugeln, Wert 4

---

4 Kugeln, Wert 1

Zu III., b) $n = 17$

2 schwarze Kugeln, Wert 1
3 gelbe Kugeln, Wert 5

---

5 gelbe Kugeln, Wert 1

IV. Ist n eine grosse Zahl, so mag sich die Anwendung mehrerer Scheidewände empfehlen. Auch dabei muss die oberste Abteilung die Summe n darstellen. Im Uebrigen mag das Bisherige gelten. Z. B.

$n = 170$

10 schwarze Kugeln, Wert 1
2 gelbe Kugeln, Wert 80

---

8 Kugeln, Wert 10

---

10 Kugeln, Wert 1

Das Verfahren ist nun in allen Fällen ganz dem chinesischen analog: ist die untere Abteilung voll, so wird ihr Inhalt in Gestalt einer Kugel auf die nächsthöhere, — ist die oberste Abteilung voll, auf die unterste Abteilung des nächstfolgenden Stabes übertragen. Dass in den beiden letzten Beispielen die obersten, zuletzt zur Verwendung kommenden Kugeln einen anderen Wert haben mussten, als die übrigen der obersten Abteilung, dürfte kaum als Uebelstand empfunden werden. Im Uebrigen ist das Verfahren so mechanisch, dass man die Aufgaben lösen, die Lösungen vor Augen sehen wird, ehe man darauf verfällt, die dargestellten Zahlen in Ziffern oder Worte zu übertragen.

Ziffern und Zahlennamen.

Notwendig wird diese Uebertragung aber doch, und es fragt sich, wie sie am einfachsten zu geschehen habe. Dass hierbei ein Einmischen unsrer Zahlzeichen und Zahlwörter nur Verwirrung stiften würde, leuchtet wol ein; das radicalste Vorgehen ist hier das beste, und auch hierin möchten die Chinesen als Muster dienen.

Diese haben nämlich eine doppelte Ziffernreihe, die das Rechenbrett schematisch durch senkrechte und wagerechte Striche und die Null darstellt

a) O 𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨

b) O 𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 oder ó 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱

Dabei wird wol auch Kürze halber die 4 durch ×, die 9 durch ×̍ oder ähnlich bezeichnet. Wäre nun $n = 12$, so würde

$$57 = 4 \times 12 + 2 \times 4 + 1$$

zu schreiben sein:

𝍣 ⊔ oder ≣ 𝍥

ferner

$$598 = 4 \times 12^2 + 1 \times 12 + 2 \times 4 + 2$$

𝍣 𝍩 𝍦 oder ≣ 𝍠 𝍯

$$8 = 2 \times 4 + 0$$

wäre dann

ó oder $1 \times 4 + 4 \times 1$, also 𝍥 oder 𝍮

Aehnliche Ziffern wären auch für das drei- oder mehrteilige Rechenbrett möglich, z. B.

$n = 170$

nach obiger Einrichtung

$$163 = 2 \times 80 + 0 \times 10 + 3$$

$$95 = 1 \times 80 + 1 \times 10 = 5 \quad \text{oder}$$

also immer zwischen senkrechten und wagerechten Strichen abwechselnd. Vereinfachungen nach Art des chinesischen Zeichens für 4 müssten die unübersichtlichen Anhäufungen von Parallelstrichen ersetzen ohne die Anschaulichkeit zu beeinträchtigen.

Diese Ziffern kann man entweder in unser dekadisches System umrechnen und umschreiben, oder durch conventionelle Laute aussprechbar machen. Hierfür würde ich folgendes vorschlagen:

a) Die Zahl der Buchstaben oder Sylben entspreche der Zahl der Stufen aus denen die Ziffer, dem Rechenbrette folgend, zusammengesetzt ist.

b) Die Anordnung der Buchstaben und Sylben sei schematisch (*a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *ö*, *ü*, *ai*, *au*; *ba*, *be*, *bi* u. s. w.), damit der lautliche Ausdruck annähernd ebenso leicht merkbar und anschaulich werde, wie der graphische.

Jedes Ziffern- und Zahlensystem ist so zusagen eine besondere Sprache, wenn auch mit den gleichen Zeichen, und Lautelementen, d. h. diese Elemente können, gleich den Buchstaben der Algebra, jetzt diesen, jetzt jenen Zahlenwert darstellen:

$$= 1a + 1b + 5$$
$$[a = 80 \quad b = 10]$$

$$= 2a + 2$$
$$[a = 4]$$

Das eingerichtete Rechenbrett aber gewährt ohne weiteres den Schlüssel zum Verständnisse der angelegten und aufgeschriebenen Zahlen.

Georg von der Gabelentz.

7.

Zur Theorie der Regelflächen.

Die Auffassung der Regelflächen als erzeugt von einer Geraden, die mit dem Fundamentaltrieder, d. i. der Tangente, Haupt- und Binormale einer Linie in fester Verbindung steht, ist öfters, neuerdings in den Arbeiten von Bioche und Pirondini die Grundlage von Untersuchungen gewesen. Wir wollen solche Gerade, deren Lage relativ zum Fundamentaltrieder durch den Lauf der Linie bestimmt wird, begleitende Gerade der Linie nennen und allgemein die begleitende Gerade einer Linie untersuchen, welche eine gegebene Regelfläche erzeugt.

Unmittelbar liegt hier kein Problem vor. Auf der gegebenen Regelfläche, deren Gleichungen wir schreiben

$$x = x_0 + au; \quad y = y_0 + bu; \quad z = z_0 + cu \qquad (1)$$

haben wir nur eine beliebige Linie s zu ziehen, deren Tangente, Haupt- und Binormale die Richtungscosinus f, g, h; f', g', h'; l, m, n haben mögen, und die Winkel zu berechnen, welche die Erzeugende mit den 3 genannten begleitenden Axen bildet.

Dennoch bleiben einige Punkte zu untersuchen. Durch die Regelfläche F sind die Richtungscosinus a, b, c, aber nicht x_0, y_0, z_0 bestimmt, auch sind in letztern nicht bloss Constante willkürlich; vielmehr ist durch die Gl. (1) schon eine Linie auf der Fläche ausgedrückt.

Dagegen ist durch die Fläche selbst ein orthogonales Trieder bestimmt. Sei v der Parameter, als dessen Functionen a, b, c, x_0, y_0, z_0 aufzufassen sind, und zwar gemäss der Relation

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2$$

Ein Strich bedeute die Differentiation nach v (ausgenommen in $f'g'h'$). Dann entspricht der Fläche eindeutig ausser der Erzeugenden das gemeinsame Lot der consecutiven Erzeugenden mit den Richtungscosinus a_1, b_1, c_1 und die Normale zu beiden mit den Richtungscosinus a', b', c', wo die Relation stattfindet:

$$a_1 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

Sei nun in Gl. (1) $(x_0 y_0 z_0)$ der laufende Punkt der Strictionslinie s_0. Von ihm aus gelangt man zum consecutiven, indem man erst in der Richtung $(a_1 b_1 c_1)$ eine unendlich kleine Strecke $\partial\omega$ bis zur consecutiven Erzeugenden, dann längs dieser eine unendlich kleine Strecke $\partial\psi$ bis zu ihrem Centralpunkt fortgeht. Hiernach ist

$$\partial x_0 = a\,\partial\psi + a_1\,\partial\omega;\quad \text{etc.} \tag{2}$$

Die Gleichungen der Regelfläche sind also

$$x = \int (a\,\partial\psi + a_1\,\partial\omega) + a u;\quad \text{etc.} \tag{3}$$

Jetzt sind a, b, c, ψ, ω als Functionen von v gegeben, wenn die Fläche es ist, und umgekehrt.

Wir betrachten nun u als Function von v; dann erzeugt der Punkt (xyz) eine beliebige Linie s auf der Fläche, deren Tangente die Richtungscosinus

$$f = \frac{1}{s'}\{a(\psi' + u') + a' u + a_1\,\omega'\};\quad \text{etc.} \tag{4}$$

hat. Das Quadrat des Bogenelements ist

$$\partial s^2 = (\partial\psi + \partial u)^2 + (u\,\partial v)^2 + \partial\omega^2 \tag{5}$$

Hieraus ergeben sich in bekannter Weise die Richtungscosinus der Haupt- und Binormale, der Krümmungswinkel τ und der Torsionswinkel ϑ.

Wir wollen nun nicht allein die Erzeugende, sondern auch das aus ihrer Bewegung hervorgehende orthogonale Trieder in relativer Lage zum Fundamentaltrieder der Linie s bestimmen, indem wir alle 9 Richtungscosinus auf 2 Winkel $\varkappa$, φ zurückführen. Sei zuerst

$$f a + \ldots = \cos\varkappa = \frac{\psi' + u'}{s'} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} f' a + \ldots &= \sin\varkappa\cos\varphi \\ l\,a + \ldots &= \sin\varkappa\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dann ergibt sich durch Differentiation:

$$f a' + \ldots = -(\varkappa' + \tau'\cos\varphi)\sin\varkappa = \frac{u}{s'} \tag{7a}$$

$$f' a' + \ldots = (\varkappa'\cos\varphi + \tau')\cos\varkappa - (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa\sin\varphi$$

$$l\,a' + \ldots = \varkappa'\cos\varkappa\sin\varphi + (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa\cos\varphi$$

Die Quadratsumme der 3 Grössen ist:

$$1 = (\varkappa' + \tau'\cos\varphi)^2 + [\tau'\cos\varkappa\sin\varphi - (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa]^2 \tag{7b}$$

Man kann daher setzen:

$$\sin\varepsilon = \varkappa' + \tau'\cos\varphi \tag{8}$$

$$\cos\varepsilon = \tau'\cos\varkappa\sin\varphi - (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa \tag{9}$$

und erhält:

$$fa'+\ldots=-\sin\varepsilon\sin\varkappa=\frac{u}{s'} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} f'a'+\ldots &= \sin\varepsilon\cos\varkappa\cos\varphi+\cos\varepsilon\sin\varphi \\ la'+\ldots &= \sin\varepsilon\cos\varkappa\sin\varphi-\cos\varepsilon\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ueberdies ist aus Gl. (10) ersichtlich, dass

$$\sin\varepsilon=-\frac{u}{s'\sin\varkappa} \tag{12}$$

also ε eine durch u, s und $\varkappa$ bestimmte Grösse ist, die verschwindet, wenn s in die Strictionslinie übergeht.

Die Richtungscosinus der dritten Axe, nämlich der Rotationsaxe der Erzeugenden, ergeben sich aus ihrer normalen Stellung zu den beiden ersten; man findet:

$$fa_1+\ldots=-\cos\varepsilon\sin\varkappa=\frac{\omega'}{s'} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} f'a_1+\ldots &= \cos\varepsilon\cos\varkappa\cos\varphi-\sin\varepsilon\sin\varphi \\ la_1+\ldots &= \cos\varepsilon\cos\varkappa\sin\varphi+\sin\varepsilon\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Sind nun a, b, c, ψ, ω zur Bestimmung der Fläche und u zur Bestimmung der Linie s gegeben, so ist zuerst s' durch Gl. (5), dann $\varkappa$ durch Gl. (6), dann ε durch Gl. (12), dann φ durch Gl. (8) primitiv bekannt; man hat, um die Formeln zusammenzustellen:

$$s'^2=(\psi'+u')^2+u^2+\omega'^2 \tag{15}$$

$$\cos\varkappa=\frac{\psi'+u'}{s'};\quad \sin\varepsilon=-\frac{u}{s'\sin\varkappa};\quad \cos\varphi=\frac{\sin\varepsilon-\varkappa'}{\tau'}$$

wo

$$\tau'^2=\left\{\left(\frac{\psi'+u'}{s'}\right)'-\frac{\varkappa}{s'}\right\}^2+\left\{\left(\frac{u}{s'}\right)'+\frac{\psi'+u'}{s'}-\varDelta\frac{\omega'}{s'}\right\}^2 + \left\{\left(\frac{\omega'}{s'}\right)'+\frac{\varDelta u}{s'}\right\}^2$$

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a\,a'\,a'' \\ b\,b'\,b'' \\ c\,c'\,c'' \end{vmatrix} \tag{16}$$

oder infolge der vorhergehenden Gleichungen kürzer

$$\tau'^2=(\varkappa'-\sin\varepsilon)^2+\{(\varepsilon'+\varDelta)\sin\varkappa-\cos\varepsilon\cos\varkappa\}^2 \tag{17}$$

ist. Eliminirt man τ', so wird einfacher

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{[s'+\varDelta]\sin\varkappa - \cos\varepsilon\cos\varkappa}{\sin\varepsilon - \varkappa'} \tag{18}$$

Hiermit ist bereits die Krümmung der Curve $\frac{\tau'}{s'}$, (irrational durch Gl. (17)) dargestellt. Noch einfacher ergibt Gl. (9) die Torsion $\frac{\vartheta'}{s'}$. Nach Einführung der Werte lautet sie:

$$\vartheta' = -\varphi' - \cos\varepsilon\sin\varkappa - (\varepsilon'+\varDelta)\cos\varkappa \tag{19}$$

also ist hier der Zähler rational.

An das Vorstehende knüpfen sich einige speciellere Fragen, unter andern folgende.

Ist $\partial\omega = 0$, so ist aus der Bedeutung von $\partial\omega$ klar, dass die Fläche abwickelbar ist. Nach Gl. (13) wird alsdann entweder $\cos\varepsilon$ oder $\sin\varkappa$ null. Der letztere Fall ist ein singulärer; denn für $\sin\varkappa = 0$ fällt nach Gl. (7) (6) die Erzeugende mit der Tangente von s zusammen. Hier wird

$$v = \tau;\quad \varepsilon = R - \varphi;\quad a = f;\quad \text{etc.}$$

Allgemeiner ist der Fall $\varepsilon = R$, wo $\varkappa$ beliebig variirt, während nach Gl. (9) φ durch die Relation

$$\partial\varphi = -\partial\vartheta + \partial\tau\cot\varkappa\sin\varphi \tag{20}$$

davon abhängig wird.

Fragt man nun umgekehrt nach dem Bereiche der einer Curve s begleitenden Geraden, welche eine abwickelbare Fläche erzeugen, so sind es ausser der Tangente an s, welche stets abgesondert vom Systeme stehen bleibt, diejenigen, welche die Gl. (20) erfüllen. Man kann, um die Lösung einer Differentialgleichung zu ersparen die Gl. (20) auch schreiben:

$$\cot\varkappa = \frac{\partial\varphi + \partial\vartheta}{\partial\tau\sin\varphi} \tag{20a}$$

und φ als willkürliche Function von s betrachten.

Ist statt des Vorigen $\partial\psi = 0$, so ist gemäss der Bedeutung von $\partial\psi$ die Erzeugende Binormale der Strictionslinie s_0. Nach Gl. (6) (10) ist

$$fa + \ldots = \frac{\partial u}{\partial s};\quad fa' + \ldots = \frac{u\partial v}{\partial s}$$

woraus nach Elimination von u:

$$fa + gb + hc = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{f\partial a + g\partial b + h\partial c}{\partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2}\,\partial s\right) \tag{21}$$

Fragt man nun nach dem Bereiche der eine gegebene Curve s begleitenden Geraden, welche eine Binormalenfläche erzeugen, so sind a, b, c gesucht. Geht man von einem Punkte der Linie s in der Richtung (abc) um die Strecke u bis zum Centralpunkt $(x_0 y_0 z_0)$, so ist der Endpunkt:

$$x_0 = x + au; \quad \text{etc.}$$

$$u = -\frac{f\partial a + \dots}{\partial v^2}\partial s \tag{22}$$

woraus durch Differentiation:

$$f_0 \partial s_0 = f\partial s + a\partial u + u\partial a; \quad \text{etc.}$$

Bedingung für a, b, c ist

$$f_0 a + g_0 b + h_0 c = 0$$

das ist nach der vorigen Gleichung:

$$(fa + \dots)\partial s + \partial u = 0$$

Setzt man den Wert (22) für u ein, so erhält man Gl. (21). Folglich genügen alle Systeme a, b, c, welche Gl. (21) erfüllen, der Aufgabe. Von den 3 Unbekannten kann man eine, z. B. a, als willkürliche Function ansehen, die dritte c durch a und b ausdrücken und b durch Gl. (21) bestimmen.

Statt der Lage der Erzeugenden im Raume wollen wir jedoch ihre relative Lage zur Curve als gesucht betrachten und diese gemäss Gl. (6) (7) durch $\varkappa$, φ ausdrücken. Gl. (21) zerlegen wir in

$$\frac{f\partial a + \dots}{\partial v^2}\partial s = \pi; \quad fa + \dots = \frac{\partial \pi}{\partial s} \tag{23}$$

Da eine der gesuchten Functionen willkürlich bleibt, so sei dies π; dann ist nach Gl. (6)

$$\cos\varkappa = \frac{\partial \pi}{\partial s}$$

lässt sich also $\varkappa$ als bekannt betrachten, ferner nach Gl. (7a)

$$f\partial a + \dots = -(\partial\varkappa + \partial\tau\cos\varphi)\sin\varkappa$$

und nach Gl. (7b)

$$\partial v^2 = (\partial\varkappa + \partial\tau\cos\varphi)^2 + [\partial\tau\cos\varkappa\sin\varphi - (\partial\varphi + \partial\vartheta)\sin\varkappa]^2$$

Beides in die erste Gl. (23) gesetzt gibt:

$$\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial s} + \frac{\partial\tau}{\partial s}\cos\varphi\right)\sin\varkappa + \pi\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial s} + \frac{\partial\tau}{\partial s}\cos\varphi\right)^2 + \pi\left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\cos\varkappa\sin\varphi - \frac{\partial\varphi + \partial\vartheta}{\partial s}\sin\varkappa\right)^2 = 0 \tag{24}$$

eine Differentialgleichung 1. Ordnung, algebraisch darstellbar, welche φ bestimmt.

Hierdurch ist das Bereich der eine beliebige Curve s begleitenden Binormalenflächen in folgender Weise gegeben. Die Erzeugende ist in beliebigem Winkelabstande $\varkappa$ von der Tangente an s zu nehmen: ihre Lage aber auf dem so bestimmten Rotationskegel um die Tangente wird durch den Winkel φ mittelst Integration der Gl. (24) gefunden.

Die Binormale von s selbst bildet eine singuläre Lösung.

Die Curve, deren Binormale die Erzeugende ist, findet man als Strictionslinie der Regelfläche. Gl. (7a) gibt die Strecke u an, um welche man längs der Erzeugenden bis zur Strictionslinie fortzugehen hat.

Die Untersuchung der begleitenden Tangenten- und Binormalenflächen legt die Frage nach den begleitenden Hauptnormalenflächen nahe. Zunächst sind hier die Werte von $\partial\psi$ und $\partial\omega$ zu suchen. Der Centralpunkt der Hauptnormalen, d. i. laufende Punkt der Strictionslinie, ist, wenn der Index 1 die Beziehung zur Urcurve der Hauptnormale bezeichnet,

$$x_0 = x_1 + f_1' \frac{\partial s_1}{\partial \tau_1} \cos^2 \lambda_1 ; \quad \text{etc.} \tag{25}$$

wo die Bedeutung von λ aus $\partial\tau = \partial\sigma \cos\lambda$; $\partial\vartheta = \partial\sigma \sin\lambda$ erhellt. Dies differentiirt gibt:

$$\partial x_0 = f_1 \partial s_1 \sin^2 \lambda_1 + f_1' \partial \left(\frac{\partial s_1}{\partial \tau_1} \cos^2 \lambda_1 \right) + l_1 \partial s_1 \sin \lambda_1 \cos \lambda_1$$

Für die von der Hauptnormale erzeugte Fläche ist nun

$$a = f_1'; \quad a' = l_1 \sin \lambda_1 - f_1 \cos \lambda_1 : \quad a_1 = f_1 \sin \lambda_1 + l_1 \cos \lambda_1 \tag{26}$$

also

$$\partial x_0 = a\, \partial \left(\frac{\partial s_1}{\partial \tau_1} \cos^2 \lambda_1 \right) + a_1 \partial s_1 \sin \lambda_1$$

folglich ist

$$\psi = \frac{\partial s_1}{\partial \tau_1} \cos^2 \lambda_1 ; \quad \partial\omega = \partial s_1 \sin \lambda_1 \tag{27}$$

Fragt man nun nach den begleitenden Regelflächen einer gegebenen Curve s, welche überhaupt Hauptnormalenflächen sind, d. h. deren Erzeugende als Hauptnormalen irgend welchen andern Curven s_1 zugehören, so hat man 3 Curven auf einer gesuchten Regelfläche in Betrachtung zu ziehen, nämlich ausser s und s_1 die ihre Beziehung vermittelnde Strictionslinie s_0. Sind u, u_1 die Strecken von s, s_1 bis s_0 längs der Erzeugenden, so hat man:

$$x_0 = x_1 + au_1 = x + au; \quad \text{etc} \tag{28}$$

und zwar

$$a = f_1'; \quad \text{etc.} \tag{26}$$

also

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 = \partial \sigma_1^2 \quad \text{oder} \quad v = \sigma_1 \tag{29}$$

ferner

$$u_1 = \psi = \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_1} \cos \lambda_1 \tag{30}$$

$$u = -\frac{f\partial a + \dots}{\partial \sigma_1^2} \partial s = \frac{\partial \varkappa + \partial \tau \cos \varphi}{\partial \sigma_1^2} \sin \varkappa \, \partial s \tag{31}$$

Die Gl. (28) differentiirt geben mit Anwendung von Gl. (2):

$$\begin{aligned} a\partial\psi + a_1 \partial\omega &= f_1 \partial s_1 + a\partial u_1 + a' u_1 \partial \sigma_1 \\ &= f\partial s + a\partial u + a' u \partial \sigma_1; \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Multiplicirt man einzeln mit a, a', a_1 und addirt jedesmal die 3 Analogen, so kommt einerseits:

$$\left.\begin{aligned} \partial\psi &= \partial u_1 \\ 0 &= -\partial s_1 \cos \lambda_1 + u_1 \partial s_1 \\ \partial\omega &= \quad \partial s_1 \sin \lambda_1 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

andrerseits:

$$\left.\begin{aligned} \partial\psi &= \partial s \cos \varkappa + \partial u \\ 0 &= (fa' + \dots) \partial s + u \partial \sigma_1 \\ \partial\omega &= (fa_1 + \dots \partial s \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die Gl. (32) enthalten nur die Relationen (30) (27), welche als bekannt voraus gesetzt waren. In den Gl. (33), welche $\varkappa$ und φ bestimmen, sind die Werte (8) (10) (13), einzuführen, nach welchen

$$u = \frac{\partial s}{\partial \sigma_1} \sin \varkappa \sin \varepsilon$$

$$fa' + \dots = -\sin \varkappa \sin \varepsilon; \quad fa_1 + \dots = -\sin \varkappa \cos \varepsilon$$

$$\sin \varepsilon = \frac{\partial \varkappa + \partial \tau \cos \varphi}{\partial \sigma_1}$$

Diejenigen unter den Grössen s_1, u_1, σ_1, λ_1, ψ, ω, $\varkappa$, s, welche durch diese 10 Relationen nicht bestimmt sind, bleiben willkürlich.

R. Hoppe.

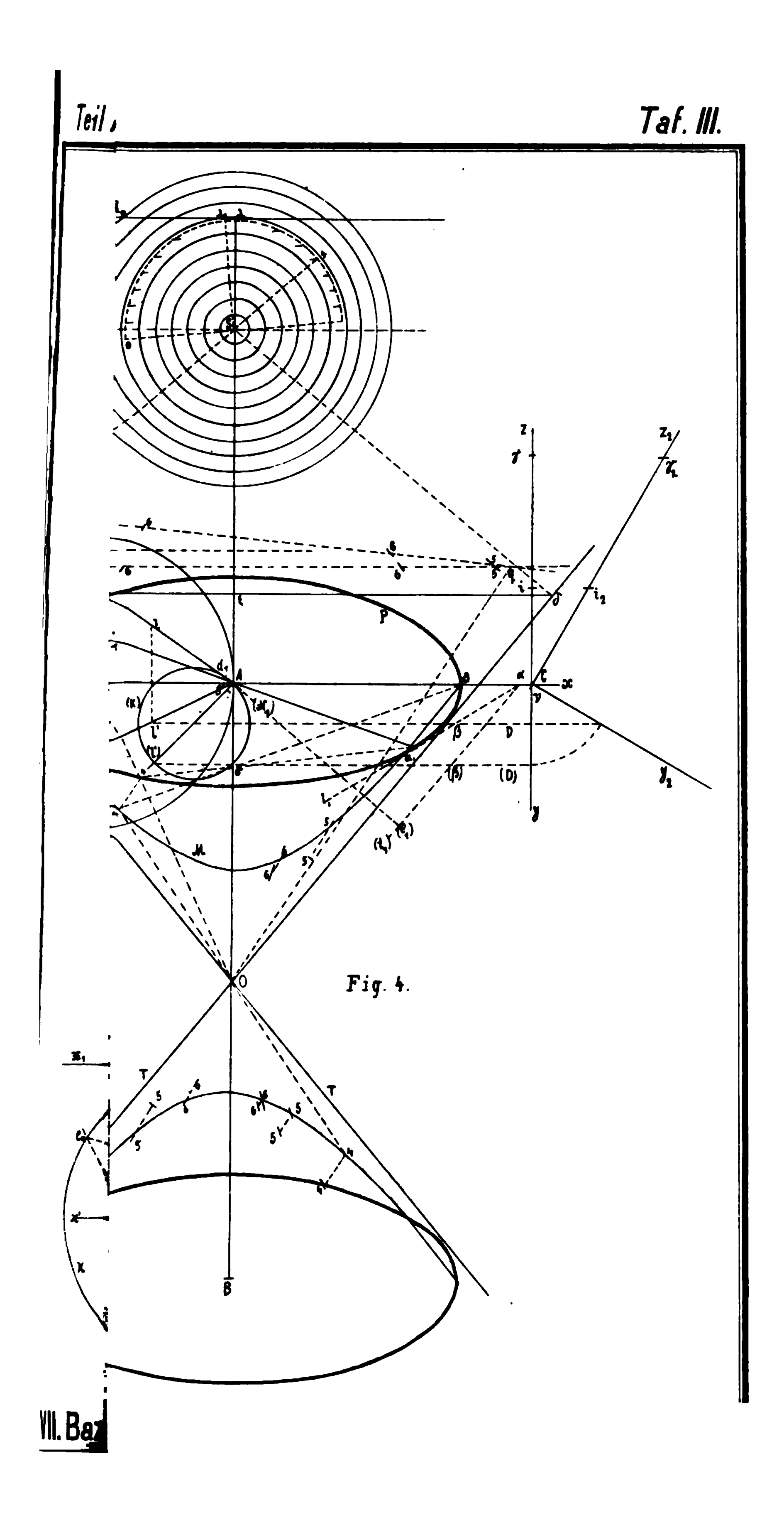
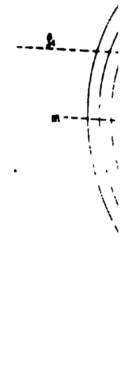
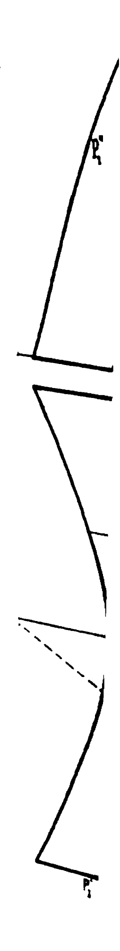


Fig. 4.





: Belev

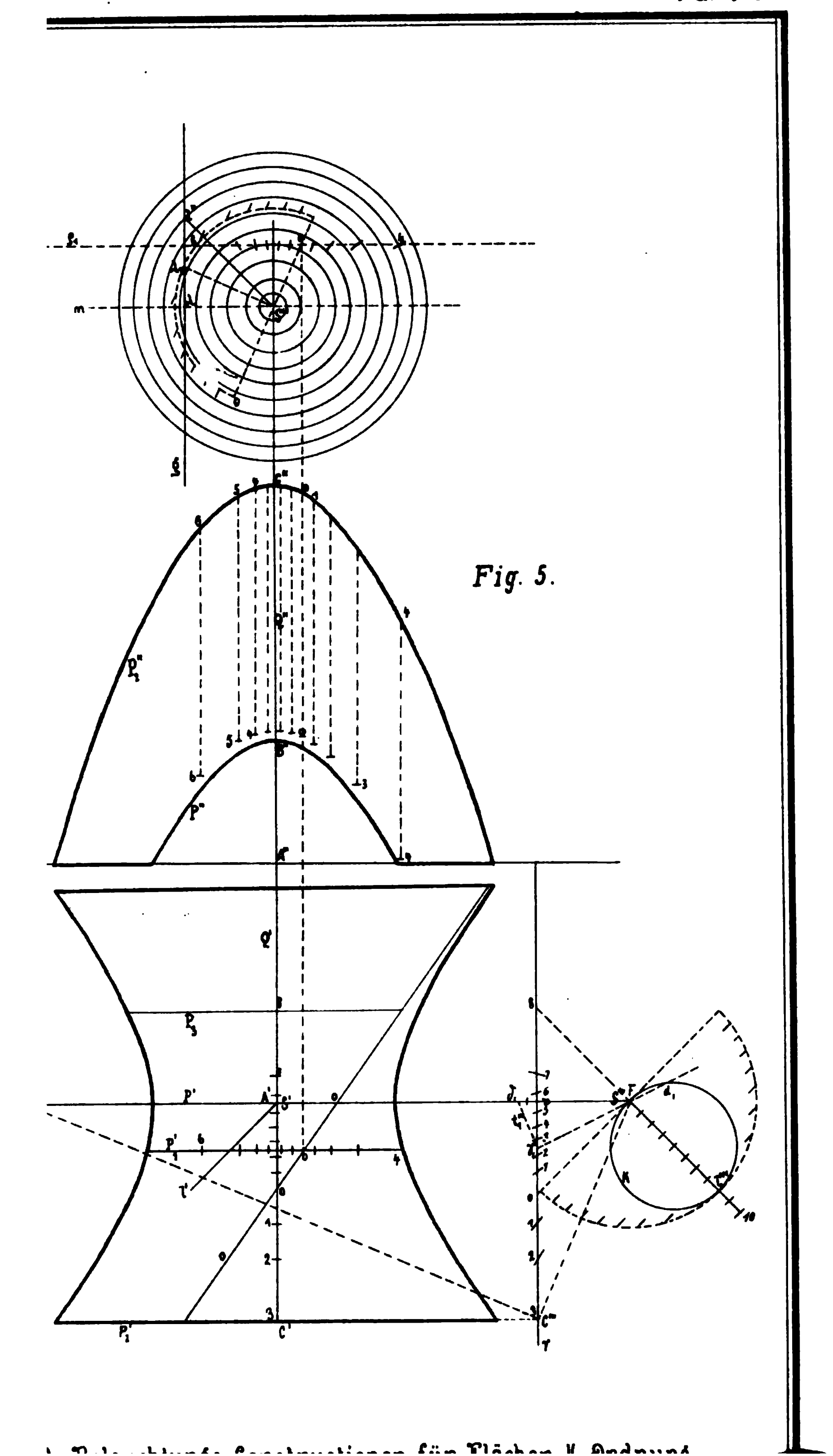
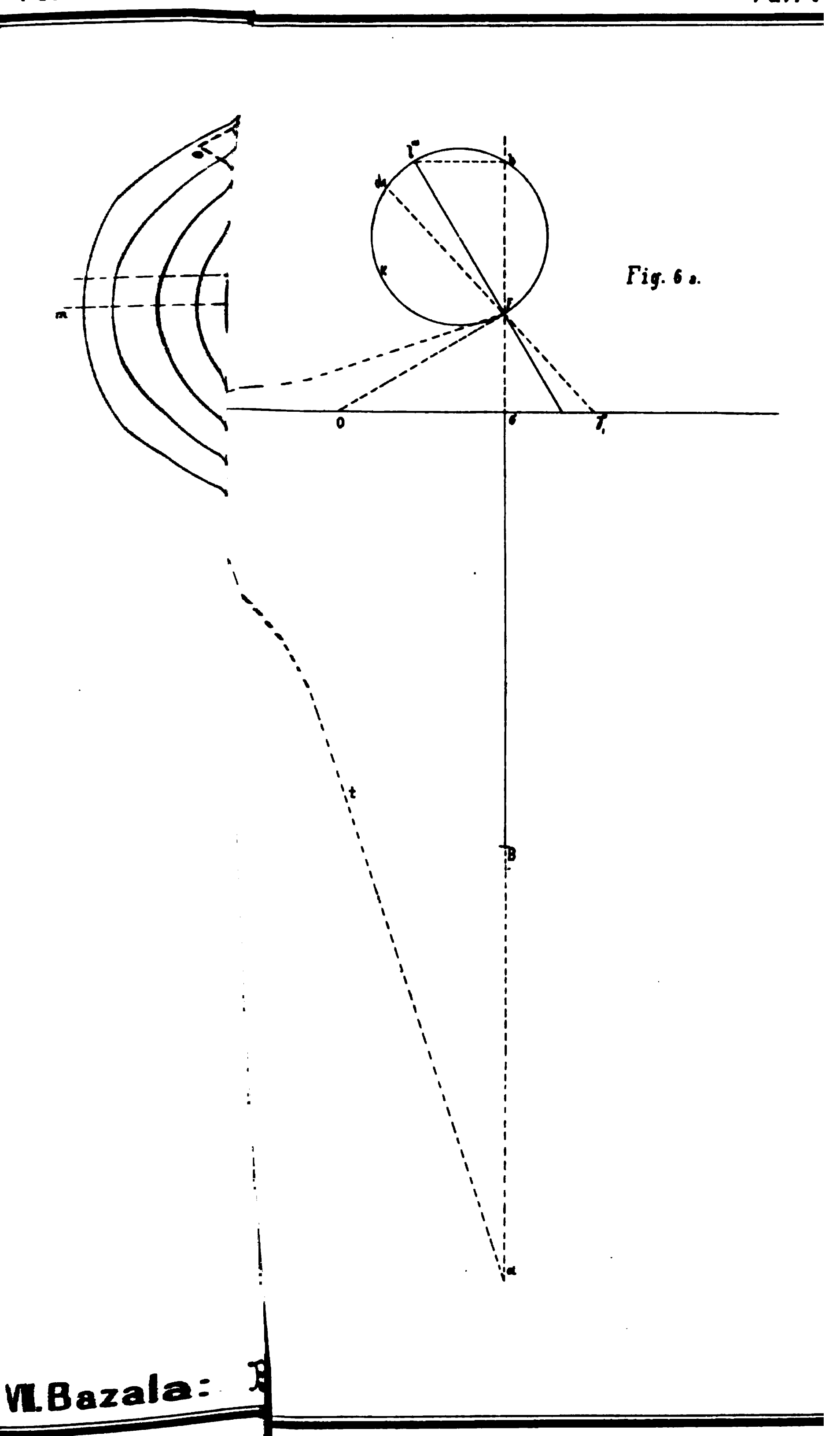
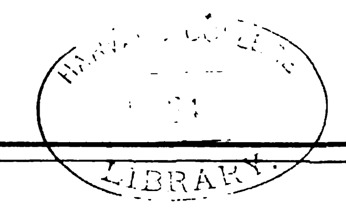


Fig. 5.


Fig. 6 a.
m
o
t
B

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

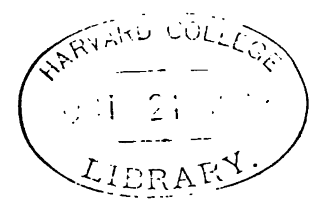
Zweite Reihe.

Elfter Teil. Drittes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1892.



XII.

Ueber Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen.

Von

Karl Reich.

Einleitung.

1) Bekanntlich ist, wenn k eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$$

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass n und k in der Formel $\binom{n}{k}$ ganze Zahlen sind. Die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

soll allgemein, ohne Ausnahme, zu Recht bestehn. Ferner sei

$$\binom{-n}{-k} = 0$$

wenn $n > k > 0$. Endlich soll

$$\binom{n}{0} = 1$$

sein für alle n.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob die Gleichung

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

allgemein gilt. Wegen

$$\binom{n}{0}=1$$

ist sie für $k=0$ und vermöge ihrer gebräuchlichen Ableitung für $k>0$ richtig. — Wenn $k<-1$, so ist

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{n-k}+\binom{n}{n-k-1}=\binom{n+1}{n-k}=\binom{n+1}{k+1}$$

nicht nur, wenn $n-k>0$, sondern auch, wenn $n \overset{=}{<} k$, weil alsdann

$$\binom{n}{k+1}=0$$

ist und $\binom{n}{k}$, $\binom{n+1}{k+1}$ gleichzeitig 1 oder 0 sind. — Ist endlich $k=-1$, so ist auch

$$\binom{n}{-1}+\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$$

wenn

$$\binom{n}{-1}=0,\quad \text{also}\quad n \gtrless -1 \quad \text{ist.}$$

Demnach ist die Gleichung

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

richtig für beliebige n und k mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn $n=k=-1$ ist.

Tatsächlich ergiebt sich die in Rede stehende Gleichung aus der für nicht negative k geltenden

$$\binom{n+m}{k+1}=\binom{n}{k+1}\binom{m}{0}+\binom{n}{k}\binom{m}{1}+\binom{n}{k-1}\binom{m}{2}+\dots+$$
$$+\binom{n}{0}\binom{m}{k+1}$$

wenn $m=1$ gesetzt wird. Die letztere Gleichung gilt auch für $k=-1$; jedoch reducirt sich dann ihre rechte Seite auf das einzige Glied

$$\binom{n}{0}\binom{m}{0}=1$$

2) Bei negativen n finden die folgenden zwei (für beliebige n zu Recht bestehenden) Gleichungen Anwendung:

Wenn $k \geqq 0$, so ist

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{-n-1} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k} \tag{a}$$

wenn $k < 0$, so ist

$$\binom{n}{k} = (-1)^{n+k} \binom{-k-1}{-n-1} \tag{b}$$

Beweis. Wenn $k > 0$, so ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$$
$$= (-1)^k \frac{(-n+k-1)(-n+k-2)\ldots(-n)}{1.2\ldots k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

Diese Gleichung ist augenscheinlich auch für $k = 0$ richtig.

Wenn dagegen $k < 0$, so erhält man bei Benutzung des soeben gefundenen Resultats

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = (-1)^{n-k} \binom{-k-1}{n-k} = (-1)^{n+k} \binom{-k-1}{-n-1}$$

wenn $n-k \geqq 0$ ist. Die Gleichung (b) gilt aber auch für $n < k$ (also für beliebige n), weil dann $\binom{n}{k}$ und $\binom{-k-1}{-n-1}$ gleichzeitig null sind. —

Bei nicht negativen n sind (a) und (b) für beliebige k richtig. Wenn nämlich $n > -1$ und $k < 0$ ist, so werden beide Seiten der Gleichung (a) null; ebenso überzeugt man sich leicht, dass die beiden Seiten der Gleichung (b) gleiche Werte annehmen, wenn n und k nicht negativ sind.

Dagegen haben bei negativen n die rechten Seiten der Gleichungen (a) und (b) entgegengesetzt gleiche Werte, weil, wenn $n < 0$, nach (a)

$$(-1)^k \binom{k-n-1}{-n-1} = (-1)^{k+n+1} \binom{-k-1}{-n-1}$$

3) Mit Benutzung der Gleichung (b) sind wir im Stande, eine der Gleichung

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{k}\binom{m}{0} + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \dots + \binom{n}{0}\binom{m}{k}$$

analoge Gleichung für negative y zu finden. Es ist nämlich, wenn $n, h, k > 0$ sind,

$$\binom{-n}{-h-k+1} = (-1)^{n+h+k+1}\binom{h+k-2}{n-1}$$
$$= (-1)^{n+h+k+1}\left[\binom{h-1}{n-1}\binom{k-1}{0} + \binom{h-1}{n-2}\binom{k-1}{1} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \binom{h-1}{0}\binom{k-1}{n-1}\right]$$

Nun ist

$$\binom{h-1}{n-x}\binom{k-1}{x-1} = (-1)^{n+h-x-1}\binom{-n+x-1}{-h}\cdot(-1)^{k+x-2}\binom{-x}{-k}$$
$$= (-1)^{n+h+k+1}\binom{-n+x-1}{-h}\binom{-x}{-k}$$

folglich ist bei positiven h und k

$$\binom{-n}{-h-k+1} = \binom{-n}{-h}\binom{-1}{-k} + \binom{-n+1}{-h}\binom{-2}{-k}$$
$$+ \binom{-n+2}{-h}\binom{-3}{-k} + \dots + \binom{-1}{-h}\binom{-n}{-k}$$

n darf hier beliebig sein; denn falls $n \leqq 0$, so werden beide Seiten der Gleichung null.

Schreibt man anstatt n, h, k bzhw. $-n$, 2, $k-1$, so erhält man wie früher

$$\binom{n}{-k} + \binom{n}{-k+1} = \binom{n+1}{-k+1}$$

wo jedoch $k-1 > 0$ sein muss, also $k > 1$, aber nicht $= 1$ sein darf.

4) Wenn $h \geqq 0$ und überdies $k < 0$ oder $> h-1$, so ist

$$\varphi(x, k, h) = \binom{x}{k} - \binom{h}{1}\binom{x-1}{k} + \binom{h}{2}\binom{x-2}{k} - \dots = \binom{x-h}{k-h} \quad \text{(c)}$$

Es ist nämlich

$$\varphi(x, k, h) = \binom{x}{k} - \left[1+\binom{h-1}{1}\right]\binom{x-1}{k} + \left[\binom{h-1}{1}+\binom{h-1}{2}\right]\binom{x-2}{k} - \cdots$$

$$= \binom{x-1}{k-1} - \binom{h-1}{1}\binom{x-2}{k-1} + \binom{h-1}{2}\binom{x-3}{k-1} - \cdots$$

$$\cdots = \varphi(x-1,\ k-1,\ h-1)$$

$$= \varphi(x-2,\ k-2,\ h-2) = \cdots = \varphi(x-h,\ k-h,\ 0)$$

$$= \binom{x-h}{k-h}$$

Wenn hingegen $(h > 0$ und$)$ $0 \leqq k \leqq h-1$, so ist

$$\varphi(x,\ k,\ h) = 0 \qquad \text{(d)}$$

Man findet nämlich

$$\varphi(x,\ k,\ h) = \varphi(x-k,\ 0,\ h-k) = 1 - \binom{h-k}{1} + \binom{h-k}{2} - \binom{h-k}{3} + \cdots = 0$$

5) Wenn $0 \leqq k \leqq h-1$ und $x \geqq 0$, so ist

$$f(x,\ k,\ h) = \binom{x}{k} - \binom{h}{1}\binom{x-1}{k} + \binom{h}{2}\binom{x-2}{k} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^x\binom{h}{x}\binom{0}{k} = (-1)^{x+k}\binom{h-k-1}{h-x-1} \qquad \text{(e)}$$

Es ist nämlich, wenn vorläufig $x \geqq k$ vorausgesetzt wird,

$$f(x,\ k,\ h) = \binom{x-1}{k-1} - \binom{h-1}{1}\binom{x-2}{k-1} + \binom{h-1}{2}\binom{x-3}{k-1} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{x-1}\binom{h-1}{x-1}\binom{0}{k-1} = f(x-1,\ k-1,\ h-1)$$

$$= f(x-2,\ k-2,\ h-2) = \cdots = f(x-k,\ 0,\ h-k)$$

$$= 1 - \binom{h-k}{1} + \binom{h-k}{2} - \cdots + (-1)^{x-k}\binom{h-k}{x-k}$$

wobei die Glieder

$$(-1)^x\binom{h-1}{x}\binom{0}{k},\ (-1)^{x-1}\binom{h-2}{x-1}\binom{0}{k-1},\ \cdots$$

$$\cdots,\ (-1)^{x-k+1}\binom{h-k}{x-k+1}\binom{0}{1}$$

da dieselben null sind, der Reihe nach vernachlässigt werden konnten. Nun ist

$$1-\binom{n}{1} = -\binom{n-1}{1},\quad 1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2} = -\binom{n-1}{1}+\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2},$$
$$\ldots,\quad 1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k}$$

folglich

$$f(x,\,k,\,h) = (-1)^{x-k}\binom{h-k-1}{x-k} = (-1)^{x-k}\binom{h-k-1}{h-x-1}$$

Jetzt kann man die vorläufige Beschränkung

$$x \geqq k$$

fallen lassen, da, wenn $x < k$, nicht nur die linke Seite der Gleichung (e), sondern auch ihre rechte Seite null wird wegen

$$h-k-1 \geqq 0$$

und
$$x-k < 0$$

Variationen.

1) Unter **Combinationen zur Summe** n sollen im folgenden, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil betont ist, stets solche **mit** Wiederholungen verstanden sein.

Variationen zur Summe n sind alle Permutationen der Combinationen zur Summe n. Beispiel:

Combinationen z. S. 6.

6	3111
51	222
42	2211
411	21111
33	111111
321	

Variationen z. S. 6

6	15	114	1113	11112	111111
	51	141	1131	11121	
	24	411	1311	11211	
	42	123	3111	12111	
	33	132	1122	21111	
		213	1212		
		231	1221		
		312	2112		
		321	2121		
		222	2211		

Die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n ist $\binom{n-1}{r-1}$. Die Anzahl aller Variationen z. S. n ist 2^{n-1}.

Beweise. Die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von

$$(x+x^2+x^3+\ldots)^r = x^r(1-x)^{-r}$$

also der Coefficient von x^{n-r} in $(1-x)^{-r}$, d. i.

$$(-1)^{n-r}\binom{-r}{n-r} = \binom{n-1}{n-r} = \binom{n-1}{r-1}$$

Oder: Für

$$r = 1$$

ist die erste Behauptung richtig; denn es giebt eine einzahlige Variation z. S. n. Wenn $r > 1$ ist, so bemerke man, dass die r zahligen Variationen z. S. n die Zahlen $1, 2, \ldots, n-(r-1)$ und keine anderen enthalten. Lässt man also bei diesen Variationen die erste Zahl weg, so bleiben alle $r-1$ zahligen Variationen zu den Summen $n-1, n-2, \ldots, r-1$. Besteht die erste Behauptung für die $1, 2, \ldots, n-1$ zahligen Variationen zu den Summen $1, 2, \ldots, n-1$ zu Recht, so erhält man für die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n die Formel

$$\binom{n-2}{r-2}+\binom{n-3}{r-2}+\cdots+\binom{r-2}{r-2}=\binom{n-1}{r-1}$$

Der aufgestellte Satz gilt dann auch für $1, 2, \ldots, n$ zahlige Variationen z. S. n. Der Satz ist aber für ein- und zweizahlige Variationen zu den Summen 1 und 2 und daher allgemein richtig.

Die Anzahl aller Variationen z. S. n ist demnach

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}=2^{n-1}$$

Oder: Es giebt 1 einzahlige Variation z. S. n. Die zwei- und mehrzahligen beginnen mit einer der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$. Lässt man also bei den zwei- und mehrzahligen Variationen die erste Zahl weg, so bleiben alle Variationen zu den Summen $n-1, n-2, \ldots, 1$. Gilt die zweite Behauptung für die Variationen zu den Summen $1, 2, \ldots, n-1$, so ist die Anzahl der Variationen z. S. n

$$1+2^0+2^1+\ldots+2^{n-2} = 2^{n-1}$$

Der Satz ist aber für die Variationen zu den Summen 1 und 2 und folglich allgemein richtig.

Wegen
$$\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r+1-1}$$
giebt es eben so viel $n-r+1$ zahlige als r zahlige Variationen z. S. n.

2) Die Anzahl $a_{n,p}$ der Variationen z. S. n, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten, ist
$$a_{n,p} = \binom{n-p-1}{0} + \binom{n-2p-1}{1} + \binom{n-3p-1}{2} + \dots$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\left[\frac{n}{p+1}\right]} \binom{n-rp-1}{r-1}$$
Die Glieder dieser Summe bedeuten der Reihe nach die Anzahlen der 1, 2, 3, ... zahligen Variationen z. S. n, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten. $\left[\frac{n}{p+1}\right]$ bedeutet die grösste in dem Quotienten $\frac{n}{p+1}$ enthaltene ganze Zahl.

Beweise. Die Anzahl der r zahligen Variationen, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten, ist der Coefficient von x^n in der nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Entwicklung von
$$(x^{p+1} + x^{p+2} + x^{p+3} + \dots)^r = x^{pr+r}(1-x)^{-r}$$
also der Coefficient von x^{n-pr-r} in der Entwicklung von $(1-x)^{-r}$, d. i.
$$(-1)^{n-pr-r}\binom{-r}{n-pr-r} = \binom{n-pr-1}{r-1}$$
Diese Formel gilt aber gemäss ihrer Ableitung nur für positive r, welche der Bedingung
$$n-pr-r \geqq 0$$
genügen, woraus
$$r \leqq \left[\frac{n}{p+1}\right]$$
folgt. Die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n, welche 1, 2, ..., p nicht enthalten, ist null, wenn $r > \frac{n}{p+1}$.

Oder: Wenn man alle Elemente der r zahligen Variationen z. S. n, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten, um die Grösse

p vermindert, so entstehen alle r zahligen Variationen z. S. $n-rp$. Die Anzahl der letzteren ist aber $\binom{n-rp-1}{r-1}$.

Der Ausdruck für $a_{n,p}$ gilt auch, wenn

$$p = 0$$

ist. Ferner ist

$$a_{1,p} = a_{2,p} = \ldots = a_{p,p} = 0 \text{ und } a_{p+1,p} = 1$$

Einen recursiven Ausdruck für $a_{n,p}$, wenn $n > p+1$ ist, erhält man auf nachfolgende Art. Bezeichnen r_1 und r_1' die grössten Werte, welche die r bzhw. in den Formeln für $a_{n-1,p}$ und $a_{n-p-1,p}$ annehmen, so ist

$$r_1 = \left[\frac{n-1}{p+1}\right], \quad r_1' = \left[\frac{n-p-1}{p+1}\right] = \left[\frac{n}{p+1}\right] - 1$$

also

$$r_1' = r_1 - 1$$

wenn $\frac{n}{p+1}$ keine ganze Zahl ist. Aber auch dann, wenn

$$n = k(p+1)$$

und k eine ganze Zahl, also

$$r_1' = k-1$$

ist, darf man

$$r_1 = r_1' + 1 = k$$

wählen anstatt

$$= \left[\frac{n-1}{p+1}\right] = k-1$$

weil das in der Formel für $a_{n-1,p}$ so hinzukommende Glied $\binom{k-2}{k-1}$ null ist wegen $k > 1$. Es ist mithin

$$a_{n-1,p} = \binom{n-p-2}{0} + \binom{n-2p-2}{1} + \binom{n-3p-2}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n-rp-2}{r-1}$$

$$a_{n-p-1,p} = \binom{n-2p-2}{0} + \binom{n-3p-2}{1} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n-rp-2}{r-2}$$

wo

$$r = \left[\frac{n}{p+1}\right]$$

Durch Addition erhält man

$$a_{n-1,p}+a_{n-p-1,p}=\binom{n-p-1}{0}+\binom{n-2p-1}{1}+\ldots+\binom{n-rp-1}{r-1}$$

$$=\sum_{r=1}^{r=\left[\frac{n}{p+1}\right]}\binom{n-rp-1}{r-1}=a_{n,p}$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$a_{n,p}=a_{n-1,p}+a_{n-p-1,p} \quad \text{oder}$$
$$a_{n-p-1,p}=a_{n,p}-a_{n-1,p}$$

vermag man die Werte von $a_{n,p}$ auch für negative n zu bestimmen.

n	. . — 8,	— 7,	— 6,	—5,	—4,	—3,	—2,	—1	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8, . .
$a_{n,1}$	. . 34,	—21,	13,	—8,	5,	—3,	2,	—1	1,	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13, . .
$a_{n,2}$	. . — 2,	3,	0,	—2,	1,	1,	—1,	0	1,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	3,	4, . .
$a_{n,3}$	. . 1,	— 2,	1,	0,	1,	—1,	0,	0	1,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1,	2, . .
$a_{n,4}$	. . 1,	0,	0,	1,	—1,	0,	0,	0,	1,	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1, . .
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Man überzeugt sich leicht, dass

$$a_{-h(p+1)+k-1,p}=(-1)^{k-1}\binom{h}{k-1}$$

wo h und $k-1$ die Werte 0, 1, 2, . . . , p annehmen dürfen. Hievon ausgenommen ist nur

$$a_{-p(p+1),p}=1-(-1)^p$$

d. i. 0 oder 2, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

3) I. Wenn man in der Gleichung

$$a_{n,p}=a_{n-1,p}+a_{n-p-1,p}$$

der Reihe nach n, $n-1$, $n-2$, . . . , $n-s+1$ anstatt n setzt und aus den so gebildeten s Gleichungen $s-1$ Grössen eliminirt, so erhält man eine Relation zwischen irgend welchen $p+2$ Grössen $a_{z,p}$, $a_{z+h_1,p}$, . . . Es ist also

$$\alpha a_{x,p} + \alpha_1 a_{x+h_1,p} + \alpha_2 a_{x+h_2,p} + \ldots + \alpha_{p+1} a_{x+h_{p+1},p} = 0$$

wo die Coefficienten α, α_1, ... von x unabhängig sind. Folglich ist die Determinante $p+2$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{x,p} & a_{x+h_1,p} & \ldots & a_{x+h_{p+1},p} \\ a_{x+h',p} & a_{x+h'+h_1,p} & \ldots & a_{x+h'+h_{p+1},p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{x+h^{(p+1)},p} & a_{x+h^{(p+1)}+h_1,p} & \ldots & a_{x+h^{(p+1)}+h_{p+1},p} \end{vmatrix} = 0$$

II. Wir wollen nun die Beziehung zwischen den (homologen) Determinanten $p+1$ten Grades

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{x,p} & a_{x+h_1,p} & \ldots & a_{x+h_p,p} \\ a_{x+k_1,p} & a_{x+k_1+h_1,p} & \ldots & a_{x+k_1+h_p,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{x+k_p,p} & a_{x+k_p+h_1,p} & \ldots & a_{x+k_p+h_p,p} \end{vmatrix}$$

und $f(y)$ aufsuchen. Wenn

$$\alpha a_{x,p} + \alpha_1 a_{x+h_1,p} + \ldots + \alpha_p a_{x+h_p,p} = 0$$

ist für beliebige x, so sind beide Determinanten null, und man kann sie als gleich oder entgegengesetzt gleich betrachten. Dieser Fall soll im folgenden ausgeschlossen sein. Auch soll der kürzeren Schreibweise wegen der zweite Index p fortgelassen werden.

Es ist

$$f(x) = (-1)^{p(y-x)} f(y)$$

Beweis 1. Wenn

$$p = 1$$

so ist nach unserer Behauptung

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h} \\ a_{x+k} & a_{x+k+h} \end{vmatrix} = (-1)^{y-x} f(y)$$

Wir brauchen augenscheinlich die Richtigkeit dieser Gleichung bloss für

$$y = x + 1$$

zu beweisen. Nun ist

$$a_{x+1} = r a_x + s a_{x+h}, \quad a_{x+2} = R a_x + S a_{x+h}$$
$$a_{x+h+1} = r' a_x + s' a_{x+h}, \quad a_{x+h+2} = R' a_x + S' a_{x+h}$$
$$\begin{vmatrix} R & S \\ R' & S' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} r^2 + r's & sr + s's \\ rr' + r's' & sr' + s'^2 \end{vmatrix}$$

Wegen

$$a_{x+2} = a_{x+1} + a_x$$

ist ausserdem

$$R = r + 1, \quad S = s, \quad R' = r', \quad S' = s' + 1$$

also

$$\begin{vmatrix} r+1 & s \\ r' & s'+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix}^2$$

oder

$$r + 1 = r^2 + r's, \quad s = sr + s's, \quad r' = rr' + r's', \quad s' + 1 = sr' + s'^2$$

Diese vier Gleichungen sind identisch mit den zwei Gleichungen

$$r + s' = 1$$
$$r's - rs' = 1$$

(Nebenbei sei bemerkt, dass auch umgekehrt, wenn diese zwei Bedingungen erfüllt sind, die Gleichung besteht

$$\begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} r+1 & s \\ r' & s'+1 \end{vmatrix}$$

).

Folglich ist

$$f(x+1) = \begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix} f(x) = -f(x)$$

Wenn

$$p = 2$$

so ist zu beweisen, dass

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & a_{x+h_2} \\ a_{x+k_1} & a_{x+k_1+h_1} & a_{x+k_1+h_2} \\ a_{x+k_2} & a_{x+k_2+h_1} & a_{x+k_2+h_2} \end{vmatrix} = f(x+1)$$

Weil $f(x)$ von null verschieden ist, so können wir setzen

$$a_{x+1} = r a_x + s a_{x+h_1} + t a_{x+h_2}$$
$$a_{x+h_1+1} = r' a_x + s' a_{x+h_1} + t' a_{x+h_2}$$
$$a_{x+h_2+1} = r'' a_x + s'' a_{x+h_1} + t'' a_{x+h_2}$$

$$a_{x+2} = R a_x + S a_{x+h_1} + T a_{x+h_2}$$
$$a_{x+h_1+2} = R' a_x + S' a_{x+h_1} + T' a_{x+h_2}$$
$$a_{x+h_2+2} = R'' a_x + S'' a_{x+h_1} + T'' a_{x+h_2}$$

$$a_{x+3} = \varrho a_x + \sigma a_{x+h_1} + \tau a_{x+h_2}$$
$$a_{x+h_1+3} = \varrho' a_x + \sigma' a_{x+h_1} + \tau' a_{x+h_2}$$
$$a_{x+h_2+3} = \varrho'' a_x + \sigma'' a_{x+h_1} + \tau'' a_{x+h_2}$$

Dabei ist

$$\Sigma \pm RS'T'' = (\Sigma \pm rs't'')^2, \quad \Sigma \pm \varrho\sigma'\tau'' = (\Sigma \pm rs't'')^3$$

Zu bemerken ist jedoch, dass das $k$te Element der $i$ten Zeile von $(\Sigma \pm rs' \,..)^n$ gebildet wird durch Composition der $k$ten Colonne von $(\Sigma \pm rs' \,..)^{n-1}$ mit der $i$ten Zeile von $\Sigma \pm rs' \ldots$ Nun ist

$$a_{x+3} = a_{x+2} + a_x$$

also

$$(\varrho - R - 1) a_x + (\sigma - S) a_{x+h_1} + (\tau - T) a_{x+h_2} = 0$$
$$(\varrho' - R') a_x + (\sigma' - S' - 1) a_{x+h_1} + (\tau' - T') a_{x+h_2} = 0$$
$$(\varrho'' - R'') a_x + (\sigma'' - S'') a_{x+h_1} + (\tau'' - T'' - 1) a_{x+h_2} = 0$$

Weil $f(x)$ von null verschieden ist, so sind die in diesen drei Gleichungen auftretenden Coefficienten null. Die 9 Gleichungen

$$\varrho = R + 1; \quad \sigma = S, \quad \tau = T, \quad \varrho' = R', \quad \ldots$$

reduciren sich aber auf folgende 3 Gleichungen:

$$r + s' + t'' = 1$$
$$rs' + s't'' + t''r = r's + s''t' + tr''$$
$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ r' & s' & t' \\ r'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 1$$

(Nebenbei sei bemerkt, dass man auch umgekehrt, wenn diese drei Bedingungen erfüllt sind, bei der Bildung von $(\Sigma \pm rs't'')^3$ in der oben angegebenen Weise zu der Determinante

$$\begin{vmatrix} R+1 & S & T \\ R' & S'+1 & T' \\ R'' & S'' & T''+1 \end{vmatrix}$$

gelangt.)

Folglich ist

$$f(x+1) = \begin{vmatrix} r & s & t \\ r' & s' & t' \\ r'' & s'' & t'' \end{vmatrix} f(x) = f(x)$$

Man sieht leicht, wie der Beweis für

$$p = 3,\ 4,\ \ldots$$

in ähnlicher Weise durchzuführen ist wie für

$$p = 1,\ 2$$

Von einem allgemein gehaltenen Beweise nach der hier angewandten Methode habe ich jedoch wegen der zwar nicht schwierigen, aber umständlichen Rechnungen abgesehen.

Beweis 2. Derselbe gilt für beliebige p. Wenn (I)

$$\alpha_0 a_s + \alpha_1 a_{s+h_1} + \ldots + \alpha_p a_{s+h_p} - A_1 a_{s+1} = 0$$

ist für beliebige s, so ist (wegen $f(x) \gtrless 0$) A_1 und daher auch mindestens ein Coefficient α_m von null verschieden, und man erhält durch Addition der mit $\frac{\alpha_0}{\alpha_m}, \frac{\alpha_1}{\alpha_m}, \ldots$ multiplicirten anderen Colonnen zur $m$ten Colonne

$$f(x) = \frac{A_1}{\alpha_m} \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & \ldots a_{x+h_{m-1}} & a_{x+1} & a_{x+h_{m+1}} \ldots a_{x+h_p} \\ a_{x+k_1} & a_{x+k_1+h_1} & \ldots a_{x+k_1+h_{m-1}} & a_{x+k_1+1} & a_{x+k_1+h_{m+1}} \ldots a_{x+k_1+h_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Wenn ferner

$$\beta_0 a_s + \beta_1 a_{s+h_1} + \ldots + \beta_{m-1} a_{s+h_{m-1}} + \beta_{m+1} a_{s+h_{m+1}} + \ldots$$
$$\ldots + \beta_p a_{s+h_p} + B_1 a_{s+1} - B_2 a_{s+h_1+1} = 0$$

so ist B_2 und (weil auch $f(x+1) \gtrless 0$) mindestens ein Coefficient β_n von null verschieden. Demnach ist

$$f(x) = \frac{A_1}{\alpha_m} \frac{B_2}{\beta_n} D$$

wo D eine Determinante bedeutet, welche entsteht, wenn man in $f(x)$ die Elemente der $m+1$ten Colonne durch $a_{x+1}, a_{x+k_1+1}, \ldots$ und jene der $n+1$ten Colonne durch $a_{x+h_1+1}, a_{x+k_1+h_1+1}, \ldots$ ersetzt. Fährt man in dieser Weise fort, so ergiebt sich schliesslich

$$f(x) = \frac{1}{\varphi} f(x+1)$$

wobei $\frac{1}{q}$ ein endlicher, von null verschiedener und von x unabhängiger Coefficient ist. Es ist also

$$\ldots = q^2 f(x-2) = q f(x-1) = f(x) = \frac{1}{q} f(x+1) = \frac{1}{q^2} f(x+2) = \ldots$$

Die Determinanten $\ldots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \ldots$ bilden eine geometrische Progression, deren Quotient q ist. Weil aber alle Glieder dieser Progression als Determinanten mit durchwegs ganzzahligen Elementen ganze Zahlen sind, so kann q nur $+1$ oder -1 sein.

Ein diesem ähnlicher Beweis, welcher auch das Vorzeichen von q bestimmen lehrt, ist der folgende. Man wandle zunächst die Determinante $p+1$ ten Grades

$$d = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_p \\ a_1 & a_2 & . & . & a_{p+1} \\ . & . & . & . & . \\ a_p & a_{p+1} & . & . & a_{2p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p^2-p}{2}}$$

auf demselben Wege wie oben durch successive Ersetzung zunächst der Colonnen und dann der Zeilen um in

$$d = C \,.\, f(x).$$

In gleicher Weise findet man

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_{p+1} \\ a_2 & a_3 & . & . & a_{p+2} \\ . & . & . & . & . \\ a_{p+1} & a_{p+2} & . & . & a_{2p+1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p^2+p}{2}} = C f(x+1)$$

Nun ist

$$d = (-1)^p \delta$$

also auch

$$f(x+1) = (-1)^p f(x)$$

III. Ich führe noch zwei Sätze ohne Beweis an.

Die homologen Determinanten $p$ten Grades bilden Reihen, die ein Gesetz befolgen, welches dem der Originalreihe ähnlich ist.

Eine Determinante $p+1$ten Grades ist das Product zweier Determinanten. Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & \cdot\cdot & a_{x+h_p} \\ a_{x+k_1} & a_{x+k_1+h_1} & \cdot\cdot & a_{x+k_1+h_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{x+k_p} & a_{x+k_p+h_1} & \cdot\cdot & a_{x+k_p+h_p} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & \cdot\cdot & a_{x+h_p} \\ a_{x+1} & a_{x+h_1+1} & \cdot\cdot & a_{x+h_p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{x+p} & a_{x+h_1+p} & \cdot\cdot & a_{x+h_p+p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x & a_{x+k_1} & \cdot\cdot & a_{x+k_p} \\ a_{x+1} & a_{x+k_1+1} & \cdot\cdot & a_{x+k_p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{x+p} & a_{x+k_1+p} & \cdot\cdot & a_{x+k_p+p} \end{vmatrix}$$

Insbesondere ist die symmetrische Determinante $p+1$ ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & a_{x+h_2} & \cdot\cdot \\ a_{x+h_1} & a_{x+2h_1} & a_{x+h_1+h_2} & \cdot\cdot \\ a_{x+h_2} & a_{x+h_2+h_1} & a_{x+2h_2} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & a_{x+h_2} & \cdot\cdot \\ a_{x+1} & a_{x+h_1+1} & a_{x+h_2+1} & \cdot\cdot \\ a_{x+2} & a_{x+h_1+2} & a_{x+h_2+2} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}^2$$

4) Betrachtet man die einzelnen Variationen zur S. n als **Producte ihrer Elemente** und bezeichnet die **Summe** dieser Producte mit $C_{n,1}{}^{(2)}$, so ist

$$C_{n,1}{}^{(2)} = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-2}{1} + \binom{2n-3}{2} + \cdots$$
$$= \sum_{r=n}^{r=1} \binom{n+r-1}{n-r} = a_{2n+1,1}$$

Die Glieder dieser Summe sind der Reihe nach die Summen der als Producte ihrer Elemente angesehenen n, $n-1$, ... zahligen Variationen z. S. n.

Die Summe der als Producte betrachteten r zahligen Variationen z. S. n ist nämlich der Coefficient von x^n in der Entwicklung von

$$(x+2x^2+3x^3+\ldots)^r = x^r(1-x)^{-2r}$$

d. i.

$$(-1)^{n-r}\binom{-2r}{n-r} = \binom{n+r-1}{n-r}$$

Setzt man

$$n - r = r' - 1$$

so wird

$$C_{n,1}^{(2)} = \sum_{r=1}^{r=n} \binom{n+r-1}{n-r} = \sum_{r'=1}^{r'=n} \binom{2n-r'}{r'-1} = a_{2n+1,1}$$

Ein allgemeinerer Satz ist der folgende: Man schreibe bei den r zahligen Variationen zur S. n anstatt der Zahlen 1, 2, 3, . . . die Zahlen $\binom{p}{p}$, $\binom{p+1}{p}$, $\binom{p+2}{p}$, . . . , betrachte die so gebildeten Complexionen als Producte ihrer Elemente und bilde endlich die Summe dieser Producte. Dieselbe ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von

$$\left[x + \binom{p+1}{1} x^2 + \binom{p+2}{2} x^3 + \ldots\right]^r = x^r (1-x)^{-(p+1)r}$$

d. i.

$$(-1)^{n-r} \binom{-pr-r}{n-r} = \binom{n+pr-1}{n-r}$$

Bildet man in der angegebenen Weise aus allen Variationen z. S. n neue Complexionen, betrachtet dieselben als Producte ihrer Elemente und bezeichnet die Summe dieser Producte mit $C_{n,p}^{(p+1)}$, so ist

$$C_{n,p}^{(p+1)} = \sum_{r=1}^{r=n} \binom{n+pr-1}{n-r}$$

Setzt man hier wieder

$$n - r = r' - 1$$

so wird

$$C_{n,p}^{(p+1)} = \sum_{r'=1}^{r'=n} \binom{(p+1)n - r'p + p - 1}{r'-1} = a_{(p+1)n+p,p}$$

n	. . −4,	−3,	−2,	−1,	0,	1,	2,	3,	4,	5 . .
$C_{n,1}^{(2)}$	. . −21,	−8,	−3,	−1,	0,	1,	3,	8,	21,	55 . .
$C_{n,2}^{(3)}$	. . 5,	3,	1,	0,	0,	1,	4,	13,	41,	129 . .
$C_{n,3}^{(4)}$	. . −4,	−1,	0,	0,	0,	1,	5,	19,	69,	250 . .
$C_{n,4}^{(5)}$	. . 1,	0,	0,	0,	0,	1,	6,	26,	106,	431 . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Zur recursiven Berechnung der Grössen $C_{n,p}^{(p+1)}$ kann man sich zweier Formeln bedienen, denen ich jedoch sofort eine allgemeinere Fassung geben will. Definirt man nämlich $C_{n,p}^{(k)}$ durch die Gleichung

$$C_{n,p}^{(k)} = a_{(p+1)n+k-1,p}$$

wo k irgend eine Zahl des in Bezug auf den Modul $p+1$ vollständigen Restsystems $1, 2, \ldots, p+1$ bedeuten kann, so ist

$$C_{n,p}^{(k)} = \binom{p+2}{1} C_{n-1,p}^{(k)} - \binom{p+1}{2} C_{n-2,p}^{(k)} + \binom{p+1}{3} C_{n-3,p}^{(k)} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^p \binom{p+1}{p+1} C_{n-p-1,p}^{(k)} \qquad (1)$$

$$C_{n,p}^{(k)} = C_{n-1,p}^{(k)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}^{(k)} + \binom{p+2}{p} C_{n-3,p}^{(k)} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}^{(k)} + \binom{k+n-2}{k-1} \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) gilt für beliebige, die Gleichung (2) für positive n.

Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich die Beweise dieser Gleichungen bloss andeuten und überdies bemerken, dass manche der in der Einleitung entwickelten Sätze hier ihre Anwendung finden.

Beweis der Gleichung (1). Man multiplicire von den $p(p+1)+1$ Gleichungen

$$a_{(p+1)n+k-1,p} = a_{(p+1)n+k-2,k} + a_{(p+1)n+k-p-2,p}$$
$$a_{(p+1)n+k-2,p} = a_{(p+1)n+k-3,p} + a_{(p+1)n+k-p-3,p}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{(p+1)n+k-p^2-p-1,p} = a_{(p+1)n+k-p^2-p-2,p}$$
$$+ a_{(p+1)n+k-p^2-2p-2,p}$$

die ersten $p+1$ Gleichungen der Reihe nach mit

$$\binom{p}{0}, \binom{p-1}{0}, \ldots, \binom{p-p}{0}$$

die zweiten $p+1$ Gleichungen mit

$$-\binom{p}{1}, -\binom{p-1}{1}, \ldots, -\binom{p-p}{1}, \ldots$$

die $p$ten $p+1$ Gleichungen mit

$$(-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}, \quad (-1)^{p-1}\binom{p-1}{p-1}, \ldots, \quad (-1)^{p-1}\binom{p-p}{p-1}$$

die letzte Gleichung mit

$$(-1)^p \binom{p}{p}$$

und addire hierauf alle Gleichungen.

Beweis der Gleichung (2). Wir wollen zunächst zeigen, dass die Gleichung richtig ist für

$$k = m$$

wenn sie für

$$k = m + 1$$

zu Recht besteht. Wegen

$$C_{n,p}^{(m)} = C_{n,p}^{(m+1)} - C_{n-1,p}^{(m+1)}$$

erhält man aus den Gleichungen

$$C_{n,p}^{(m+1)} = C_{n-1,p}^{(m+1)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}^{(m+1)} + \dots$$
$$\dots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}^{(m+1)} + \binom{m+n-1}{m}$$

$$C_{n-1,p}^{(m+1)} = C_{n-2,p}^{(m+1)} + \dots$$
$$\dots + \binom{p+n-3}{p} C_{1,p}^{(m+1)} + \binom{m+n-2}{m}$$

durch Subtraction

$$C_{n,p}^{(m)} = C_{n-1,p}^{(m+1)} + \binom{p}{p-1} C_{n-2,p}^{(m+1)} + \dots$$
$$\dots + \binom{p+n-3}{p-1} C_{1,p}^{(m+1)} + \binom{m+n-2}{m-1} \qquad \text{(a)}$$

Ausserdem ist

$$C_{n-1,p}^{(m)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}^{(m)} + \dots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}^{(m)}$$
$$= C_{n-1,p}^{(m+1)} + \binom{p}{p-1} C_{n-2,p}^{(m+1)} + \dots + \binom{p+n-3}{p-1} C_{1,p}^{(m+1)} \qquad \text{(b)}$$

was sofort klar wird, wenn man für die Coefficienten links vom Gleichheitszeichen die bekannten Formeln anwendet

$$\binom{p+1}{p} = \binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1}$$
$$\binom{p+2}{p} = \binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1} + \binom{p+1}{p-1}, \dots$$

und überdies berücksichtigt, dass

$$C_{1,p}^{(m)} = C_{1,p}^{(m+1)} = 1,\quad C_{1,p}^{(m)} + C_{2,p}^{(m)} = C_{1,p}^{(m+1)} + C_{2,p}^{(m)} = C_{2,p}^{(m+1)},$$
$$C_{1,p}^{(m)} + C_{2,p}^{(m)} + C_{3,p}^{(m)} = C_{2,p}^{(m+1)} + C_{3,p}^{(m)} = C_{3,p}^{(m+1)}, \ldots$$

Aus (a) und (b) folgt aber

$$C_{n,p}^{(m)} = C_{n-1,p}^{(m)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}^{(m)} + \ldots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}^{(m)} + \binom{m+n-2}{m-1}$$

Wir haben nunmehr zu beweisen, dass die Gleichung (2) richtig ist für

$$k = p+1$$

Zu diesem Zwecke multiplicire man die n Gleichungen, welche aus

$$C_{x,p}^{(p+1)} = \binom{p+2}{1} C_{x-1,p}^{(p+1)} - \binom{p+1}{2} C_{x-2,p}^{(p+1)} + \binom{p+1}{3} C_{x-3,p}^{(p+1)} - \ldots + (-1)^p \binom{p+1}{p+1} C_{x-p-1,p}^{(p+1)}$$

hervorgehen, wenn man

$$n,\ n-1,\ \ldots,\ 1$$

anstatt x setzt, der Reihe nach mit

$$\binom{p}{p},\ \binom{p+1}{p}, \ldots, \binom{p+n-1}{p}$$

und addire alsdann dieselben. Hiebei ist neben Anderem die Gleichung

$$C_{-h,p}^{(p+1)} = (-1)^p \binom{h}{p} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

zu berücksichtigen.

In gleicher Weise wie die Formel für $c_{n,p}^{(p+1)}$ kann man auch unmittelbar die allgemeinere Formel für $c_{n,p}^{(k)}$ ableiten, wenn man die Gleichung

$$C_{-h,p}^{(k)} = (-1)^{k-1} \binom{h}{k-1} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

(ausgenommen $C_{-p,p'} = 1 - (-1)^p$) und die Gleichung (e) der Einleitung benutzt.

5) Wir wollen jetzt die Häufigkeit des Vorkommens irgend einer Zahl z in den Variationen z. S. n bestimmen.

Die Zahl n kommt einmal vor, nämlich in der einen ein-

zahligen Variation n. Wir schliessen diesen Fall aus und nehmen also an, dass $0 < z < n$ ist. Bedeuten alsdann $A_{n,z}^{(r)}$ und $A_{n,z}$ die Zahlen, welche angeben, wie oft die Zahl z bzhw. in den r zahligen und in allen Variationen z. S. n auftritt, so ist

$$A_{n,z}^{(r)} = r\binom{n-z-1}{r-2}$$

$$A_{n,z} = (n-z+3)2^{n-z-2} = 2^{n-z} + (n-z-1)2^{n-z-2}$$

Beweis. $A_{n,z}^{(r)}$ ist gleich der Häufigkeit des Vorkommens von a_z in dem Coefficienten, welchen x^n in der Entwicklnng von

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^r$$

besitzt, also gleich dem Coefficienten von x^n in der Entwicklung von

$$\frac{\partial}{\partial a_z}(a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^r$$

wenn man in dieser

$$a_1 = a_2 = \dots = 1$$

setzt. Nun ist

$$\left[\frac{\partial}{\partial a_z}(a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^r\right]_{a_1=a_2=\dots=1} = r x^z (x + x^2 + \dots)^{r-1} = r x^{z+r-1}(1-x)^{-r+1}$$

folglich

$$A_{n,z}^{(r)} = (-1)^{n-z-r+1} r \binom{-r+1}{n-z-r+1} = r\binom{n-z-1}{r-2}$$

Ferner ist

$$A_{n,z} = \sum_{r=2}^{r=n} A_{n,z}^{(r)} = 2\binom{n-z-1}{0} + 3\binom{n-z-1}{1} + \dots$$
$$\dots + (n-z+1)\binom{n-z-1}{n-z-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-z+3)\left[\binom{n-z-1}{0} + \binom{n-z-1}{1} + \dots\right.$$
$$\left.\dots + \binom{n-z-1}{n-z-1}\right] = (n-z+3)\,2^{n-z-2}$$

Anmerkung. Die Anzahl aller Zahlen in den r zahligen Variationen ist

$$\sum_{z=1}^{z=n} r\binom{n-z-1}{r-2} = r\left[\binom{n-2}{r-2} + \binom{n-3}{r-2} + \dots\right.$$
$$\left.\dots + \binom{r-2}{r-2}\right] = r\binom{n-1}{r-1}$$

folglich ist die Anzahl der r zahligen Variationen

$$=\binom{n-1}{r-1}$$

6) Die Anzahl A_n aller Zahlen in allen Variationen z. S n ist $(n+1)2^{n-2}$; denn es ist entweder

$$A_n=\sum_{r=1}^{r=n} r\binom{n-1}{r-1}=\binom{n-1}{0}+2\binom{n-1}{1}+3\binom{n-1}{2}+\dots$$

$$\dots+n\binom{n-1}{n-1}=\tfrac{1}{2}(n+1)\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\binom{n-1}{n-1}\right]$$

oder auch

$$A_n=1+\sum_{z=n-1}^{z=1} A_{n,z}=1+(2+0.2^{-1})+(2^2+1.2^0)+\dots$$

$$\dots+(2^{n-1}+(n-2)2^{n-3})=2^n-1+(1+2.2+3.2^2+\dots$$

$$\dots+(n-2)2^{n-3})=(n+1)2^{n-2}$$

Combinationen.

1) Die im folgenden dargelegten, auf Combinationen zu bestimmten Summen Bezug habenden Sätze wurden von mir schon vor geraumer Zeit selbständig gefunden. Ein späteres Studium der Euler'schen „Einleitung in die Analysis des Unendichen" belehrte mich neuerdings, dass ich zu der Erkenntniss vieler hieher gehörigen Wahrheiten auf einem weit müheloseren Wege als dem der eigenen Forschung hätte gelangen können. Gleichwol reute mich die einmal getane Arbeit nicht, da ich die meisten der von Euler in dem angeführten Werke (Buch 1, Cap. 16) vorgetragenen Lehrsätze aus anderen Gründen gewonnen und ausserdem mancherlei Neues auf diesem Gebiete erkannt hatte.

Die Anzahl der Combinationen z. S. n (mit Wiederholung) soll stets mit k_n bezeichnet werden. Zur recursiven Berechnung von k_n dient die Gleichung

$$k_n=k_{n-1}+k_{n-2}-k_{n-5}-k_{n-7}+k_{n-12}+k_{n-15}-k_{n-22}-k_{n-26}+\dots$$

Das Gesetz, nach welchem diese Reihe fotschreitet, bedarf keiner Erläuterung. Zu bemerken ist nur, dass

$$k_0=1 \quad \text{und} \quad k_{-1}=k_{-2}=\dots=0 \quad \text{ist.}$$

Bei der Entwickelung jener Formel sei **Euler's** Vorgang befolgt und nur der aus naheliegenden Gründen bei Euler fehlende Beweis hinzugefügt.

Bezeichnet man das unendliche Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ mit $\Pi(1-x^k)$, so ist klar, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Pi(1-x^k)} &= (1+x+x^{1+1}+\ldots)(1+x^2+x^{2+2}+\ldots)(1+x^3+x^{3+3}+\ldots)\ldots\\ &= k_0+k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\ldots\end{aligned}$$

Nunmehr ist erforderlich, die Richtigkeit der Gleichung

$$\Pi(1-x^k) = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\ldots$$

zu beweisen. Zu dem Behufe setze man in der aus der Lehre von den Θ-Functionen bekannten Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(1-xe^{\alpha})\;(1-x^3e^{\alpha})\;(1-x^5e^{\alpha})\;\ldots\\ (1-xe^{-\alpha})(1-x^3e^{-\alpha})(1-x^5e^{-\alpha})\ldots\end{array}\right\}$$
$$=\frac{1}{\Pi(1-x^{2k})}\left[\begin{array}{l}1-xe^{\alpha}+x^4e^{2\alpha}-x^9e^{3\alpha}+x^{16}e^{4\alpha}-\ldots\\ -xe^{-\alpha}+x^4e^{-2\alpha}-x^9e^{-3\alpha}+x^{16}e^{-4\alpha}-\ldots\end{array}\right]$$

$x^{\frac{3}{2}}$ anstatt x und $\alpha-\frac{1}{2}\log x$ anstatt α. Dann geht über

$$\begin{array}{lcl} x^{2n-1}e^{\alpha} & \text{in} & x^{3n-2}e^{\alpha}\\ x^{2n-1}e^{-\alpha} & „ & x^{3n-1}e^{-\alpha}\\ (1-x^{2k}) & „ & (1-x^{3k})\\ x^{n^2}e^{n\alpha} & „ & x^{\frac{3n^2-n}{2}}e^{n\alpha}\\ x^{n^2}e^{-n\alpha} & „ & x^{\frac{3n^2+n}{2}}e^{-n\alpha}\end{array}$$

Folglich nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an

$$\left.\begin{array}{l}(1-xe^{\alpha})\;(1-x^4e^{\alpha})\;(1-x^7e^{\alpha})\;\ldots\\ (1-x^2e^{-\alpha})(1-x^5e^{-\alpha})(1-x^8e^{-\alpha})\ldots\end{array}\right\}$$
$$=\frac{1}{\Pi(1-x^{3k})}\left[\begin{array}{l}1-xe^{\alpha}+x^5e^{2\alpha}-x^{12}e^{3\alpha}+x^{22}e^{4\alpha}-\ldots\\ -x^2e^{-\alpha}+x^7e^{-2\alpha}-x^{15}e^{-3\alpha}+x^{26}e^{-4\alpha}-\ldots\end{array}\right]$$

Setzt man hier

$$\alpha = 0$$

so erhält man den gesuchten Ausdruck für $\Pi(1-x^k)$.

2) Die Häufigkeit des Vorkommens $A_{n,x}$ der Zahl x in den Combinationen z. S. n ist gegeben durch den Ausdruck

$$A_{n,x} = k_{n-x} + k_{n-2x} + k_{n-3x} + \ldots$$

Beweis. Es ist $A_{n,n} = 1 = k_0$. Wenn man jeder einzelnen derjenigen Combinationen, welche die Zahl $x < n$ enthalten, die Zahl x einmal weglässt, so entstehen alle Combinationen z. S. $n-x$, jede einmal. Folglich ist

$$A_{n,x} = k_{n-x} + A_{n-x,x}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Beziehung gelangt man zu der zu beweisenden.

3) Die Anzahl A_n aller Zahlen der Combinationen z. S. n ist

$$A_n = \sum_{x=1}^{x=n} A_{n,x} = k_{n-1} + 2k_{n-2} + 2k_{n-3} + 3k_{n-4} + 2k_{n-5} + 4k_{n-6} + \ldots$$

$$\ldots = \sum_{h=1}^{h=n} \sigma_h k_{n-h}$$

wo σ_h die Anzahl der Divisoren von h ist, also

$$\sigma_h = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \ldots$$

wenn

$$h = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots \quad \text{und} \quad a, b, c, \ldots$$

die verschiedenen in h aufgehenden Primzahlen sind. Demnach ist

$$(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \ldots)$$
$$= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$$

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots}$$

4) Die Summe aller in den Combinationen z. S. n auftretenden Zahlen ist einerseits $n k_n$, andererseits $A_{n,1} + 2A_{n,2} + 3A_{n,3} + \ldots$ Folglich ist

$$n k_n = S_1 k_{n-1} + S_2 k_{n-2} + S_3 k_{n-3} + \ldots = \sum_{h=1}^{h=n} S_h k_{n-h}$$

wo S_h die Summe aller Divisoren der Zahl h bedeutet, also

$$S_h = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b-1} \ldots$$

wenn wie früher

$$h = a^\alpha b^\beta \ldots \text{ ist.}$$

Durch Addition der Gleichungen

$$-\log(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$-\log(1-x^2) = \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \dots$$

$$-\log(1-x^3) = \frac{x^3}{1} + \dots$$

$$-\log(1-x^4) = \frac{x^4}{1} + \dots$$

$$-\log(1-x^5) = \frac{x^5}{1} + \dots$$

. . . .

erhält man

$$-\log(1-x-x^2+x^5+x^7-\dots) = S_1 x + \frac{S_2}{2}x^2 + \frac{S_3}{3}x^3 + \frac{S_4}{4}x^4 + \dots$$

folglich ist

$$S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + S_4 x^3 + \dots = -\frac{d}{dx}\log(1-x-x^2+x^5+x^7-\dots) = \frac{d}{dx}\log(k_0+k_1 x+k_2 x^2+k_3 x^3+\dots)$$

oder

$$(k_0+k_1 x+k_2 x^2+\dots)(S_1+S_2 x+S_3 x^2+\dots) = k_1 + 2k_2 x + 3k_3 x^2 + \dots$$

wie oben.

Aus der Gleichung

$$S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + \dots = (1+2x-5x^4-7x^6+\dots)(k_0+k_1 x+k_2 x^2+\dots)$$

folgt für S_n der Ausdruck

$$S_n = k_{n-1} + 2k_{n-2} - 5k_{n-5} - 7k_{n-7} + 12k_{n-12} + 15k_{n-15} - \dots$$

5) Aus der Gleichung

$$\log(k_0+k_1 x+k_2 x^2+\dots) = S_1 x + \frac{S_2}{2}x^2 + \frac{S_3}{3}x^3 + \dots = s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \dots$$

wo

$$\frac{S_h}{h} = s_h$$

gesetzt wurde, oder

$$k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots=e^{s_1x+s_2x^2+s_3x^3+\ldots}$$
$$=\left(1+\frac{s_1}{1!}x+\frac{s_1^2}{2!}x^2+\frac{s_1^3}{3!}x^3+\ldots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{s_2}{1!}x^2+\frac{s_2^2}{2!}x^4+\frac{s_2^3}{3!}x^6+\ldots\right)\ldots$$

ergiebt sich leicht der Satz: Das arithmetische Mittel zwischen den k_n Werten, welche die Formel

$$\frac{s_1^{\alpha}\ s_2^{\alpha_2}\ \ldots\ s_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \ldots\ \alpha_n!}$$

anzunehmen vermag, wenn man für die Grössen α_k ganze und nicht negative Zahlen setzt, welche der Bedingung

$$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=n$$

genügen, ist eins.

Ebenso findet man leicht, dass wegen

$$1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots=e^{-s_1x-s_2x^2-s_3x^3-\ldots}$$

die Summe

$$\Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\frac{s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}\ \ldots\ s_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \ldots\ \alpha_n!}$$

den Wert 1 oder -1 oder 0 hat, je nachdem $24n+1$ auf die Form $(12x\pm1)^2$ oder auf die Form $(12x\pm5)^2$ oder auf keine von diesen beiden Formen sich bringen lässt.

6) Unter den hinsichtlich der Aufeinanderfolge ihrer Elemente fallend geordneten Combinationen z. S. n giebt es genau soviel r zahlige als es Combinationen giebt, die mit der Zahl r anfangen.

Beweis. Irgend einer r zahligen Combination $a_1\,a_2\ldots a_r$ entspricht eine bestimmte Combination, welche aus a_r Zahlen r, $a_{r-1}-a_r$ Zahlen $r-1$, $a_{r-2}-a_{r-1}$ Zahlen $r-2,\ldots$ besteht, denn es ist

$$(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\ldots+(r-1)(a_{r-1}-a_r)+ra_r$$
$$=a_1+a_2+\ldots+a_r=n$$

Umgekehrt lässt sich aus irgend einer mit der Zahl r beginnenden Combination eine und nur eine r zahlige Combination ableiten, welcher in dem soeben angegebenen Sinne wieder die nämliche mit r beginnende Combination entspricht. Also stimmt die Anzahl $k_{n,r}$

der r zahligen Combinationen überein mit der Anzahl der mit r beginnenden Combinationen.

Dieser Satz ist ein specieller Fall des allgemeineren: Unter den $h$ten Elementen der fallend geordneten Combinationen z. S. n giebt es genau so viele Zahlen r als es unter den Complexionen, welche aus den Combinationen z. S. n durch Hinweglassung der Elemente $1, 2, \ldots, h-1$ entstehen, r zahlige giebt.

Beweis. Man stelle aus einer bestimmten r zahligen (und keine kleinere als die Zahl h enthaltenden) Complexionen $a_1 a_2 \ldots a_r$ durch eventuelle Hinzufügung der erforderlichen aus der Reihe $1, 2, \ldots, h-1$ entnommenen Elemente wieder jene Combination $a_1 a_2 \ldots a_r a_{r+1} \ldots a_{r+y}$ zur Summe n her, aus welcher die Complexion $a_1 a_2 \ldots a_r$ entstanden ist. Man leite jetzt wie früher von der Combination $a_1 a_2 \ldots a_{r+y}$ eine neue Combination z S. n ab, welche aus a_{r+y} Zahlen $r+y$. $a_{r+y-1}-a_{r+y}$ Zahlen $r+y-1, \ldots$ besteht. Wegen

$$a_{r+y}+(a_{r+y-1}-a_{r+y})+\ldots+(a_{r+1}-a_{r+2}) = a_{r+1}$$
$$a_{r+y}+(a_{r+y-1}-a_{r+y})+\ldots+(a_r-a_{r+1}) = a_r$$

nimmt die Zahl r in der abgeleiteten Combination a_r-a_{r+1} Stellen ein, u. zw. die $a_{r+1}+1$te, $a_{r+1}+2$te, $\ldots a_r-1$te und $a_r$te, also gewiss auch die $h$te Stelle, weil

$$a_{r+1}+1 \leqq h \leqq a_r$$

ist. — Umgekehrt entspricht einer bestimmten Combination z. S. n deren $h$tes Element die Zahl r ist, eine bestimmte r zahlige und keine kleinere als die Zahl h enthaltende Complexion $a_1 a_2 \ldots a_r$. Hieraus folgt die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Um also die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl r in den Combinationen z. S. n zu finden, hat man blos unter den Complexionen, welche man erhält, wenn man aus allen Combinationen der Reihe nach zuerst kein Element, dann das Element 1, hierauf die Elemente 1 und 2, u. s w. weglässt, die Anzahl der r zahligen zu bestimmen. Man bemerkt leicht, dass e i n e Combination zur Bildung von so vielen r zahligen Complexionen beiträgt, als die Differenz zwischen ihrem $r$ten und $r+1$ten Elemente Einheiten enthält. Bezeichnet also $S_{n,h}$ die S u m m e der $h$ten Elemente aller Combinationen z. S. n, so ist

$$A_{n,r} = \mathfrak{S}_{n,r} - \mathfrak{S}_{n,r+1}$$

$$A_n = \sum_{r=1}^{r=n} (\mathfrak{S}_{n,r} - \mathfrak{S}_{n,r+1}) = \mathfrak{S}_{n,1}$$

Wenn hingegen jede einzelne der Combinationen z. S. n hinsichtlich der Aufeinanderfolge ihrer Elemente steigend geordnet wird, so kömmt das Element 1 an der $h$ten Stelle für beliebige h, das Element $r > 1$ an der $h$ten Stelle, wenn

$$h \geqq \frac{n}{2}$$

in allen Combinationen $k_{n-r-h+1}$ mal vor. Vermindert man nämlich in allen jenen Combinationen, welche an der $h$ten Stelle die Zahl r haben, die Elemente an den ersten $h-1$ Stellen um je 1 und lässt obendrein die Zahl r an der $h$ten Stelle weg, so erhält man Combinationen z. S. $n-r-h+1$, jedoch, wenn $r > 1$, nur dann alle diese Combinationen, wenn keine derselben mehr als $h-1$ zahlig ist. Also muss, wenn $r > 1$ ist,

$$n-r-h+1 \leqq h-1$$

d. i.

$$h \geqq \frac{n-r+2}{2}$$

mithin

$$h \geqq \frac{n}{2}$$

sein, wenn der in Rede stehende Satz bei beliebigen r gelten soll.

7) Wenn man jede von den r zahligen Combinationen z. S. n' hinsichtlich ihrer Elemente steigend ordnet und hierauf zu den einzelnen Elementen jeder solchen Combination die Zahlen 0, 1, 2, . . . $r-1$ bzhw. addirt, so erhält man alle r zahligen Combinationen $C_{n,r}$ z. S.

$$n = n' + \binom{r}{2}$$

ohne Wiederholung. Die Anzahl der Combinationen $C_{n,r}$ werde mit $k_{n,r}$ bezeichnet.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21 . .
$k_{n,1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1 . .
$k_{n,2}$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10 . .
$k_{n,3}$	0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27 . .
$k_{n,4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27 . .
$k_{n,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	10 . .
$k_{n,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 . .

Es ist $k_{n,1} = 1$ für alle n. Um recursive Formeln für $k_{n,r}$ zu finden, wenn $r > 1$, bemerke man, dass durch Verminderung aller Elemente um je 1 aus jenen Combinationen $C_{n,r}$, welche mit 1 anfangen, alle Combinationen $C_{n-r,r-1}$ und aus den anderen Combinationen $C_{n,r}$ alle $C_{n-r,r}$ entstehen. Folglich ist

$$k_{n,r} = k_{n-r,\,r-1} + k_{n-r,r}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man eine zweite, nämlich

$$k_{n,r} = k_{n-r,r-1} + k_{n-2r,r-1} + k_{n-3r,r-1} + \dots$$

$k_{n,1}$ ist der Coefficient von x^n in der Entwicklung von $\frac{x}{1-x}$. — Ferner ist

$$k_{n,2} = k_{n-2,1} + k_{n-4,1} + \dots$$

Nun ist $k_{n-2,1}$ der Coefficient von x^{n-2} in $\frac{x}{1-x}$ oder von x^n in $\frac{x^3}{1-x}$; ebenso ist $k_{n-4,1}$ der Coefficient von x^n in $\frac{x^5}{1-x}$; u. s. w. Also ist $k_{n,2}$ der Coefficient von x^n in

$$\frac{x^3 + x^5 + x^7 + \dots}{1-x} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

Ist $k_{n,r-1}$ der Coefficient von x^n in

$$x^{\binom{r}{2}} : (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})$$

so ist $k_{n-hr,r-1}$ der Coefficient von x^n in

$$x^{\binom{r}{2}+hr} : (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})$$

und $k_{n,r}$ wegen

$$k_{n,r} = k_{n-r,r-1} + k_{n-2r,r-1} + \ldots$$

der Coefficient von x^n in

$$\frac{x^{\binom{r}{2}+r} + x^{\binom{r}{2}+2r} + x^{\binom{r}{2}+3r} + \ldots}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})}$$

$$= \frac{x^{\binom{r+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

Folglich ist (Euler)

$$Z = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3 + \ldots$$

8) Setzt man

$$k_{n,r} = k_{n'+\binom{r}{2},r} = K_{n',r}$$

so kann man für die Werte von $K_{n,r}$ die folgende Tabelle bilden, welche sich von jener für $k_{n,r}$ nur durch eine entsprechende Verschiebung der Zeilen unterscheidet.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Pietsch, C., Katechismus der Feldmesskunst. 5. Afl. Leip J. J. Weber. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Mechanik.

Jansen, W., die Kreiselbewegungs-Untersuchung der Rota v. Körpern, welche in e. Punkte od. gar nicht unterstützt s Berlin, Luckhardt. 1 Mk. 80 Pf.

Ott, E., Elemente der Mechanik. 2. Afl. Zürich, Schultl 4 Mk.

Schmid, C., Statik u. Festigkeitslehre. Lehrheft nebst vi Beispielen elementar behandelt f. den Gebrauch an der Schul in der Praxis. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 4 Mk.

Technik.

Becker, W., die Absteckung v. Strassen- u. Eisenbahncu m. u. ohne Benutzung e. Winkelinstrumentes. 2. Asg. Wien, Sp hagen & Sch. 1 Mk. 60 Pf.

Bibliothek, elektrotechnische. 2. Bd. 3. Afl. Wien, Hartlel 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Central-Anzeiger f. d. gesammte Elektrotechnik. Jahrg. 1 Nr. 17. Frankfurt, Gebr. Knauer. Halbjährl. 1 Mk.

Corsepius, M., Leitfaden z Construction v. Dynamomas nen u. zur Berechnung v. elektrischen Leitungen. Berlin, Sprin 2 Mk.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: W. Krieg. 4. Jahrg. 1 27. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährl. 3 Mk. 75 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 4. Ja Das Jahr 1891. 1. Heft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Früchtenicht, H., die Gezeiten. Lehrmittel. (2 ovale feln m. Drehvorrichtung.) Halle, Reichardt. 75 Pf.

Weiler, W., der praktische Elektriker. Populäre Anleitg. Selbstanfertigg. elektr. Apparate u. zur Anstellg. zugehör. Versu nebst Schlussfolgergn., Regeln u. Gesetzen. Leipzig, Schäfer. 5

Wolffberg, diagnostischer Farbenapparat. 3. Afl. N Erläutergn. u. Gebrauchsanweisg. Breslau, Preuss & J. 4 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Breuer, A., übersichtliche Darstellung der mathematisc Theorie üb. die Dispersion d. Lichtes. II. Tl. Anomale Dispers Erfurt, Bodo Baemeister. 2 Mk.

$$\frac{x^{\binom{r+1}{2}-\binom{r}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

Es ist also

$$K_{1,r}=K_{2,r}=\ldots=K_{n-1,r}=0$$

und

$$\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}=K_{r,r}x^r+K_{r+1,r}x^{r+1}+\ldots$$

Ferner ist (Euler)

$$Z'=\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots}=1+\frac{x}{1-x}z$$
$$+\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\ldots$$

Aus der Bedeutung von $k_{n,r}$ und $K_{n,r}$ und daraus, dass der Coefficient von x^n in

$$x^k:(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)$$

übereinstimmt mit dem Coefficienten von x^{n-k} in

$$1:(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)$$
$$=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots(1+x^r+x^{2r}+\ldots)$$

ergeben sich die Euler'schen Sätze: „Eine jede Zahl n lässt sich auf so viele Arten in r ungleiche Teile teilen, als die Zahl $n-\binom{r+1}{2}$ aus den Zahlen 1, 2, 3, . . . , r durch die Addition hervorgebracht werden kann. „Eine jede Zahl n lässt sich auf so viele Arten in r gleiche oder ungleiche Teile teilen, als die Zahl $n-r$ aus den Zahlen 1, 2, 3, . . . , r durch die Addition hervorgebracht werden kann." U. s. w.

9) Wenn man in der Gleichung

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots=1+\frac{x}{1-x}z+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2$$
$$+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\ldots \tag{a}$$

$z=1$ setzt, so wird der Coefficient von x^n auf der rechten Seite $=\Sigma_r k_{n,r}$, d. i. die Anzahl der Combinationen z. S. n ohne Wiederholung. Wegen

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ .\ .\ . = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ .\ .\ .}{(1-x\ )(1-x^2)(1-x^3)\ .\ .\ .}$$

$$= k_0+k_1x+k_2x^2+\ .\ .\ .\ )(1-x^{2.1}-x^{2.2}+x^{2.5}+x^{2.7}-\ .\ .\ .\ )$$

ist also

$$\Sigma_r k_{n,r} = k_n - k_{n-2} - k_{n-4} + k_{n-10} + k_{n-14} - k_{n-24} - k_{n-30} + \ .\ .\ .$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung der Anzahl der Combinationen z. S. n ohne Wiederholung.

Setzt man dagegen in (a)

$$z = -1$$

so wird

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-\ .\ .\ . = 1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}-\ .\ .\ .$$

Hieraus folgt, dass die Summe

$$\Sigma_r(-1)^r k_{n,r} = -k_{n,1}+k_{n,2}-k_{n,3}+k_{n,4}-\ .\ .\ .$$

den Wert 1 oder -1 oder 0 hat, je nachdem $24n+1$ auf die Form $(12x\pm1)^2$ oder auf die Form $(12x\pm5)^2$ oder auf keine von diesen beiden Formen sich bringen lässt.

Wenn man die Gleichung (a) nach z logarithmisch differentiirt, so erhält man

$$\frac{x}{1+xz}+\frac{x^2}{1+x^2z}+\frac{x^3}{1+x^3z}+\ldots=$$

$$\frac{\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)}z+\dfrac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^2+\ \ldots}{1+\dfrac{x}{1-x}z+\dfrac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\dfrac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\ \ldots} \qquad \text{(b)}$$

Setzt man hier

$$z = -1$$

und berücksichtigt, dass

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ .\ .\ . = \sigma_1x+\sigma_2x^2+\sigma_3x^3+\ .\ .\ .$$

$$1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}-\ .\ .\ . = 1-x-x^2+x^5+x^7-\ .\ .\ .$$

so ergiebt sich

$$k_{n,1} - 2k_{n,2} + 3k_{n,3} - 4k_{n,4} + \ldots$$
$$= \Sigma_r (-1)^{r-1} r\, k_{n,r} = \sigma_n - \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2} + \sigma_{n-5} + \sigma_{n-7} - \ldots$$

Diese Gleichung könnte zur recursiven Berechnung von σ_h dienen.

Man überzeugt sich leicht, dass

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \ldots = \sigma_1' x + \sigma_2' x^2 + \sigma_3' x^3 + \ldots$$

wobei

$$\sigma_h' = (-\lambda+1)(\alpha+1)(\beta+1) \ldots$$

wenn

$$h = 2^\lambda a^\alpha b^\beta$$

and a, b . . . die verschiedenen in h aufgehenden Primzahlen sind. Insbesondere ist

$$\sigma_{2h+1}' = h_{2h+1} \quad \text{und} \quad \sigma_{2(2h+1)}' = 0$$

Wenn man also in der Gleichung (b)

$$z = 1$$

setzt, so erhält man

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \ldots$$
$$= (1 + x \,.\, \Sigma k_{1,r} + x^2 \,.\, \Sigma k_{2,r} + x^3 \,.\, \Sigma k_{3,r} + \ldots)$$
$$\times (\sigma_1' x + \sigma_2' x^2 + \sigma_3' x^3 + \ldots)$$

folglich ist

$$\Sigma_r r\, k_{n,r} = \sigma_n' + \sigma_{n-1}' \,.\, \Sigma k_{1,r} + \sigma_{n-2}' \,.\, \Sigma k_{2,r} + \sigma_{n-3}' \,.\, \Sigma k_{3,r} + \ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} k_h (\sigma_{n-h}' - \sigma_{n-h-2}' - \sigma_{n-h-4}' + \sigma_{n-h-10}' + \sigma_{n-h-14} - \ldots)$$

10) Da $k_{n,r}$ der Coefficient von x^a in der Entwicklung von

$$\frac{x^{\binom{r+1}{r}}}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^r)}$$
$$= (x + x^2 + x^3 + \ldots)(x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)$$
$$\ldots (x^r + x^{2r} + x^{3r} + \ldots)$$

so ist $k_{n,r}$ nicht bloss die Anzahl der r zahligen Combinationen z.

S. n **ohne Wiederholung** und die der r zahligen Combinationen z. S. $n^1 = n - \binom{r}{2}$ **mit Wiederholung**, sondern auch die **Anzahl** jener r **zahligen Combinationen** z. S. n, von denen jede einzelne die Eigenschaft hat, dass ihr erstes Element durch 1, ihr zweites durch 2, ihr drittes durch 3, u. s. w. teilbar ist. Von den letztgenannten Combinationen müssen jedoch nicht alle materiell verschieden sein; so sind z. B. unter der 5 dreizahligen Combinationen dieser Art z S. 11 die 3 materiell nicht verschiedenen 263, 326, 623.

Die Summe **aller** Elemente von allen r zahligen Combinationen dieser **Art** z. S. n ist $k_{n,r}$. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Summe der h ten Elemente allein zu finden. Dieselbe ist augenscheinlich der Coefficient von x^n in dem Producte

$$(x+x^2+x^3+\dots)\dots(x^{h-1}+x^{2(h-1)}+\dots)(hx^h+2hx^{2h}+3hx^{3h}+\dots)$$
$$\times(x^{h+1}+h^{2(h+1)}+\dots)\dots(x^r+x^{2r}+x^{3r}+\dots)$$
$$=\frac{x}{1-x}\dots\frac{x^{h-1}}{1-x^{h-1}}\cdot\frac{hx^h}{(1-x^h)^2}\cdot\frac{x^{h+1}}{1-x^{h+1}}\dots\frac{x^r}{1-x^r}$$
$$=\frac{x^{\binom{r+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}h(1+x^h+x^{2h}+\dots)$$
$$=h(k_{1,r}x+k_{2,r}x^2+k_{3,r}x^3\dots)(1+x^h+x^{2h}+\dots)$$

also $h(k_{n,r}+k_{n-h,r}+k_{n-2h,r}+\dots)$. Folglich ist die Summe **aller** Elemente

$$\begin{aligned}nk_{n,r} = &(k_{n,r}+k_{n-1,r}+k_{n-2,r}+\dots)\\ &+2(k_{n,r}+k_{n-2,r}+k_{n-4,r}+\dots)\\ &+\dots\dots\dots\dots\\ &+r(k_{n,r}+k_{n-r,r}+k_{n-2r,r}+\dots)\end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}\left[n-\binom{r+1}{2}\right]k_{n,r} = &(k_{n-1,r}+k_{n-2,r}+k_{n-3,r}+\dots)\\ &+2(k_{n-2,r}+k_{n-4,r}+k_{n-6,r}+\dots)\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &+r(k_{n-r,r}+k_{n-2r,r}+k_{n-3r,r}+\dots)\end{aligned}$$

Ein specieller Fall dieser Gleichung ist die schon früher gefundene

$$nk_n = S_1 k_{n-1} + S_2 k_{n-2} + S_3 k_{n-3} + \ldots$$

11) Wenn man in der Gleichung

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots} = 1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \ldots \quad \text{(c)}$$

$z = 1$ setzt, so erhält man

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots = 1 + x\,.\,\Sigma K_{1,r} + x^2\,.\,\Sigma K_{2,r} + \ldots$$

$$\Sigma_r K_{n,r} = k_n$$

Setzt man hingegen $z = -1$, so wird

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots}$$
$$= 1 + x\,.\,\Sigma(-1)^r K_{1,r} + x^2\,.\,\Sigma(-1)^r K_{2,r} + \ldots$$

demnach ist $\Sigma_r(-1)^r K_{n,r}$ der Coefficient von x^n in der Entwicklung des Productes $(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots$

Wenn man die Gleichung (c) nach z logarithmisch differentiirt, so erhält man

$$\frac{x}{1-xz} + \frac{x^2}{1-x^2z} + \frac{x^3}{1-x^3z} + \ldots$$

$$= \frac{\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)(1-x^2)}z + \frac{3x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^2 + \ldots}{1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \ldots} \quad \ldots \text{(d)}$$

Setzt man hier $z = 1$, so wird

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{3x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \ldots$$
$$= (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots)(\sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \sigma_3 x^3 + \ldots)$$
$$= A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

$$\Sigma_r r K_{n,r} = A_n$$

wo A_n wie früher die Anzahl der in den Combinationen zur Summe n auftretenden Zahlen bedeutet.

Diese drei die Grössen $K_{n,r}$ betreffenden Sätze ergeben sich auch unmittelbar, wenn man erwägt, dass $K_{n,r}$ die Anzahl der r zahligen Combinationen z. S. n bedeutet.

Setzt man in (d)

$$z = -1$$

so erhält man

$$(1 + x . \Sigma(-1)^r K_{1,r} + x_2 . \Sigma(-1)^r K_{2,r} + \dots)(\sigma_1' x + \sigma_2' x^2 + \dots)$$
$$= x . \Sigma(-1)^{r+1} r K_{1,r} + x^2 . \Sigma(-1)^{r+1} r K_{2,r} + \dots$$

$$\Sigma_r (-1)^{r+1} r K_{n,r} = \sigma_n' + \sigma_{n-1}' . \Sigma(-1)^r K_{1,r} + \sigma_{n-2}' . \Sigma(-1)^r K_{2,r} + \dots$$

wo $\Sigma_r(-1)^{k+1} r K_{n,r}$ die Differenz der Anzahlen der in den ungerad- und geradzahligen Combinationen z. S. na auftretenden Zahlen bedeutet.

XIII.

Lösung des Problems über den Schnitt von Curven 2ter Ordnung.

Reduction einiger Aufgaben auf die Lösung dieses Problems.

Von

Carl Laab.

In der nachfolgenden Abhandlung habe ich es mir zur Aufgabe gemacht eine graphische genaue Lösung, d. h. eine Lösung mit Cirkel und Lineal, von Curven 2ter Ordnung in allgemeiner Lage durchzuführen. Nach der analytischen Berechnung stossen wir bei der Lösung dieses Problems auf eine Gleichung 3ten oder 4ten Grades, -- ausgenommen, es sind die zu untersuchenden Curven in einer derartigen gegenseitigen Lage, dass die analytische Berechnung eine Gleichung 2ten oder 4ten Grades, welch' letztere sich jedoch auf eine Gleichung 2ten Grades zurückführen lässt, ergiebt. — Es erscheint daher die graphische genaue Lösung dieses Problems nicht leicht denkbar und dennoch eröffnet uns die Lösung dieses Problems eine Unzahl Aufgaben, die gelöst werden können, trotzdem sie, analytisch berechnet, eine Gleichung höheren Grades geben. Sie lassen sich nämlich auf den Schnitt von Curven 2ter Ordnung zurückführen. Im Anschlusse an diese Abhandlung will ich einige solcher Aufgaben lösen und zwar:

1. Die Dreiteilung des Winkels.

2. Aus dem Ausdrucke

$$x = \sqrt[3]{abc}$$

das x construiren.

3. Eine allgemeine, erweiterte Lösung des Berührungsproblems von Apollonius und Pappus.

Bevor ich zur Lösung des Problems über den Schnitt von Curven 2ter Ordnung übergehe, will ich einige Sätze vor Augen führen, die zum Teil bekannt sind, auf die ich zum andern Teil gekommen bin. —

I. Nach Desargues ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Curven 2ter Ordnung, welche durch 4 gemeinsame Punkte gehen, wieder eine Curve 2ter Ordnung. Wir wollen diese Curve Mittelpunktscurve nennen.

Dieser Satz ist allgemein bekannt, ich brauche ihn daher nicht erst zu beweisen.

Ich will jedoch an dieser Stelle einige allgemeine Bezeichnungen durch Buchstaben erklären, an die ich mich in der ganzen Abhandlung halten will, die dazu dienen, um mich klar und schnell verständlich zu machen.

$U = 0$ sei das Symbol der Gleichung einer Curve, wobei jedesmal unter U zu verstehen ist:

$$U \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

oder

$$2U \equiv gx + hy + i = 0$$

wenn wir uns unter

$$g = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})$$
$$h = 2(a_{12}x + a_{22}y + a_{23})$$
$$i = 2(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}) \quad \text{vorstellen.}$$

Ferner sei:

$$\text{Determinante } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{Discriminante der Curve } U = 0$$

$$\text{Determinante } A_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Gleichung der Polare zu dem Punkte $x_1 \mid y_1$ in Bezug auf die Curve $U = 0$ lautet:

$$g_1 x + h_1 y + i_1 = 0$$

wobei g_1, h_1, i_1 dieselben Gleichungen haben wie g, h, i, nur sind statt der veränderlichen Coordinaten $x \mid y$, die Coordinaten $x_1 \mid y_1$ zu setzen.

Da die unendlich ferne Gerade die Polare des Mittelpunktes der Curve $U = 0$ ist, so lautet ihre Gleichung:

$$g_1 = h_1 = 0$$

und es ist der Mittelpunkt $x_1 \mid y_1$ der Curve gegeben durch die Auflösung der Gleichungen:

$$g_1 \equiv 2(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) = 0$$
$$h_1 \equiv 2(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) = 0$$

daher:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Sind

$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = 0$$

die Gleichungen zweier Curven, welche durch 4 gemeinsame Punkte gehen, so ist:

$$U_1 - \lambda U_2 = 0$$

ebenfalls die Gleichung einer Curve, welche durch dieselben 4 Punkte geht, und je nach der Verschiedenheit von λ auch verschieden ist.

Selbstverständlich setze ich in der ganzen Abhandlung rechtwinkelige Punktcoördinaten voraus.

II. Die Schnittpunkte zweier gleichartiger, gemeinschaftlicher Tangenten an 2 gegebene Curven 2ter Ordnung liegen in der Mittelpunktscurve.

Es sei in Fig. I. (siehe Tabelle), die Curve

$$U' - \lambda_1 U'' = 0$$

die Gleichung der einen Curve mit dem Mittelpunkt O_1 und

$$U' - \lambda_2 U'' = 0$$

die Gleichung der andern Curve mit dem Mittelpunkte O_2, ferner u die Mittelpunktscurve und L_1, L_2, L_3, L_4 je 2 Tangenten an die Curven, welche sich in den Punkten M_1, M_2 der Mittelpunktscurve schneiden.

Es ist die Gleichung der Curve

$$U' - \lambda_1 U'' \equiv (g' - \lambda_1 g'')x + (h' - \lambda_1 h'')y + (i' - \lambda_1 i'') = 0$$

nach dem früher Gesagten. Daher die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Curve:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda_1 a_{22}'') \\ (a_{13}' - \lambda_1 a_{13}'') & (a_{23}' - \lambda_1 a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda_1 a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda_1 a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

und

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (a_{13}' - \lambda_1 a_{13}'') & (a_{23}' - \lambda_1 a_{23}'') \\ (a_{11}' - \lambda_1 a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda_1 a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda_1 a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Die Gleichungen der Tangenten L_3 und L_4 sind:

$$L_3 \equiv (g_1' - \lambda_1 g_1'')x + (h_1' - \lambda_1 h_1'')y + (i_1' - \lambda_1 i_1'') = 0$$
$$L_4 \equiv (g_2' - \lambda_1 g_2'')x + (h_2' - \lambda_1 h_2'')y + (i_2' - \lambda_1 i_2'') = 0$$

wobei in g_1'. g_1'', g_2', g_2'' statt der Veränderlichen $x \mid y$ die Coordinaten der Berührungspunkte 1 und 2 der Tangenten L_3 und L_4 einzusetzen sind.

Die Coordinaten des Schnittpunktes M_1 von den Tangenten L_3 und L_4 sind daher:

$$a)\quad x = \frac{\begin{vmatrix} (h_1' - \lambda_1 h_1'') & (i_1' - \lambda_1 i_1'') \\ (h_2' - \lambda_1 h_2'') & (i_2' - \lambda_1 i_2'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (g_1' - \lambda_1 g_1'') & (h_1' - \lambda_1 h_1'') \\ (g_2' - \lambda_1 g_2'') & (h_2' - \lambda_1 h_2'') \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (i_1' - \lambda_1 i_1'') & (g_1' - \lambda_1 g_1'') \\ (i_2' - \lambda_1 i_2'') & (g_2' - \lambda_1 g_2'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (g_1' - \lambda_1 g_1'') & (h_1' - \lambda_1 h_1'') \\ (g_2' - \lambda_1 g_2'') & (h_2' - \lambda_1 h_2'') \end{vmatrix}}$$

Nun ist aber M_1 ebenfalls der Mittelpunkt irgend einer Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von

$$U' - \lambda_1 U'' = 0 \quad \text{und} \quad U' - \lambda_2 U'' = 0$$

geht.

Ich kann annehmen, dass M_6 der Mittelpunkt der Curve $U = 0$ und M_2 der Mittelpunkt der Curve $U'' = 0$ sei, daher sind die Coordinaten von M_1:

$$\beta)\quad x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12}' & a_{13}' \\ a_{22}' & a_{23}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{13}' & a_{11}' \\ a_{23}' & a_{12}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix}}$$

die Coordinaten des Punktes M_2:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12}'' & a_{13}'' \\ a_{22}'' & a_{23}'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{13}'' & a_{61}'' \\ a_{23}'' & a_{12}'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' \end{vmatrix}}.$$

Da in den Gleichungen α) und β) die Coordinaten dieselben sind, so können sich die einzelnen Glieder der Determinanten in α) von denen in β) nur durch einen Factor z. B. ϱ unterscheiden.

Es ist daher

$$\begin{aligned} (h_1' - \lambda_1 h_1'') &= \varrho . a_{12}' & \quad (i_2' - \lambda_1 i_2'') &= \varrho . a_{23}' \\ (h_2' - \lambda_1 h_2'') &= \varrho . a_{22}' & \quad (g_1' - \lambda_1 g_1'') &= \varrho . a_{11}' \\ (i_1' - \lambda_1 i_1'') &= \varrho . a_{13}' & \quad (g_2' - \lambda_1 g_2'') &= \varrho . a_{12}' \end{aligned}$$

Nach diesem lassen sich die Gleichungen der Tangenten L_1, L_2, L_3, L_4, wie folgt, aufschreiben:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv a_{11}''x + a_{12}''y + a_{13}'' = 0 \\ L_2 &\equiv a_{12}''x + a_{22}''y + a_{23}'' = 0 \\ L_3 &\equiv a_{11}'x + a_{12}'y + a_{13}' = 0 \\ L_4 &\equiv a_{12}'x + a_{22}'y + a_{23}' = 0 \end{aligned}$$

Sollen die Tangenten an beide Curven

$$U' - \lambda_1 U'' = 0 \quad \text{und} \quad U' - \lambda_2 U'' = 0$$

gemeinschaftlich sein, so muss L_1 mit L_3 und L_2 mit L_4 zusammenfallen. Es kann sich daher L_1 von L_3, ferner L_2 von L_4 nur durch einen Factor z. B. μ unterscheiden. Es treten daher folgende Gleichungen in Kraft:

$$\begin{aligned} L_1 - \mu L_3 &= 0 \\ L_2 - \mu L_4 &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (a_{11}' - \mu a_{11}'')x + (a_{12}' - \mu a_{12}'')y + (a_{13}' - \mu a_{13}'') &= 0 \\ (a_{12}' - \mu a_{12}'')x + (a_{22}' - \mu a_{22}'')y + (a_{23}' - \mu a_{23}'') &= 0 \end{aligned}$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes dieser beiden gemeinschaftlichen Tangenten lauten

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \mu a_{12}'') & (a_{22}' - \mu a_{22}'') \\ (a_{23}' - \mu a_{13}'') & (a_{23}' - \mu a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \mu a_{11}'') & (a_{12}' - \mu a_{12}'') \\ (a_{12}' - \mu a_{12}'') & (a_{22}' - \mu a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (a_{13}' - \mu a_{13}'') & (a_{23}' - \mu a_{23}'') \\ (a_{11}' - \mu a_{11}'') & (a_{12}' - \mu a_{12}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \mu a_{11}'') & (a_{12}' - \mu a_{12}'') \\ (a_{12}' - \mu a_{12}'') & (a_{22}' - \mu a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Und diese sind nichts anders als die Mittelpunktscoordinaten der Curve:

$$(g' - \mu g'')x + (h' - \mu h'')y + (i' - \mu i'') = 0$$

Diese Gleichung stellt uns eine Curve dar, die durch die 4 gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Curven

$$U' = 0 \quad \text{und} \quad U'' = 0$$

geht. Daher muss ihr Mittelpunkt in der Mittelpunktscurve u **liegen. Weil derselbe mit dem Schnittpunkte der beiden gemeinschaftlichen Tangenten an beide Curven identisch ist, so ist der Satz bewiesen.**

III. Zieht man zu einem gegebenen Punkte die Polaren in Bezug auf alle Curven, welche durch 4 gemeinschaftliche Punkte gehen, so schneiden sich dieselben in ein und demselben Punkte.

Es seien

$$U' = 0, \quad U'' = 0, \quad U''' \equiv U' - \lambda U'' = 0$$

die Gleichungen dreier Curven, welche durch 4 gemeinschaftliche Punkte gehen, ferner P_0 **von den Coordinaten** $x_0 \mid y_0$ **der gegebene Punkt,** p', p'', p''' **die Polaren dieses Punktes in Bezug auf die Curven**

$$U' = 0, \quad U'' = 0, \quad U''' = 0$$

so ist:

$$2U' \equiv g'x + h'y + i' = 0$$
$$2U'' \equiv g''x + h''y + i'' = 0$$
$$2U''' \equiv 2(U' - \lambda U'') \equiv (g' - \lambda g'')x + (h' - \lambda h'')y + (i' - \lambda i'') = 0$$

$$p' \equiv g_0'x + h_0'y + i_0' = 0$$
$$p'' \equiv g_0''x + h_0''y + i_0'' = 0$$
$$p''' \equiv (g' - \lambda g'')x_0 + (h' - \lambda h'')y_0 + (i' - \lambda i'') = 0$$
$$p''' \equiv (g'x_0 + h'y_0 + i') - \lambda(g''x_0 + h''y_0 + i'') = 0$$

wobei g_0', h_0', i_0', g_0'', h_0'', i_0'' **dieselbe Bedeutung haben, wie** g', h',

i', g'', h'', i'', nur sind statt der variablen Grössen $x \mid y$, die Coordinaten $x_0 \mid y_0$ des Punktes P_0 eingesetzt.

Durch Vertauschung der Indices:

$$p''' \equiv g_0'x + h_0'y + i_0' - \lambda(g_0''x + h_0''y + i_0'') = 0$$
$$p''' \equiv p' - \lambda p'' = 0$$

Diese Gldichung stellt ein Strahlenbüschel dar, daher der Satz bewiesen ist.

IV. Zieht man an 2 gegebene Curven 2ter Ordnung 2 gleichartige, gemeinschaftliche Tangenten und verbindet man die zu einer Curve gehörigen Berührungspunkte mittelst Geraden, so geht durch den Schnittpunkt derselben die Verbindungsgerade zweier gemeinschaftlichen Schnittpunkte dieser Curven.

Bezeichnen wir in Fig. II. der Tabelle die Schnittpunkte der 3 Geraden L_1, L_2, L_3 untereinander mit den Ziffern 1, 4, 7, ferner die Schnittpunkte derselben Geraden mit der Curve mit den Ziffern 2, 3, 5, 6, 8, 9, dann zur Vereinfachung des Beweises das Verhältniss der Strecke $\overline{12}$ zur Strecke $\overline{42}$ mit dem Symbol (142), weiter das Verhältniss von $\overline{13}$ zu $\overline{43}$ mit (143) also:

$$\frac{\overline{12}}{\overline{42}} = (142) \qquad \frac{\overline{13}}{\overline{43}} = (143) \quad \text{u. s. w.}$$

so ist nach Carnot:

$$(142).(143).(475).(476).(718).(719) = 1$$

Bedeuten in Fig. III der Tabelle L_1 und L_2 die gemeinschaftlichen Tangenten an die Curen U' und U'', ferner die Punkte 2, 7, 8, 9 die Berührungspunkte derselben, die Punkte 4 und 5 die Schnittpunkte der beiden Curven, dann die Punkte 3 und 6 die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden von 4 und 5 mit den Tangenten L_1 und L_2, und bezeichnen wir wie früher mit dem Symbol z. B. (132) das Verhältniss der Strecke $\overline{12}$ zur Strecke $\overline{32}$, so haben nach der Relation von Carnot folgende Gleichungen Giltigkeit:

$$(132).(132).(364).(365).(617).(617) = 1$$
$$(138).(138).(364).(365).(619).(619) = 1$$

durch Division:

$$[(132)]^2.[(617)]^2 = [(138)]^2.[(619)]^2$$

oder

$$(132).(617) = (138).(619)$$

daher:

$$\frac{(132)}{(138)} = \frac{(619)}{(617)}$$

Daraus ersieht man, dass die Doppelverhältnisse der Punkte 1, 2, 3, 8, und der Punkte 1, 7, 6, 9 einander gleich sind, woraus erhellt, dass die Strahlen, welche durch die Punkte 7, 2, ferner durch 4, 5, und durch 8, 9 gehen, sich in einem Punkte schneiden müssen.

V. Zieht man von Punkten einer Geraden die Polaren in Bezug auf 2 gegebene Curven, so liegen die Schnittpunkte dieser, je 2 zusammengehörigen Polaren, wieder in einer Geraden. Durch diese Schnittpunkte gehen selbstverständlich nach Satz III. auch die zu den Punkten der Geraden gehörigen Polaren aller Curven, welche durch die 4 Schnittpunkte der gegebenen Curven gehen.

Es wären 2 Curven U', U'' und eine Gerade L gegeben. Wir nehmen 3 Punkte P_1, P_2, P_3 in dieser Geraden an. Die zu den Punkten gehörigen Polaren in Bezug auf die Curven U' und U'' bezeichnen wir mit p_1', p_2', p_3' und p_1'', p_2'', p_3''. Die Coordinaten der Punkte P_1 seien x_1, y_1, von P_2, x_2, y_2, von P_3, x_3, y_3.

Da P_3 auf der Verbindungsgeraden von P_1 und P_2 liegt, so unterliegen seine Coordinaten folgender Relation:

$$x_3 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad y_2 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$$

wobei λ ein veränderlicher Parameter ist.

Es ist

$$p_3' \equiv g' x_3 + h' y_3 + i' = 0$$
$$p_3'' \equiv g'' x_3 + h'' y_3 + i'' = 0$$

Für x_2 und y_3 die oben gefundenen Werte eingesetzt:

$$p_3' \equiv g' \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} + h' \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} + i' = 0$$
$$p_3' \equiv g'(x_1 - \lambda x_2) + h'(y_1 - \lambda y_2) + i'(1-\lambda) = 0$$
$$p_3' \equiv g'x_1 + h'y_1 + i' - \lambda(g'x_2 + h'y_2 + i') = 0$$
$$p_3' \equiv g_1'x + h_1'y + i_1' - \lambda(g_2'x + h_2'y + i_2') = 0$$
$$p_3' \equiv (g_1' - \lambda g_2')x + (h_1 - \lambda h'_2)y + (i_1' - \lambda i_2') = 0$$

$$p_3'' \equiv g'' \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} + h'' \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} + i'' = 0$$

$$p_3'' \equiv g_0''(x_1 - \lambda x_2) + h_0''(y_1 - \lambda y_2) + i''(1-\lambda) = 0$$

$$p_3'' \equiv g''x_1 + h''y_1 + i'' - \lambda(g''x_2 + h''y_2 + i'') = 0$$

$$p_3'' \equiv g_1''x + h_1''y + i_1'' - \lambda(g_2''x + h_2''y + i_2'') = 0$$

$$p_3'' \equiv (g_1'' - \lambda g_2'')x + (h_1'' - \lambda h_2'')y + (i_1'' - \lambda i_2'') = 0$$

Die Gleichung einer Geraden M, welche durch den Schnittpunkt von p_3' und p_3'' hindurchgeht, lautet:

$$M \equiv p_3' - \varrho p_3'' = 0$$

wobei ϱ ein veränderlicher Parameter ist.

Die Werte für p_3' und p_3'' in diese Gleichung eingesetzt ergeben:

$$M \equiv (g_1' - \lambda g_2')x + (h_1' - \lambda h_2')y + (i_1' - \lambda i_2') - \varrho[(g_1'' - \lambda g_2'')x + (h_1'' - \lambda h_2'')y + (i_1'' - \lambda i_2'')] = 0$$

$$M \equiv [(g_1' - \lambda g_2') - \varrho(g_1'' - \lambda g_2'')]x + [(h_1' - \lambda h_2') - \varrho(h_1'' - \lambda h_2'')]y + [(i_1' - \lambda i_2') - \varrho(i_1'' - \lambda i_2'')] = 0$$

$$M \equiv [g_1' - \lambda g_2' - \varrho g_1'' + \varrho\lambda g_2'']x + [h_1' - \lambda h_2 - \varrho h_1'' + \varrho\lambda h_2'']y + [i_1' - \lambda i_2' - \varrho i_1'' + \varrho\lambda i_1''] = 0$$

$$M \equiv [(g_1' - \varrho g_1'') - \lambda(g_2' - \varrho g_2'')]x + [(h_1' - \varrho h_1'') - \lambda(h_2' - \varrho h_2'')]y + [(i_1' - \varrho i_1'') - \lambda(x_2' - \varrho i_2'')] = 0$$

$$M \equiv (g_1' - \varrho g_1'')x + (h_1' - \varrho h_1'')y + (i_1' - \varrho i_1'') - \lambda[(g_2' - \varrho g_2'')x + (h_2' - \varrho h_2'')y + (i_2' - \varrho i_2'')] = 0$$

Nun ist aber

$$p_1' \equiv g_1'x + h_1'y + i_1' = 0$$

$$p_1'' \equiv g_1''x + h_1''y + i_1'' = 0$$

$$p_1' - \varrho p_1'' \equiv (g_1' - \varrho g_1'')x + (h_1' - \varrho h_1'')y + (i_1' - \varrho i_1'') = 0$$

$$p_2' \equiv g_2'x + h_2'y + i_2' = 0$$

$$p_2'' \equiv g_2''x + h_2''y + i_2'' = 0$$

$$p_2' - \varrho p_2'' \equiv (g_2' - \varrho g_2'')x + (h_2' - \varrho h_2'')y + (i_3' - \varrho i_2'') = 0$$

Diese Werte in die obere Gleichung eingesetzt, ergeben:

$$M \equiv (p_1' - \varrho p_1'') - \lambda(p_2' - \varrho p_2'') = 0$$

Da sich in dieser Gleichung die Gerade $(p_1' - \varrho p_1'')$, welche durch den Schnittpunkt von p_1' und p_1'' hindurchgeht, von der

Geraden $(p_2' - \varrho p_2'')$ welche durch den Schnittpunkt von p_2' und p_2'' hindurchgeht nur durch den Factor λ von einander unterscheidet, so können die Geraden $(p_1'-\varrho p_1'')$ und $(p_2'-\varrho p_2'')$ nur entweder parallel sein oder sie müssen zusammenfallen. Der erste Fall ist nicht möglich, da beide Gerade laut Annahme der Geraden M durch den Schnittpunkt von p_3' und p_3'' hindurchgehen müssen. Infolgedessen muss der zweite Fall eintreten, die Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen in einer Geraden laut Annahme, die Schnittpunkte der zusammengehörigen Polaren nach eben erbrachten Beweise ebenfalls.

Schnitt zweier Curven.

Es wären in Fig. IV. die beiden Curven U' (Kreis) und U'' (Hyperbel) gegeben mit ihren Mittelpunkten O' und O''. Die Schnittpunkte dieser beiden Curven wären zu suchen.

Indem ich die früher ausgesprochenen Sätze ins Auge fasse, nehme ich einen Punkt der Mittelpunktscurve an, hier am besten den Punkt O' (sonst müsste ich mir einen Punkt der Mittnlpunkts curve errechnen, was sehr leicht geschieht, wie später gezeigt wird).

Von diesem Punkte O' ziehe ich mir an die Hyperbel die Tangenten T_1 und T_2, welche dieselbe in den Punkten 1 und 2 berühren. Nun brauche ich die Berührungspunkte jener Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U' und U'' hindurchgehen und die Geraden T_1 und T_2 berührt. Diese Forderung ist möglich und zwar nach dem Satze Nr. III. und deshalb, weil jede Curve 2ter Ordnung durch 5 Stücke vollkommen bestimmt ist.

Ich finde diesen Berührungspunkt folgendermassen.

Ich ziehe vom Punkte 1 die Polare in Bezug auf den Kreis U'; wo diese Polare die Tangente T_1 schneidet, also im Punkte I., liegt der Berührungspunkt der geforderten Curve.

Die Begründung hiefür liegt im Folgenden. Es ist

$$T_1 \equiv g_1''x + h_1 y + i_1''$$
$$p_1' \equiv g_1'x + h_1'y + i_1'$$

wenn der Pol von T_1, also der Punkt 1, die Coordinaten $x_1 y_1$ hat

$$T_1 - \lambda p_1' \equiv (g_1'' - \lambda g_1')x + (h_1'' - \lambda h_1')y + (i_1'' - \lambda i_1') = 0$$

$(T_1 - \lambda p_1')$ ist aber die Polare des Punktes 1 in Bezug auf die Curve $(U' - \lambda U'')$. Da aber der Punkt 1 in der Polare T_1 des

des Punktes I. in Bezug auf die Curve $(U' - \lambda U'')$ liegt, so muss die Polare des Punktes 1 in Bezug auf die Curve $(U' - \lambda U'')$, also $(T_1 - \lambda p_1')$, durch den Berührungspunkt der zu suchenden Curve gehen. Nun ist aber $(T_1 - \lambda p_1')$ nichts anderes als das Symbol einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt von T_1 und p_1' hindurch geht, also durch den Punkt I., daher I. der Berührungspunkt der zu suchenden Curve.

Mit dem Punkte 2 mache ich dasselbe und bekomme durch den Schnitt von p_2' und T_2 den Berührungspunkt der zu suchenden Curve also II.

Durch den Schnitt der Verbindungslinien von den Punkten 1 und 2, sowie von I. und II. bekomme ich nach dem Satze Nr. IV. den Punkt A, ein Punkt jener Geraden, welche durch 2 gemeinschaftliche Schnittpunkte der Curven U' und U'' hindurch geht.

Es handelt sich nun darum einen 2ten Punkt der Geraden zu bekommen.

Dies geschieht dadurch, dass ich mir zum Punkte O'' die Polare P in Bezug auf den Kreis U' construire, sodann mache ich Anwendung vom Satze Nr. V., — da ich keine Tangenten ziehen, somit auch nicht deren Berührungspunkte in der Polaren P finden kann — und nehme mir 2 beliebige Punkte in der Polaren P an, also 3 und 4; zu diesen Punkten ziehe ich mir die Polaren in Bezug auf die Curven U' und U''; ich nenne diese Polaren p_3', p_3'', p_4', p_4''. Der Schnittpunkt von p_3' und p_3'' ist N, der von p_4' und p_4'' ist M. Die Verbindungsgerade von M und N schneidet die Polare P im Punkte B, welcher ein zweiter Punkt jener Geraden ist, welche durch 2 Schnittpunkte der Curven U' und U'' hindurch geht. Die Verbindung von A und B geht durch 2 Schnittpunkte der Curven U' und U''.

Natürlich muss man bei einer derartigen Lage der Curven gleich vom Anfang so construiren, dass man 2 gleichnamige Punkte A und B erhält, d. h. dass die Punkte A und B für ein und dieselben 2 Schnittpunkte der Curven U' und U'' erhalten sind. Dies wird aber durch die soeben dargestellte Construction kaum, d. h. bei dieser speciellen Lage der Curven gar nicht möglich sein, weil die Construction des Punktes O'' und der Polaren P für die Schnittpunkte des linken Hyperbelastes, während die Construction des Punktes A für die beiden Schnittpunkte der rechten Hyperbelastes giltig sind.

Man wird daher zur Construction des Punktes B ein anderes Verfahren einschlagen

Man construirt sich einen günstigen Punkt der Mittelpunktscurve und verfährt dann gerade so, wie mit der Construction vom Punkte O'' aus, u. s. w.

Die Construction des Punktes der Mittelpunktscurve oder der Mittelpunktscurve selbst, kann im vorliegenden, sowie in allen ähnlichen Fällen durch Rechnung sehr leicht gefunden werden und zwar:

Es sei die Gleichung der Hyperbel

$$U'' \equiv 2xy + x_1 y - xy_1 = 0$$

wobei x, y die Variablen und x_1, y_1 zwei beliebige Constanten bedeuten, und die Gleichung des Kreises

$$U' \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

wobei x, y die Variablen und r den Radius des Kreises bedeutet.

Um nun einen Punkt der Mittelpunktscurve zu rechnen, brauche ich nur

$$g_x = h_x = 0$$

zu setzen, wobei g_x und h_x die schon anfangs erwähnte Bedeutung haben; daraus rechnet man die Variabeln x und y und hat schon die Coordinaten für einen Punkt der Mittelpunktscurve.

Für den Mittelpunkt einer Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U' und U'' hindurchgeht, also für die Curve $(U' - \lambda U'')$, ist:

$$g \equiv (g' - \lambda g'') \equiv (a_{11}' - \lambda a_{11}'')x + (a_{12}' - \lambda a_{12}'')y + (a_{13}' - \lambda a_{13}'') = 0$$
$$h \equiv (h' - \lambda h'') \equiv (a_{12}' - \lambda a_{12}'')x + (a_{22}' - \lambda a_{22}'')y + (a_{23}' - \lambda a_{23}'') = 0$$

$$U' \; . \; . \; . \; a_{11}' = a_{22}' = a_{33}' = 0 \quad a_{12}' = 1$$
$$a_{13}' = -\frac{y_1}{2}, \quad a_{23}' = +\frac{x_1}{2}$$

$$U'' \; . \; . \; . \; a_{12}'' = a_{13}'' = a_{23}'' = 0 \quad a_{11}'' = 1, \quad a_{22}'' = 1$$
$$a_{33}'' = -r^2$$

λ kann verschiedene Werte annehmen. Ich nehme hier $\lambda = 1$ an, somit ist

$$g \equiv 2x - 2y + y_1 = 0$$
$$h \equiv 2x - 2y + x_1 = 0$$

Diese beiden Geraden sind parallel, haben daher ihren Schnittpunkt im Unendlichen; wir haben es daher mit dem unendlich fernen

Punkte der Mittelpunktscurve zu tun, und es ist die Richtung dieser beiden Geraden auch gleichzeitig die Richtung der Asymptote.

Setzen wir $\lambda = 2$, so ergiebt sich:

$$g \equiv 4x - 2y + y_1 = 0$$
$$h \equiv 2x - 4y + x_1 = 0$$

daraus folgt

$$x = \frac{2y_1 - x_1}{6}, \quad y = \frac{2x_1 - y_1}{6}$$

als Coordinaten eines Punktes der Mittelpunktscurve. Von diesem Punkte aus wird nun die Construction, wie schon früher erwähnt, durchgeführt.

Es ist interessant, die Lage der Mittelpunktscurve selbst zu kennen, weil man aus derselben verschiedene Schlüsse machen kann.

Wir berechnen die Gleichung derselben folgendermassen:

Die Gleichungen des Mittelquuktes einer Curve $(U' - \lambda U'')$ lauten:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \lambda a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda a_{22}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'') & (a_{23}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'') & (a_{23}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Die Werte eingesetzt:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (0-\lambda 1) & (1-\lambda 0) \\ \left(0+\lambda \frac{y_1}{2}\right) & \left(0-\lambda \frac{x_1}{2}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-\lambda 0) & (0-\lambda 1) \\ (0-\lambda 1) & (1-\lambda 0) \end{vmatrix}} = \frac{\lambda^2 \frac{x_1}{2} - \lambda \frac{y_1}{2}}{1-\lambda^2} = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(\lambda x_1 - y_1)$$

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} (1-\lambda 0) & (0-\lambda 1) \\ \left(0+\lambda \frac{y_1}{2}\right) & \left(0-\lambda \frac{x_1}{2}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-\lambda 0) & (0-\lambda 1) \\ (0-\lambda 1) & (1-\lambda 0) \end{vmatrix}} = \frac{\lambda \frac{x_1}{2} - \lambda^2 \frac{y_1}{2}}{1-\lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(x_1 - \lambda y_1)$$

$$x = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(\lambda x_1 - y_1)$$

$$y = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(x_1 - \lambda y_1)$$

Durch Elimination von λ erhalten wir eine Gleichung mit den Veränderlichen x und y, welche uns die Gleichung der Mittelpunktscurve darstellt.

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda x_1 - y_1}{x_1 - \lambda y_1}$$

$$x(x_1 - \lambda y_1) = y(\lambda x_1 - y_1)$$

$$xx_1 - \lambda x y_1 = \lambda x_1 y - yy_1$$

$$xx_1 + yy_1 = \lambda(x_1 y + x y_1)$$

$$\lambda = \frac{xx_1 + yy_1}{x_1 y + x y_1}$$

$$\frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)} = \frac{\frac{xx_1+yy_1}{x_1y+xy_1}}{2\left(\frac{x_1^2y^2+x^2y_1^2-x^2x_1^2-y^2y_1^2}{(x_1y+xy_1)^2}\right)}$$

$$\frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)} = \frac{(xx_1+yy_1)(x_1y+xy_1)}{2(x^2-y^2)(y_1^2-x_1^2)}$$

$$\lambda x_1 - y_1 = \frac{xx_1^2 + x_1y_1y}{x_1y+xy_1} - y_1$$

$$\lambda x_1 - y_1 = \frac{x(x_1^2-y_1^2)}{x_1y+xy_1}$$

$$x = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(\lambda x_1 - y_1) = \frac{(xx_1+yy_1)(x_1y+xy_1) = x(x_1^2-y_1^2)}{-2(x^2-y^2)(y_1^2-x_1^2)(x_1y+xy_1)}$$

$$1 = \frac{xx_1+yy_1}{-2(x^2-y^2)}$$

$$2(y^2-x^2) = xx_1 + yy_1$$

$$y^2 - \frac{y_1}{2}y = x^2 + \frac{x_1}{2}x$$

Die letzte Gleichung ist aber die Gleichung einer gleichseitignn Hyperbel, deren Coordinatenaxen parallel zu den angenommenen Coordinatenaxen der Hyperbel U'' (also zu den Asymptoten der ursprünglichen Hyperbel U'') sind. Der Mittelpunkt dieser Mittelpunktscurve liegt in O'', wobei

$$O' O''' = O'' O'''$$

ist, die Axen dieser Curve liegen in den Parallelen durch O''' zu den Asymptoten der ursprünglichen Hyperbel U''. Die Lage dieser Mittelpunktshyperbel ist in Fig. IV. durch die Curve U''' ersichtlich gemacht. Die Axe a derselben ist

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{x_1^2 - y_1^2}$$

Die Curve U'' giebt uns auch darüber Aufschluss, welcher Teil der Hyperbel U'' genommen werden muss, um darin Punkte anzunehmen, von welchen aus die Construction durchgeführt werden kann, damit man Punkte jener Geraden erhalte, welche durch ein und dieselben Schnittpunkte der Curven U' und U'' hindurchgeht.

Die Dreiteilung des Winkels.

Es wäre in Fig. V., ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte 0, ferner der Punkt 1 der Peripherie. Der Winkel 1, 0, 6 wäre gleich α und der Winkel 3, 0, 5 $= \frac{\alpha}{3}$. Verbinde ich den Punkt 1 mit dem Punkte 3 und verlängere die Verbindungsgerade, bis sie die Axe x im Punkte 4 durchschneidet, so ist offenbar die Länge der Geraden $\overline{34}$ gleich r, dem Radius des Kreises. Denn der Winkel α ist gleich der Summe der Winkel bei den Punkten 1 und 4, der Winkel beim Punkte 0 ist gleich der Summe der Winkel bei 0 und 4, das Dreieck 1, 0, 3 ist gleichschenklig, daher der Winkel bei 1 gleich dem bei 3, der Winkel bei 0 ist $\frac{\alpha}{3}$, daher muss der Winkel bei 4 ebenfalls $\frac{\alpha}{3}$ sein, das Dreieck 0, 3, 4, muss infolgedessen auch gleichschenklig sein, deshalb $\overline{03}$ gleich $\overline{34}$ gleich dem Radius des Kreises.

Die Coordinaten der Punkte 1, 2, 3 u. s. w. wären $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$ u. s. w.

Es ist:

$$(x_4 - x_3)^2 + y_3^2 = r^2$$
$$x_4^2 - 2x_4x_3 + x_3^2 + y_3^2 = r^2$$
$$x_3^2 + y_3^2 = r^2$$

daher

$$x_4^2 - 2x_4x_3 = 0$$

$$x_4 = 2x_3$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Gerade $\overline{34}$ gleich ist der Geraden $\overline{23}$ gleich dem Radius des Kreises.

Nun handelt es sich darum, eine Curve 2ter Ordnung zu errechnen, welche durch den Punkt 3 hindurchgeht; ist dies gelungen, so ist die ganze Aufgabe auf den Schnitt zweier Curven zurückgeführt, welche nach dem früher Gesagten durchgeführt werden kann, da der Punkt 3 genau ermittelt ist, und somit der Winkel 1, 0, 6, in 3 Teile geteilt wird.

Wir wollen nun eine solche Curve errechnen.

$$\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}$$

$$(x_1-x_2)(y_1-y_3)=(y_1-y_2)(x_1-x_3)$$

$$x_1y_1-x_2y_1-x_1y_3+x_2y_3=y_1x_1-y_2x_1-x_3y_1+x_3y_2$$

da $$x_2=0$$

$$x_1y_3=x_1y_2+x_3y_1-x_3y_2$$

$$x_1y_3=2x_1y_3+x_3y_1-2x_3y_3$$

Nehmen wir statt $x_3 \mid y_3$ die allgemeinen Coordinaten $x \mid y$, so erhalten wir:

$$x_1y=2x_1y+xy_1-2xy$$

$$x_1y+xy_1-2xy=0$$

Da aber x_1 in diesem Falle negativ ist, so wird

$$\underline{2xy+x_1y-xy_1=0}$$

Das ist dieselbe Gleichung, die ich früher beim Schnitt der Curven U' und U'' in Fig. IV. angenommen habe. Es ist die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf Coordinatenaxen, die zu ihren Asymptoten parallel sind. Der Mittelpunkt $0''$ lässt sich nach der bekannten Art sehr schnell rechnen, ebenso durch Transformation der Coordinaten, die Axen der Hyperbel, und es ist somit die ganze Construction genau so durchzuführen, wie es in Fig. IV. durchgeführt wurde.

Es ist aus den Strecken a, b, und c das x zu construiren, welches der Gleichung genügt,

$$x = \sqrt[3]{abc}$$

Wenn ich diese Gleichung in Proportionen zerlege und dabei noch eine Unbekannte y einführe, so erhalte ich:

I) $x : a = y : x \;\ldots\ldots\; x^2 = ay$

II) $x : b = c : y \;\ldots\ldots\; x = \frac{bc}{y}$

daher

$$x^3 = abc$$

Die Gleichung I) drückt aber die Scheitelgleichung einer Parabel aus, bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen y Axe mit der Parabelaxe zusammenfällt, während die Gleichung II) eine Hyperbel und zwar eine gleichseitige Hyperbel darstellt, deren Asymptoten mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Die Axe dieser gleichseitigen Hyperbel ergiebt sich aus ihrer Gleichung

$$xy = bc$$

und ist daher $2\sqrt{2bc}$, der Parameter der Parabel resultirt aus seiner Gleichung

$$x^2 = ay$$

und ist gleich a.

Die Lage dieser beiden Curven ist daher vollkommen bestimmt. Man kann daher nach dem allgemeinen Verfahren den Schnitt dieser beiden Curven bestimmen; die Abscisse des einzigen reellen Schnittpunktes giebt den Wert, welcher der Gleichung

$$x = \sqrt[3]{abc}$$

genügt.

Da die Mittelpunkte dieser beiden Curven eine ungünstige Lage haben, so wird es notwendig sein, sich 2 Punkte der Mittelpunktscurve zu rechnen und zu construiren, um von diesen aus den Schnitt der Curven nach der bekannten Art und Weise durchzuführen.

Wie die Rechnung eines solchen Punktes der Mittelpunktscurve geschieht, ist bereits früher gezeigt worden. Also:

$$U' \equiv x^2 - ay = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_{11}' = 1, \quad a_{23}' = -\frac{a}{2}$$

$$a_{12}' = a_{13}' = a_{22}' = a_{33}' = 0$$

$$U'' \equiv xy - bc = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_{12}'' = \tfrac{1}{2}, \quad a_{33}'' = -bc$$

$$a_{11}'' = a_{22}'' = a_{12}'' = a_{23}'' = 0$$

$$U' - \lambda U'' \equiv x^2 - ay - \lambda(xy - bc) = 0$$

$$U' - \lambda U'' \equiv x^2 - ay - \lambda\, xy + \lambda\, bc = 0$$

Durch die verschiedenen Werte von λ erhalte ich verschiedene Punkte der Mittelpunktscurve, wenn ich aus der Gleichung ($U' - \lambda U''$) welche mir ebenfalls eine Curve darstellt, die durch die 4 Schnittpunkte von U' und U'' hindurchgeht, die Coordinaten ihres Mittelpunktes errechne.

Ich erhalte für die Coordinaten des Mittelpunktes einer Curve ($U' - \lambda U''$) (identisch mit einem Punkte der Mittelpunktscurve) folgende Werte:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \lambda a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda a_{22}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'') & (a_{33}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'') & (a_{23}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Für einen bestimmten Punkt setze ich $\lambda = 1$. Somit ist:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - a_{12}'') & (a_{22}' - a_{22}'') \\ (a_{13}' - a_{13}'') & (a_{23}' - a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - a_{11}'') & (a_{12}' - a_{12}'') \\ (a_{12}' - a_{12}'') & (a_{22}' - a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} (a_{11}' - a_{11}'') & (a_{12}' - a_{12}'') \\ (a_{13}' - a_{13}'') & (a_{23}' - a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - a_{11}'') & (a_{12}' - a_{12}'') \\ (a_{12}' - a_{12}'') & (a_{22}' - a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Die den Gleichungen für U' und U'' entsprechenden Werte eingesetzt, ergeben:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{a}{4}}{-\frac{1}{4}} = -a$$

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{a}{2}}{-\frac{1}{4}} = -2a$$

Somit wäre ein Punkt der Mittelpunktscurve bestimmt. Setze ich für λ einen andern Wert, so erhalte ich einen zweiten Punkt, und es kann die bekannte Construction des Schnittes dieser beiden Curven tadellos durchgeführt werden.

Das Berührungs-Problem des Pappus.

Die allgemeine Aufgabe dieses Problems lautet:

„Wenn Punkte, Gerade und Kreise, im ganzen 2 Elemente gegeben sind. Kreise von gegebenem Radius zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die gegebenen Geraden oder Kreise berühren".

Nach dem bisher Gesagten kann man dieses Problem allgemein mittelst Schnitten von Curven 2ter Ordnung durchführen und es lässt sich auch in Anbetracht dessen dieses Problem folgendermassen erweitern:

„Wenn Punkte, Gerade, Kreise oder überhaupt Curven 2ter Ordnung, im ganzen 2 Elemente gegeben sind, Kreise von gegebenem Radius zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen, und die gegebenen Geraden, Kreise oder Curven 2ter Ordnung berühren".

Zur Erläuterung will ich eine Aufgabe kurz besprechen.

Es wären 2 Curven 2ter Ordnung U_1' und U_1'' gegeben. Man soll nun einen Kreis von gegebenem Radius construiren, welcher die beiden Curven berührt.

Man construirt sich den geometrischen Ort aller Kreismittelpunkte, von welchem aus man mit dem gegebenen Radius berührende

Kreise an die Curve U_1' zeichnen kann. Dieser geometrische Ort wird eine zur Curve U_1' ähnliche Curve sein, welche leicht und schnell construirt werden kann. Ich nenne diese Curve U_2'. Dasselbe tue ich bei der Curve U_1'' und erhalte als geometrischen Ort die Curve U_2'', Die Schnittpunkte von U_2' und U_2'', welche sich nach der bekannten Construction finden lassen, sind die geforderten Kreismittelpunkte

Das Berührungs-Problem des Apollonius.

Die allgemeine Aufgabe desselben lautet:

„Wenn Punkte, Gerade und Kreise, im ganzen 3 Elemente gegeben sind, Kreise zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die gegebenen Geraden und Kreise berühren".

Dieses Problem kann nach dem bisher Gesagten ebenfalls allgemein mittelst Schnitten von Curven 2ter Ordnung gelöst werden.

Es ist allgemein bekannt, dass der geometrische Ort aller Kreismittelpunkte, von welchen aus berührende Kreise an 2 Kreise, oder an einen Kreis und einen Punkt gezogen werden können, eine Curve 2ter Ordnung ist, welche sich in den beispielsweise genannten Fällen, als Hyperbel, Parabel repräsentirt.

Indem ich nun zu je 2 der gegebenen Elemente den geometrischen Ort aller Mittelpunkte der sie berührenden Kreise construire, erhalte ich 3 Curven 2ter Ordnung, welche untereinander geschnitten, die geforderten Kreismittelpunkte ergeben.

Der Schnitt je zweier solchen Curven lässt sich nach der bekannten Construction leicht durchführen.

Uebrigens lässt sich auch dieses Problem erweitern. Bevor ich jedoch die erweiterte Aufgabe niederschreibe, muss ich noch einen hiezu wichtigen und notwendigen Satz beweisen, und zwar:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche 2 gegebene Curven 2ter Ordnung berühren, ist wieder eine Curve 2ter Ordnung, welche durch die 4 Schnittpunkte der beiden gegebenen Curven hindurchgeht.

Die beiden gegebenen Curven hiessen U_1' und U_1''. Ich construire mir zu U_1' den geometrischen Ort aller Mittelpunkte der Kreise von einem bestimmten Radius R, welche U_1' berühren. Ich

nenne diese Curve U_2'. Dasselbe mache ich in Bezug auf die Curve U_1'', und erhalte die Curve U_2''. Der Schnitt der Curven U_2' und U_2'' geben mir den Mittelpunkt des Kreises vom Radius R, welcher sowol die Curve U_1' als auch U_1'' berührt.

Die Gleichungen der Curven lauten:

$$U_1' \equiv a_{11}'x_1{}^2 + 2a_{12}'xy + 2a_{13}'x + a_{22}'y^2 + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0$$

Da die Curve U_2' der Curve U_1' ähnlich ist, so kann sich die Gleichung von U_2' von der von U_1' nur durch das letzte Glied unterscheiden. Es ist somit

$$U_2' \equiv a_{11}'x_2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}'x + a_{22}'y^2 + 2a_{23}'y + m' = 0$$

desgleichen ist:

$$U_1'' \equiv a_{11}''x^2 + 2a_{12}''xy + 2a_{13}''x + a_{22}''y_2 + 2a_{23}''y + a_{33}'' = 0$$

und

$$U_2'' \equiv a_{11}''x^2 + 2a_{12}''xy + 2a_{13}''x + a_{22}''y^2 + 2a_{23}''y + m'' = 0$$

Die Gleichung der Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U_2' und U_2'' hindurchgeht, lautet:

$$\begin{aligned} U_2 \equiv U_2' - \lambda U_2'' &\equiv (a_{11}' - \lambda a_{11}'')y^2 + 2(a_{12}' - \lambda a_{12}'')xy \\ &+ 2(a_{13}' - \lambda a_{13}'')x + (a_{22}' - \lambda a_{22}'')y^2 \\ &+ 2(a_{23}' - \lambda a_{23}'')y + (m' - \lambda m'') = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U_1' und U_1'' hindurchgeht, ist:

$$\begin{aligned} U_1 \equiv U_1' - \lambda U_1'' &\equiv (a_{11}' - \lambda a_{11}'')x^2 + 2(a_{12}' - \lambda a_{12}'')xy \\ &+ 2(a_{13}' - \lambda a_{13}'')x + (a_{22}' - \lambda a_{22}'')y^2 \\ &+ 2(a_{23}' - \lambda a_{23}'')y + (a_{33}' - \lambda a_{33}'') = 0 \end{aligned}$$

Man sieht, dass sich die beiden Gleichungen U_1 und U_2 nur das letzte Glied von einander unterscheiden. Daraus folgt, dass die Curven U_1 und U_2 einander ähnlich sein müssen, oder sie müssen dentisch sein. Der erstere Fall kann nicht eintreten, denn die Curve U_2 muss auch durch die 4 Schnittpunkte von U_1' und U_1'' hindurchgehen, weil dieselben auch Kreismittelpunkte darstellen für jene berührende Kreise, welche einen unendlich kleinen Radius

haben. Die Curven U_1 und U_2 müssen daher ein und dieselbe Curve darstellen, womit der Satz bewiesen ist.

Nach diesem kann ich dem Probleme des Apollonius einen allgemeinen Charakter geben und es folgendermassen aussprechen:

„Wenn Punkte, Gerade, Kreise oder überhaupt Curven 2ter Ordnung, im ganzen 3 Elemente gegeben sind, Kreise zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die übrigen Elemente berühren."

Nach dieser kurzen Abhandlung glaube ich einen kleinen Einblick in ein Gebiet gegeben zu haben, in welchem sich die mannigfaltigsten und schönsten Aufgaben der analytischen Geometrie lösen lassen.

Wien, am 20. März 1892.

XIV.

Einige Aufgaben aus der Combinatorik.

Von

Alfred Holtze,

Gymnasiallehrer in Naumburg a. S.

Vorbemerkung. Die nachfolgenden Abhandlungen sind ohne vorheriges Quellenstudium entstanden. Es mag das der Arbeit zum Vorwurf gereichen oder nicht — jedenfalls vermag ich nicht zu entscheiden, wie weit die Resultate oder vielleicht gar die Fragen neu sind. Um so wahrscheinlicher ist es, dass ich in der Art der Behandlung von etwaigen Vorarbeiten hier und da abweiche. Neuheit des Gegenstandes vermute ich für die Frage I, vielleicht auch V, sowie für die Resultate im letzten und hauptsächlichen Teile von III, der von den Combinationen (im engeren Sinne) handelt.

I. Aufgabe aus der Theorie der Permutationen.

Stellung der Frage. Man denke sich aus der vollständigen Tabelle der Permutationen von n Elementen alle diejenigen Complexionen gestrichen, in denen das Element a_1 den Platz p_1 oder das Element a_2 den Platz p_2 u. s. w. oder endlich das Element a_k den Platz p_k inne hat. Dabei werden die Plätze $p_1 p_2 \dots p_k$ (ebenso die Elemente $a_1 a_2 \dots a_k$) als verschieden vorausgesetzt. Wieviel Complexionen bleiben übrig?

Durchführung. Nennen wir die gesuchte, übrig bleibende Zahl R_k, so haben wir:

$$R_k = n! - x$$

wobei x die Zahl derjenigen Complexionen bezeichnet, worin entweder a_1 den Platz p_1 oder a_2 den Platz p_2 u. s. w. einnimmt, oder mehrere dieser Fälle gleichzeitig eintreten. Wir berechnen zunächst x.

Wird ein beliebiges Element auf beliebigem Platze festgehalten, so bleiben noch $(n-1)!$ Complexionen möglich, d. h. der $n$te Teil der früheren Gesamtzahl $n! = Z$, also $\frac{1}{n}.Z$.

Werden gleichzeitig zwei Elemente an feste Plätze gebannt, so bleiben

$$(n-2)! = \frac{Z}{n(n-1)}$$

und entsprechend für k festgehaltene Elemente:

$$(n-k)! = \frac{Z}{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n+1-k)}$$

Complexionen möglich. Um aber x zu berechnen, haben wir die k Elemente $a_1\ .\ .\ .\ a_k$ nicht gleichzeitig, sondern nach einander auf ihren Plätzen festzuhalten. Es scheinen so $\frac{k}{n}$ der früheren Gesamtzahl, also $\frac{k}{n}.Z$ Complexionen möglich zu bleiben. Bei dieser Zahl aber sind alle diejenigen Complexionen doppelt gezählt, also einmal wieder in Abzug zu bringen, bei welchen gleichzeitig zwei Elemente ihre festen Plätze einnehmen. Je eine solche Ambe (z. B. gleichzeitig a_1 auf p_1 und a_2 auf p_2) bedingt die Subtraction von

$$\frac{1}{n(n-1)}.Z$$

es giebt aber solcher Amben k_2; unser vorläufiges Resultat lautet also:

$$\left(\frac{k}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)}\right).Z$$

Das Resultat ist noch kein endgültiges: denn diejenigen Complexionen in denen sich gleichzeitig z. B. a_1 auf p_1, a_2 auf p_2 und a_3 auf p_3 befinden, sind zuerst 3mal gezählt, dann $3_2 = 3$ mal in Abzug gebracht worden: sie sind also noch einmal hinzuzufügen. Dasselbe gilt für jede andre Terne von Elementen, die gleichzeitig ihre Plätze inne haben; also erhalten wir jetzt:

$$\left(\frac{k}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)} + \frac{k_3}{n(n-1)(n-2)}\right).Z$$

So schliesst man weiter: Complexionen mit gleichzeitig richtig angeordneten 4 Elementen sind bis jetzt $4_1 - 4_2 + 4_3 = 2$ mal gezählt worden; zieht man sie also einmal wieder ab, so erhält man:

$$\left(\frac{k}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)} + \frac{k_3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{k_4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\right) . Z$$

Um zu zeigen, dass das Bildungsgesetz in dieser Form weiter geht, nehmen wir an, es habe sich wie bereits für Amben, Ternen und Quaternen schon für diejenigen Complexionen als richtig erwiesen, in denen gleichzeitig $(2l-1)$ Elemente ihre festen Plätze inne haben. Wir prüfen jetzt diejenigen Complexionen, in denen eben dasselbe für $2l$ Elemente gilt. Diese sind bisher gezählt worden

$$(2l)_1 - (2l)_2 + (2l)_3 - + \ldots + (2l)_{2l-1} = 2 \text{ mal}$$

[man vergleiche die binomische Entwicklung von $(1-1)^{2l}$]; also sind sie einmal in Abzug zu bringen, und unser Bildungsgesetz hat sich einen Schritt weiter bestätigt. Man prüfe endlich die Complexionen, worin gleichzeitig $(2l+1)$ Elemente ihre festen Plätze einnehmen: diese sind bisher

$$(2l+1)_1 - (2l+1)_2 + (2l+1)_3 - + \ldots - (2l+1)_{2l} = 0 \text{ mal}$$

gezählt worden, müssen also einmal wieder hinzugefügt werden. Hiernach ist unser Bildungsgesetz abermals einen Schritt weiter und somit allgemein als richtig bewiesen, und wir erhalten endgültig:

$$x = n! \left\{\frac{k_1}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)} + \frac{k_3}{n(n-1)(n-2)} - + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{k-1} . \frac{k_k}{n(n-1) \ldots (n+1-k)}\right\}$$

Hiermit ist auch

$$R_k = n! - x$$

allgemein gefunden.

S p e c i a l i s i r u n g. Am interessantesten ist der Fall $k = n$, wobei also j e d e m Elemente ein bestimmter Platz versagt ist, nämlich jedem wieder ein anderer. Wir erhalten dann:

$$R_n = n! \left\{1 - \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n(n-1)} - \frac{n_3}{n(n-1)(n-2)} + - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n . \frac{n_n}{n!}\right\}$$
$$= n! \left\{1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots + (-1)^n . \frac{1}{n!}\right\} \qquad (\alpha)$$

Es ist aber

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

also

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots \text{ in inf.}$$

Fügen wir nun in dem Ausdruck (α) für R_n noch die Glieder hinzu:

$$\pm n! \left\{ \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + - \ldots \right\}$$

so ist deren absoluter Betrag gleich

$$n! \left\{ \frac{1}{(n+1)!} - \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) - (\ldots) - (\ldots) \ldots \right\}$$

also

$$< n! \frac{1}{(u+1)!}, \text{ d. h } < \frac{1}{n+1} \text{ oder, weil } n \geqq 1, < \tfrac{1}{2}$$

Jene Zusatzglieder halten sich also innerhalb der Grenzen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ derart, dass diese Grenzen selbst ausgeschlossen sind. Bezeichnen wir nun durch $P\left(\frac{p}{q}\right)$ die dem Bruche $\frac{p}{q}$ zunächst liegende ganze Zahl, wobei wir über den zweifelhaften Fall, dass $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl plus $\frac{1}{2}$ ist, hier hinweggehen dürfen, so haben wir:

$$R_n = P\left(\frac{n!}{e}\right) \ldots \text{ oder in Worten:}$$

„Es giebt $P\left(\frac{n!}{e}\right)$ solcher Complexionen, in welchen jedem Elemente ein bestimmter Platz versagt ist, nämlich jedem wieder ein anderer."

Beispiele. $n = 1$ giebt $P\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

$n = 2$ „ $P\left(\frac{2}{e}\right) = 1$ (nämlich ba, wenn dem a der 1te, dem b der 2te Platz versagt ist)

$n = 3$ „ $P\left(\frac{6}{e}\right) = 2 = 2.1$ (bca, cab)

$n = 4$ „ $P\left(\frac{24}{e}\right) = 9 = 3.3$ ($badc$, $bcda$, $bdac$; $cadb$, $cdab$, $cdba$; $dabc$, $dcab$, $dcba$)

$$n = 5 \quad \text{giebt} \quad P\left(\frac{120}{e}\right) = 44 = 4.11$$

$$n = 6 \quad „ \quad P\left(\frac{720}{e}\right) = 265 = 5.53$$

$$n = 7 \quad „ \quad P\left(\frac{5040}{e}\right) = 1854 = 6.309$$

$$n = 8 \quad „ \quad P\left(\frac{40\,320}{e}\right) = 14833 = 7.2119$$

$$n = 9 \quad „ \quad P\left(\frac{362\,880}{e}\right) = 133\,496 = 8.16687$$

$$n = 10 \quad „ \quad P\left(\frac{3628\,800}{e}\right) = 1334\,961 = 9.148\,329$$

Lehrsatz. „R_n ist stets teilbar durch $(n-1)$“.

Es ist nämlich nach Gleichung (α):

$$R_n = n! - n! + [n(n-1)\,.\,.\,.\,4.3] - [n(n-1)\,.\,.\,.\,5.4]$$
$$+ [n(n-1)\,.\,.\,.\,6.5] - + \,.\,.\,.$$
$$+ (-1)^{n-1}.\{n(n-1)(n-2) - n(n-1) + n - 1\}$$

Die Teilbarkeit durch $(n-1)$ leuchtet ein, wenn man die beiden letzten Posten des Aggregats n und -1 zu $(n-1)$ zusammenfasst. Aber auch a priori liess sich diese Teilbarkeit erkennen. Man führe neue Bezeichnungen für die Elemente ein derart, dass dasjenige Element, dem der 1te Platz versagt ist, a heisst; ebenso sei der 2te Platz dem b, der 3te dem c versagt u. s. f. Die Aufgabe lautete dann: „Wieviel Permutationen giebt es, worin weder a den 1ten noch b den 2ten Platz u. s. w. einnimmt?“ Teilt man, wie üblich, die fertige Permutationstabelle in Ordnungen ein, so fällt für unser Problem die Ordnung a ganz aus. In der Ordnung b fallen die Bedingungen für die Elemente a und b fort, denn in ihr nimmt a nicht den 1ten und b nicht den 2ten Platz ein; es bleiben nur die Bedingungen für die $(n-2)$ übrigen Elemente bestehen. Dasselbe gilt auch dann noch, wenn b als Kopf der Ordnung consequent gestrichen wird: dann ist diese ihres Kopfs beraubte Ordnung eine geschlossene Permutationstabelle von $(n-1)$ Elementen, welche $(n-2)$ der bekannten Bedingungen zu erfüllen haben; der Numerus dieser Ordnung ist also ein $[R_k]_{k=n-2}^{n=n-1}$. Genau dieselbe Ueberlegung lässt sich aber auch an den übrigen Ordnungen vornehmen: für die Ordnung c fallen die Bedingungen fort, denen sonst a und c zu genügen haben; nach Streichung des Ordnungskopfes c erhält man wieder

eine Tabelle mit $[R_k]_{k=n-2}^{n=n-1}$ Complexionen. Selbst wenn nun diese R_k unbekannt sind, müssen sie doch, weil bloss von $(n-1)$ und $(n-2)$ abhängig, einander gleich sein; es zerfällt also das in Rede stehende R_n in $(n-1)$ gleichgrosse Gruppen, ist also durch $(n-1)$ teilbar. Man vergleiche das oben durchgeführte Beispiel $n = 4$.

Recursionsformel zur Berechnung der R_n.

Weil

$$R_n = P\left(\frac{n!}{e}\right) \quad \text{und} \quad R_{n+1} = P\left(\frac{(n+1)!}{e}\right)$$

so muss R_{n+1} ungefähr $(n+1)$ mal so gross sein als R_n. Ein Blick auf die gegebenen Beispiele bestätigt dies und zeigt, dass der Unterschied zwischen R_{n+1} und $(n+1)R_n$ immer nur ± 1 beträgt. Es lässt sich dies leicht allgemein beweisen.

Der absolute Wert der zum ursprünglichen Ausdruck von R_n zum Zweck der Einführung des e hinzugefügten Glieder ist, wie oben gesagt, $< \frac{1}{n+1}$. Unterscheiden wir zwischen geradem und und ungeradem n, so haben wir:

$$R_{2n} = (2n)!\left\{1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{(2n)!}\right\}$$

also $> \frac{(2n)!}{e}$; Differenz zwischen beiden $< \frac{1}{2n+1}$, also:

$$R_{2n} = P\left(\frac{(2n)!}{e}\right) = \frac{(2n)!}{e} + \frac{\zeta}{2n+1}$$

wobei $\zeta > 0$ und < 1 ist.

Dagegen:

$$R_{2n+1} = (2n+1)!\left\{1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - + \cdot \cdot \cdot - \frac{1}{(2n+1)!}\right.$$

also $< \frac{(2n+1)!}{e}$, Differenz $< \frac{1}{2n+2}$, also:

$$R_{2n+1} = P\left(\frac{(2n+1)!}{e}\right) = \frac{(2n+1)!}{e} - \frac{\zeta'}{2n+2}$$

Daher ist:

$$(2n+1)R_{2n} = \frac{(2n+1)!}{e} + \zeta = \text{ganze Zahl}$$

und andererseits:

$$R_{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{e} - \frac{\zeta'}{2n+2} = \text{ganze Zahl.}$$

Da ζ und $\frac{\zeta'}{2n+2}$ beide positiv und < 1 sind, so müssen $(2n+1)R_{2n}$ und R_{2n+1} benachbarte ganze Zahlen sein, und zwar ist R_{2n+1} die kleinere, also:

$$R_{2n+1} = (2n+1)\,R_{2n} - 1$$

Entsprechend folgt aus

$$(2n+2)R_{2n+1} = \frac{(2n+2)!}{e} - \zeta' = \text{ganze Zahl}$$

und

$$R_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{e} + \frac{\zeta''}{2n+3} = \text{ganze Zahl,}$$

dass

$$R_{2n+2} = (2n+2)R_{2n+1} + 1 \quad \text{ist.}$$

Die gefundenen Resultate lassen sich zusammenfassen, nämlich:

$$(\beta) \qquad R_n = n\,R_{n-1} + (-1)^n, \quad \text{also} \quad \equiv (-1)^n \pmod{n}$$

und zugleich nach dem Früheren

$$\equiv 0 \pmod{\overline{n-1}}$$

Nach der gefundenen Formel (β) lassen sich die R_n leicht berechnen.

Noch eine zweite Recursionsformel lässt sich herleiten. Es ist nach Gleichung (β):

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 0 \\ R_2 &= 2R_1+1 \\ R_3 &= 3R_2-1 \\ R_4 &= 4R_3+1 \\ R_5 &= 5R_4-1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_{2n} &= 2nR_{2n-1}+1 \\ R_{2n+1} &= (2n+1)R_{2n}-1 \end{aligned}\right\}$$

also, indem wir summiren:

a) $$\sum_1^{2n} R_i = \sum_1^{2n-1} (i+1)R_i + 1 \quad \text{oder}$$

$$R_{2n} = \sum_1^{2n-1} iR_i + 1 \quad \text{z. B.}$$

$$R_6 = 1 + R_1 + 2R_2 + 3R_3 + 4R_4 + 5R_5$$

b) $$\sum_1^{2n+1} R_i = \sum_1^{2n} (i+1)R_i \quad \text{oder}$$

$$R_{2n+1} = \sum_1^{2n} iR_i \quad \text{z. B.}$$

$$R_7 = R_1 + 2R_2 + 3R_3 + 4R_4 + 5R_5 + 6R_6$$

Will man zusammenfassen, so kann man schreiben:

$$R_n = \sum_1^{n-1} iR_i + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

II. Darstellung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen gegebener Zahlen.

Um kürzer sprechen zu können, betrachten wir die gegebenen Zahlen als Nenner von Brüchen: dann haben wir es mit der Aufsuchung des (kleinsten) „Generalnenners" zu tun. Zwei Nenner A und B, die relativ prim sind, haben ihr Product AB zum Generalnenner. Besitzen A und B einen gemeinsamen Divisor, sodass man

$$A = fa, \quad B = fb$$

setzen darf, wobei a und b relative Primzahlen sind, so ist ihr Generalnenner fab oder $\frac{AB}{f}$. — Wir gehen zu drei Zahlen über. In dem Beispiel

$$A = 3.5, \quad B = 3.7, \quad C = 5.7$$

ist der Generalnenner

$$N = 3.5.7, \quad \text{d. h.} \quad N = \frac{ABC}{3.5.7}$$

man hat also das Product ABC durch das Product der gemeinschaftlichen Divisoren (3) von A und B, (5) von A und C und (7) von B und C zu dividiren. Diese Regel ist aber keineswegs allgemein gültig. Die Zahlen

$$A = 2.3.5, \quad B = 2.3.7, \quad C = 2.5.7$$

ergeben

$$N = 2.3.5.7$$

nach obigem Verfahren behandelt würden sie das falsche Resultat

$$\frac{2^3.3^2.5^2.7^2}{2.3.2.5.2.7} = 3.5.7$$

ergeben; es muss also im Zähler noch der gemeinschaftliche Divisor aller drei Zahlen A, B, C, der im ersten Beispiel $= 1$ war, hinzugefügt werden.

Dass das modificirte Verfahren bei drei Nennern stets zum richtigen Resultat führt, kann leicht bewiesen werden. A, B, C mögen den ihnen allen gemeinsamen grössten Divisor f besitzen, also:

$$A = fA', \quad B = fB', \quad C = fC'$$

Die Grössen A', B', C' alle drei können nun keinen gemeinschaftlichen Factor mehr besitzen, wol aber die aus ihnen gebildeten Combinationen zu je zweien: so mögen A' und B', A' und C', B und C' bezüglich die grössten gemeinsamen Factoren g_1, g_2, g_3 haben: dann sind die Grössen g, jede zu jeder anderen, relative Primzahlen, weil anderenfalls der Factor f zu klein, also falsch gewählt worden wäre. Daher muss in A' sowol der Factor g_1 als der Factor g_2 enthalten sein u. s. w., also:

$$A' = g_1 g_2 \cdot a; \quad B' = g_1 g_3 \cdot b; \quad C' = g_2 g_3 \cdot c$$

Wir behaupten nun: der Generalnenner von A', B', C' ist

$$N' = g_1 g_2 g_3 \, abc$$

und folglich der von A, B, C:

$$N = fN' = fg_1 g_2 g_3 \, abc$$

Erstens nämlich ist N' überhaupt ein gemeinschaftliches Vielfaches von A', B', C', und die Quotienten $\frac{N'}{A'}$, $\frac{N'}{B'}$, $\frac{N'}{C'}$ sind:

$$Q_1 = g_3 bc, \quad Q_2 = g_2 ac, \quad Q_3 = g_1 ab$$

Um zweitens zu zeigen, dass N' die kleinste Zahl dieser Art ist, beweisen wir, dass die drei Quotienten Q keinen gemeinschaftlichen Factor mehr besitzen. Nach der Definition der Grössen g müssen $\frac{A'}{g_1}$ und $\frac{B'}{g_1}$ relativ prim sein, ebenso $\frac{A'}{g_2}$ und $\frac{C'}{g_2}$, $\frac{B'}{g_3}$ und $\frac{C'}{g_3}$; also ist

1) $g_2 a$ zu $g_3 b$, 2) $g_1 a$ zu $g_3 c$, 3) $g_1 b$ zu $g_2 c$

relativ prim.

Nun ist:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c}{c} \cdot \frac{g_3 b}{g_2 a}$$

folglich nach 1) c grösster gemeinsamer Teiler von Q_1 und Q_2. Dieser aber ist relativ prim zu

$$Q_3 = g_1 ab$$

weil er es einzeln zu g_1, zu a und zu b ist nach 2), 2), 3). Also ist wirklich N' der Generalnenner zu A', B', C' und folglich N der zu A, B, C.

Andrerseits ergiebt das beschriebene Verfahren den Ausdruck:

$$\frac{f^3(g_1 g_2 g_3)^2 . abc}{fg_1 . fg_2 . fg_3} \times f = fg_1 g_2 g_3 abc, \text{ d. h. } N$$

In gleicher Weise findet man den Generalnenner zu vier gegebenen Nennern A, B, C, D durch die Formel:

$$N = \frac{ABCD . \pi d'''}{\pi d'' . d''''}$$

Dabei bezeichnen die d'', die d''' und d'''' die grössten gemeinschaftlichen Divisoren von je zweien, von je drei und von der Gesamtheit der vier Zahlen. Zunächst nämlich mögen die Zahlen A, B, C, D den grössten gemeinsamen Divisor f besitzen:

$$A = fA', \quad B = fB', \quad C = fC', \quad D = fD'$$

Die grössten gemeinsamen Divisoren von

$$A'B'C', \quad A'B'D', \quad A'C'D', \quad B'C'D'$$

seien bezüglich

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4$$

Die Grössen g sind, paarweis zusammengestellt, relative Primzahlen, weil anderenfalls f zu klein, also falsch gewählt worden wäre. Daher muss z. B. A' sowol den Factor g_1 als g_2 als g_3 enthalten, also:

$$A' = g_1 g_2 g_3 A''; \quad B' = g_1 g_2 g_4 B''; \quad C' = g_1 g_3 g_4 C''; \quad D' = g_2 g_3 g_4 D''$$

Endlich mögen die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahlenpaare

$$A''B'', \quad A''C'', \quad A''D'', \quad B''C'', \quad B''D'', \quad C''D''$$

sein:

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \quad h_4, \quad h_5, \quad h_6$$

Auch die Grössen h sind, paarweis zusammengestellt, relativ prim. Denn hätten z. B. h_1 und h_2 oder aber h_1 und h_6 noch einen gemeinschaftlichen Factor, so wäre im einen Falle g_1, im anderen f zu klein gewählt worden. Daher enthält z B. A'' neben einander die Factoren h_1, h_2, h_3, und wir erhalten die Ansätze:

$$A'' = h_1 h_2 h_3 a; \quad B'' = h_1 h_4 h_5 b; \quad C'' = h_2 h_4 h_6 c; \quad D'' = h_3 h_5 h_6 d$$

Also ist nun:

$$A = fg_1 g_2 g_3 h_1 h_2 h_3 a \quad \Big| \quad C = fg_1 g_3 g_4 h_2 h_4 h_6 c$$
$$B = fg_1 g_2 g_4 h_1 h_4 h_5 b \quad \Big| \quad D = fg_2 g_3 g_4 h_3 h_5 h_6 d$$

Wir behaupten nun: der Generalnenner von A, B, C, D ist

$$N = fg_1g_2g_3g_4h_1h_2h_3h_4h_5h_6abcd = f.\pi g.\pi h.abcd$$

Offenbar ist N überhaupt teilbar durch A, B, C, D. Dass aber N die kleinste Zahl dieser Art ist, beweisen wir, indem wir zeigen, dass die vier Quotienten

$$Q_1 = \frac{N}{A}, \quad Q_2 = \frac{N}{B}, \quad Q_3 = \frac{N}{C}, \quad Q_4 = \frac{N}{D}$$

keinen Factor gemeinschaftlich haben. Es ist:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{h_6cd}{h_6cd} \cdot \frac{g_4h_4h_5b}{g_3h_2h_3a} \quad \text{und} \quad \frac{Q_3}{Q_4} = \frac{h_1ab}{h_1ab} \cdot \frac{g_2h_3h_5d}{g_1h_2h_4c}$$

Nun dürfen nach der Definition von g_1 die drei Quotienten

$$\frac{A'}{g_1} = g_2g_3h_1h_2h_3a; \quad \frac{B'}{g_1} = g_2g_4h_1h_4h_5b; \quad \frac{C'}{g_1} = g_3g_4h_2h_4h_6c$$

keinen Factor mehr gemeinschaftlich haben; Factoren, die zweien dieser Quotienten gemeinsam sind, müssen also zum jedesmaligen dritten relativ prim sein. So erhalten wir: g_2h_1 ist relativ prim zu $g_3g_4h_2h_4h_6c$ u. s. w. Aehnliche Bedingungen ergeben sich aus der Definition von g_2, g_3 und g_4. — Ferner müssen nach der Definition von h_1 die Quotienten

$$\frac{A''}{h_1} = h_2h_3a \quad \text{und} \quad \frac{B''}{h_1} = h_4h_5b$$

relativ prim sein u. s. f. Stellt man so sämtliche Bedingungen auf, so erhält man folgende Tabelle, in der die relativen Primzahlen bloss durch einen zwischengesetzten Strich als solche bezeichnet worden sind:

g_2h_1	$g_3g_4h_2h_4h_6c$	g_1h_2	$g_2g_4h_3h_5h_6d$	h_2h_3a	h_4h_5b
g_3h_2	$g_2g_4h_1h_4h_5b$	g_2h_3	$g_1g_4h_2h_4h_6c$	h_1h_3a	h_4h_6c
g_4h_4	$g_2g_3h_1h_2h_3a$	g_4h_6	$g_1g_2h_1h_2h_3a$	h_1h_2a	h_5h_6d
g_1h_1	$g_3g_4h_3h_5h_6d$	g_1h_4	$g_2g_3h_3h_5h_6d$	h_1h_5b	h_2h_6c
g_3h_3	$g_1g_4h_1h_4h_5b$	g_2h_5	$g_1g_3h_2h_4h_6c$	h_1h_4b	h_3h_6d
g_4h_5	$g_1g_3h_1h_2h_3a$	g_3h_6	$g_1g_2h_1h_4h_5b$	h_2h_4c	h_3h_5d

Aus der Tabelle folgt (was man teilweise schon weiss): 1) alle g sind unter einander relativ prim; 2) ebenso alle h; 3) ebenso a, b, c, d unter einander; ausserdem aber 4) (bei derselben Schreibweise wie soeben):

g_1	h_3, h_5, h_6, d	h_1	g_3, g_4, c, d	a	g_4, h_4, h_5, h_6
g_2	h_2, h_4, h_6, c	h_2	g_2, g_4, b, d	b	g_3, h_2, h_3, h_6
g_3	h_1, h_4, h_5, b	h_3	g_1, g_4, b, c	c	g_2, h_1, h_3, h_5
g_4	h_1, h_2, h_3, a	h_4	g_2, g_3, a, d	d	g_1, h_1, h_2, h_4
		h_5	g_1, g_3, a, c		
		h_6	g_1, g_2, a, b		

Hiernach erkennen wir nun, dass die in den Quotienten $\frac{Q_1}{Q_2}$ und $\frac{Q_3}{Q_4}$ vorkommenden Brüche $\frac{g_4 h_4 h_5 b}{g_3 h_2 h_3 a}$ und $\frac{g_2 h_3 h_5 d}{g_1 h_2 h_4 c}$ unkürzbar sind, und dass also die Producte $h_6 cd$ und $h_1 ab$ die grössten gemeinschaftlichen Teiler von Q_1 und Q_2, von Q_3 und Q_4 darstellen. Diese beiden Producte sind aber nach der obigen Tabelle relativ prim. Daher haben die vier Quotienten keinerlei Factoren gemeinsam, und N ist wirklich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, D.

Nun behaupteten wir, N lasse sich finden durch die Formel:

$$N = \frac{ABCD \,.\, \pi d'''}{\pi d'' \,.\, d''''}$$

Man erhält:

$$ABCD = f^4 \,.\, (\pi g)^3 \,.\, (\pi h)^2 \,.\, abcd$$

$$\pi d'' = fg_1g_2h_1 \cdot fg_1g_3h_2 \cdot fg_2g_3h_3 \cdot fg_1g_4h_4 \cdot fg_2g_4h_5 \cdot fg_3g_4h_6 = f^6 \,.\, (\pi g)^3 \,.\, \pi h$$

$$\pi d''' = fg_1 \cdot fg_2 \cdot fg_3 \cdot fg_4 = f^4 \,.\, \pi g$$

$$d'''' = f$$

folglich:

$$\frac{ABCD \,.\, \pi d'''}{\pi d'' \,.\, d''''} = \frac{f^8 \,.\, (\pi g)^4 \,.\, (\pi h)^2 \,.\, abcd}{f^7 \,.\, (\pi g)^3 \,.\, \pi h} = f \,.\, \pi g \,.\, \pi h \,.\, abcd, \text{ d. h. } = N$$

Allgemein gilt für m Nenner $ABC \ldots L$ das Gesetz, dass ihr Generalnenner ist

$$N = \frac{AB \ldots L \,.\, \pi d''' \,.\, \pi d^{V} \ldots}{\pi d'' \,.\, \pi d^{IV} \,.\, \pi d^{VI} \ldots} \qquad (1)$$

Diese Formel, die natürlich bloss für die Theorie, nicht auch für die Rechenpraxis Bedeutung besitzt, beweisen wir folgendermassen. Die Primzahlen, die in den Grössen $AB \ldots L$ überhaupt vorkommen, mögen $p_1 p_2 \ldots p_k$ heissen. Dann können wir ansetzen:

$$\left.\begin{array}{l} A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \\ B = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ L = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k} \end{array}\right\} \text{wobei die Exponenten} \geqq 0 \text{ sind.}$$

Der Generalnenner wird sein:

$$N = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_k^{\nu_k} \tag{2}$$

wobei ν_1 die grösste der Zahlen $\alpha_1 \beta_1 \ldots \lambda_1$, ν_2 die grösste der Zahlen $\alpha_2 \beta_2 \ldots \lambda_2$ u. s. w. bezeichnet.

Die Gleichung (1) wird also richtig sein, wenn sich beweisen lässt, dass

$$p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_k^{\nu_k} = \frac{p_1^{\alpha_1+\beta_1+\ldots+\lambda_1+\Sigma\omega_1'''+\Sigma\omega_1^{V}+\ldots} \cdot p_2^{\ldots} \cdot p_3^{\ldots} \ldots}{p_1^{\Sigma\omega_1''+\Sigma\omega_1^{IV}+\ldots} \cdot p_2^{\ldots} \cdot p_3^{\ldots} \ldots}$$

ist. Hierbei bezeichnet ω_1'' immer die kleinere von zwei nach Art von Combinationen ohne Wiederholung aus der Reihe $\alpha_1 \beta_1 \ldots \lambda_1$ herausgegriffenen Zahlen, und falls solche zwei Zahlen von gleicher Grösse sind, eine derselben; ebenso ist ω_1''' immer die kleinste von drei solchen Zahlen u. s. w. Die Richtigkeit der letzten Gleichung ist bewiesen, wenn sich die Exponenten der einzelnen Primzahlen beiderseits als gleich gross herausstellen; dieser Nachweis braucht nur für einen beliebigen Primfactor, z. B für p_i geführt zu werden. Die zu beweisende Gleichung lautet also:

$$\nu_i = \alpha_i + \beta_i + \ldots + \lambda_i - \Sigma\omega_i'' + \Sigma\omega_i''' - \Sigma\omega_i^{IV} + - \ldots \tag{3}$$

Wir müssen jetzt wissen, in welcher Reihenfolge die $\alpha_i \beta_i \ldots \lambda_i$ ihrer Grösse nach auf einander folgen. Wir setzen deshalb voraus, dass die m Zahlen A, B, ... L von vornherein so geordnet worden sind, dass

$$\alpha_i \geqq \beta_i \geqq \gamma_i \geqq \ldots \geqq \lambda_i$$

ist. Dann ist $\nu_i = \alpha_i$, und die zu beweisende Gleichung (3) geht über in

$$0 = \beta_i + \gamma_i + \ldots + \lambda_i - \Sigma\omega_i' + \Sigma\omega_i''' - \Sigma\omega_i^{IV} + - \ldots \tag{4}$$

Um $\Sigma\omega_i''$ zu bilden, haben wir von folgenden Zahlenverbindungen:

$\alpha_i\beta_i, \alpha_i\gamma_i, \ldots \alpha_i\lambda_i, \beta_i\gamma_i, \ldots \beta_i\lambda_i, \gamma_i\delta_i, \ldots\ldots \varkappa_i\lambda_i$

jedesmal die kleinere Zahl zu wählen und alle diese kleineren Zahlen zu addiren. Sollten zwei oder mehr benachbarte Grössen gleich gross sein, z. B. β_i, γ_i, δ_i, so ist es an sich gleichgültig, ob wir bei Aufstellung der Amben $\beta_i\gamma_i$, $\beta_i\delta_i$, $\gamma_i\delta_i$ der gesuchten Summe die Beiträge β_i oder γ_i oder δ_i zuführen. Wir setzen aber fest, dass auch in diesen Fällen stets die als späteres Element angeordnete Zahl gewählt werden soll, also in dem genannten Beispiel $\gamma_i + \delta_i + \delta_i$. Sonach erhalten wir:

$$\Sigma\omega_i'' = \left\{\begin{array}{r} \beta_i + \gamma_i + \delta_i + \ldots + \lambda_i \\ + \gamma_i + \delta_i + \ldots + \lambda_i \\ + \delta_i + \ldots + \lambda_i \\ + \ldots \\ + \lambda_i \end{array}\right\}$$
$$= \beta_i + 2\gamma_i + 3\delta_i + \ldots + (m-1)\lambda_i$$

Allgemein wollen wir jetzt $\Sigma\omega_i^{(h)}$ bilden, wobei

$$h \leqq m$$

sein muss. Dazu haben wir alle Combinationen der Zahlen $\alpha_i\beta_i \ldots \lambda_i$ zur $h$ten Classe ohne Wiederholung zu bilden, aus jeder Combination die kleinste Zahl — oder besser gesagt: die jedesmal an letzter Stelle stehende Zahl — herauszugreifen und die so gewonnenen Zahlen zu addiren. Dabei wird eine beliebige Zahl ζ_i so oft in der Summe vorkommen, als es Combinationen der Elemente $\alpha_i\beta_i \ldots \lambda_i$ zur $h$ten Classe giebt, in denen ζ_i das an letzter Stelle stehende Element ist, oder auch: als es Combinationen der Elemente $\alpha_i\beta_i \ldots \zeta_i$ zu je h giebt, worin das letzte Element ζ_i wirklich vorkommt. Ist nun ε_i das dem ζ_i unmittelbar vorausgehende Element, so lässt sich unser Resultat auch so formuliren: ζ_i wird in der Summe $\Sigma\omega_i^{(h)}$ so oft vorkommen, als es Combinationen der Elemente $\alpha_i\beta_i \ldots \varepsilon_i$ zu je $h-1$ giebt. Ist ζ_i das $r$te, also ε_i das $(r-1)$te Element, so kommt also ζ_i $(r-1)_{h-1}$ mal vor. Also erhalten wir:

$$\Sigma\omega_i^{(h)} = 1_{h-1}\beta_i + 2_{h-1}\gamma_i + 3_{h-1}\delta_i + \ldots + (r-1)_{h-1}\zeta_i + \ldots$$
$$\ldots + (m-1)_{h-1}\lambda_i$$

Die Gleichung (4) wird nun dann richtig sein, wenn sich nachweisen lässt, dass jede einzelne unter den Zahlen $\beta_i\gamma_i \ldots \lambda_i$ nach der Zusammenfassung verschwindet. Der Coefficient von ζ_i in dieser Gleichung aber wird:

$$1-(r-1)_1+(r-1)_2-(r-1)_3+-\ldots+(-1)^{m-1}(r-1)_{m-1}$$

Da aber

$$r \leqq m$$

ist, ist dieser Ausdruck identisch mit

$$1-(r-1)_1+(r-1)_2-+\ldots+(-1)^{r-1}(r-1)_{r-1}=(1-1)^{r-1}=0$$

Hiermit ist die Richtigkeit der Gleichung (4) und somit auch der Lehrsatz (1) bewiesen. Schreiben wir statt des Productes aus den Zahlen $A, B, \ldots L$ der Gleichförmigkeit halber $\pi d'$, so haben wir das Resultat:

$$N=\frac{\pi d' \,.\, \pi d''' \,.\, \pi d^{V} \ldots}{\pi d'' \,.\, \pi d^{IV} \,.\, \pi d^{VI} \ldots}$$

Beispiel zur Erläuterung der Gleichung (3). Es handle sich um fünf Zahlen $A, B, \ldots,$ in denen neben anderen Primfactoren die Primzahl p vorkommt und zwar in den Potenzen:

$$p^5, \quad p^1, \quad p^5, \quad p^7, \quad p^{\varepsilon} \quad (\varepsilon \text{ entweder } = 1 \text{ oder } = 0)$$

Wir ordnen die Exponenten nach ihrer Grösse:

$$7, \quad 5, \quad 5, \quad 1, \quad \varepsilon$$

Dann soll nach Gleichung (3) sein:

$$7=(7+5+5+1+\varepsilon)-(5+5+1+\varepsilon+5+1+\varepsilon+1+\varepsilon+\varepsilon)$$
$$+(5+1+\varepsilon+1+\varepsilon+\varepsilon+1+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)-(1+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)+\varepsilon$$

Dies bedeutet für $\varepsilon=0$:

$$7=18-18+8-1$$

und für $\varepsilon=1$:

$$7=19-22+14-5+1$$

beides Identitäten.

Zwei Beispiele zu Gleichung (1).

I) $A=2^3 \,.\, 5^2 \,.\, 7$; $B=2 \,.\, 3^3 \,.\, 7$; $C=3^2 \,.\, 11$;
$D=5 \,.\, 7 \,.\, 11$

Die d'' sind hier:

$$2 \,.\, 7; \quad 1; \quad 5 \,.\, 7; \quad 3^2; \quad 7; \quad 11$$

die d''' sind

$$1; \quad 7; \quad 1; \quad 1$$

endlich ist

$$d^{IV}=1$$

Also wird

$$\frac{\pi d' \cdot \pi d'''}{\pi d'' \cdot d^{IV}} = \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \times 7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \times 1}$$
$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11, \text{ d. h. das richtige } N$$

II) $A = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$; $B = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$; $C = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$;
$D = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

Die d' sind hier:

$$3^2;\ 2 \cdot 3 \cdot 7;\ 2 \cdot 3^3 \cdot 7;\ 3 \cdot 11;\ 3^2 \cdot 5;\ 2 \cdot 3 \cdot 7$$

die d''' sind

$$3;\ 3^2;\ 2 \cdot 3 \cdot 7;\ 3; \text{ endlich ist}$$
$$d^{IV} = 3$$

Folglich:

$$\frac{\pi d' \cdot \pi d'''}{\pi d'' \cdot d^{IV}} = \frac{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \times 2 \cdot 3^5 \cdot 7}{2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \times 3}$$
$$= 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = N$$

III. Addition gewisser aus den combinatorischen Operationen hervorgehender Zahlen.

Stellung der Aufgabe. Gegeben seien Elemente, die entweder selbst Zahlen sind oder Zahlenwerte besitzen. Diese Elemente sollen permutirt, variirt oder combinirt werden. Die einzelne Complexion erscheint in der Form einer mehrziffrigen Zahl, z B. die Complexion 4073 als viertausend dreiundsiebzig. Um indes die Aufgabe etwas allgemeiner zu fassen, sollen die Stellenwerte der einzelnen Elemente in einer Complexion wie 4073 nicht unbedingt Potenzen der 10 sein, auch nicht notwendig Potenzen einer anderen Zahl, sondern beliebig gegebene Werte $A_1 A_2 \ldots$, sodass der Complexion 4073 der Wert $4A_1 + 7A_3 + 3A_4$ zuzuschreiben wäre. Hiernach sind als Elemente auch mehrziffrige ganze Zahlen, sowie Brüche, negative Zahlen u. s. w. zulässig. Die Complexion $cafgd$ hat jedenfalls den Wert $cA_1 + aA_2 + fA_3 + gA_4 + dA_5$. Solcher Werte gehen durch die vorgeschriebene Umstellung der Elemente eine grosse Zahl hervor: all diese Werte sollen addirt werden.

Lösung für Permutationen. Wir behandeln sogleich den allgemeinen Fall, dass unter den Elementen auch gleiche vorkommen: es seien α Elemente a, β Elemente b u. s. w. gegeben, kurz:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

Man nenne die Zahl aller Elemente n, also:

$$n = \alpha + \beta + \gamma \ldots$$

Steht a an vorderster Stelle, so hat es den Wert aA_1: solcher Complexionen, die mit a beginnen, giebt es $\frac{(n-1)!}{(\alpha-1)!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$; analog sind die Ausdrücke für b, c, ... Somit ist der Beitrag der an vorderster Stelle stehenden Elemente zu der zu bildenden Summe:

$$\left[\frac{a(n-1)!}{(\alpha-1)!\,\beta!\,\gamma!\ldots} + \frac{b(n-1)!}{\alpha!\,(\beta-1)!\,\gamma!\ldots} + \ldots\right] . A_1$$

$$= \frac{(n-1)!\,A_1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}(a\alpha + b\beta + \ldots) = \frac{(n-1)!\,q}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} . A_1$$

Hierbei ist

$$q = a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$$

die „Quersumme" der gegebenen Complexion.

Steht a an zweiter Stelle, so hat es den Wert aA_2', ebenso an dritter Stelle den Wert aA_3 u. s. w. Es giebt nun wieder $\frac{(n-1)!}{(\alpha-1)!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$ Complexionen, worin a an zweiter Stelle steht, und ebenso viele, worin es an dritter Stelle steht u. s. f. Analoges gilt für b, c, ...; daher erhält man als Ausdruck der gesuchten Summe:

$$S = \frac{(n-1)!\,q}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} . \Sigma A$$

Bemerkenswert ist bei diesem Resultat, dass nicht notwendig $\frac{(n-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$ eine ganze Zahl zu sein braucht, obwol es dies z. B. immer ist, wenn n eine Primzahl ist: in solchen Fällen hebt dann der Factor q (denn ΣA kann jeden beliebigen Wert annehmen, z. B. auch den Wert 1) den übrig bleibenden Nenner fort. Beispiele:

Für $n = 6$ ist

$$\frac{5!}{4!\,2!} = \frac{5}{2}, \text{ aber } 4a + 2b \equiv 0 \pmod 2$$

$$\frac{5!}{3!\,3!} = \frac{10}{3}, \text{ aber } 3a + 3b \equiv 0 \pmod 3$$

Für $n = 8$ ist

$$\frac{7!}{4!\,4!} = \frac{35}{4}, \text{ aber } 4a + 4b \equiv 0 \pmod 4$$

Die Ganzzahligkeit des Factors $\frac{(n-1)!\, q}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots}$ bei ganzzahligen Elementen $a, b, c \ldots$ ist also ein Nebenergebniss.

Beispiel zur obigen Summenformel:

$$\Sigma 1885 = \frac{3!\,22}{2!} \,.\, \Sigma A = 66\, \Sigma A$$

z. B. für $A_1 = 1000$, $A_2 = 100$, $A_3 = 10$, $A_4 = 1$:

$$= 66 \,.\, 1111 = 73326$$

für $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = A_4 = 0$ gleich $66 \,.\, 1 = 66$

für $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ gleich $66 \quad 4 = 264$

für $\Sigma A = 0$ gleich null.

Lösung für Variationen ohne Wiederholung. Die n Elemente $a b c \ldots n$ sollen z. B. zur sechsten Classe variiren. a kommt an erster und ebenso an zweiter, dritter Stelle u. s. w.

$$(n-1)\,(n-2) \ldots (n-5) \,\text{mal}$$

vor. Mit Berücksichtigung des Stellenwertes erhält man als Beitrag des a zur gesuchten Summe:

$$(n-1)\,(n-2) \ldots (n-5) \,.\, a \,.\, \Sigma A$$

Ganz dasselbe gilt für $b, c \ldots$; also:

$$S = (n-1)\,(n-2) \ldots (n-5) \,.\, q \,.\, \Sigma A$$

wobei

$$q = a + b + c + \ldots + n$$

allgemein für Variationen $k$ter Classe:

$$S = (n-1)\,(n-2) \ldots (n+1-k) \,.\, q \,.\, \Sigma A$$

Der Specialfall $k = n$ führt auf Permutationen mit lauter verschiedenen Elementen zurück: man erhält in Uebereinstimmung mit dem Obigen

$$S = (n-1)!\, q \,.\, \Sigma A$$

Variationen mit Wiederholung. Handelt es sich um die $k$te Classe, so tritt jedes Element n^{k-1}mal an jedem Platze auf, daher erhält man:

$$S = n^{k-1} \,.\, q \,.\, \Sigma A$$

Combinationen ohne Wiederholung. Wir führen unsere Betrachtungen zunächst an einem Beispiel durch: die 8 Elemente

abcdefgh mögen zur 5ten Classe ohne Wiederholung combinirt werden. An vorderster Stelle können die Elemente a, b, c, d stehen und zwar bezüglich 7_4, 6_4, 5_4, 4_4 mal. Mit Rücksicht auf die Werte der *abc* . . . und ihren Stellenwert erhalten wir als erste Teilsumme:

$$\mathrm{I} = (a \,.\, 7_4 + b \,.\, 6_4 + c \,.\, 5_4 + d \,.\, 4_4) A_1$$

An zweiter Stelle sind die Elemente b, c, d, e möglich und zwar $1 \,.\, 6_3$, $2 \,.\, 5_3$, $3 \,.\, 4_3$, $4 \,.\, 3_3$ mal. Aehnliches gilt für die späteren Stellen. Man erhält also die weiteren Teilsummen:

$$\mathrm{II} = (b \,.\, 1 \,.\, 6_3 + c \,.\, 2 \,.\, 5_3 + d \,.\, 3 \,.\, 4_3 + e \,.\, 4 \,.\, 3_3) A_2$$
$$\mathrm{III} = (c \,.\, 2_2 \,.\, 5_2 + d \,.\, 3_2 \,.\, 4_2 + e \,.\, 4_2 \,.\, 3_2 + f \,.\, 5_2 \,.\, 2_2) A_3$$
$$\mathrm{IV} = (d \,.\, 3_3 \,.\, 4_1 + e \,.\, 4_3 \,.\, 3_1 + f \,.\, 5_3 \,.\, 2_1 + g \,.\, 6_3 \,.\, 1_1) A_4$$
$$\mathrm{V} = (e \,.\, 4_4 + f \,.\, 5_4 + g \,.\, 6_4 + h \,.\, 7_4) A_5$$

Auf Summen von ähnlicher Form stösst man nun, wenn man eine vollständig durchgeführt gedachte Tabelle von Combinationen in bestimmter Weise in Teile zerlegt. Es seien etwa die 12 Elemente *ab* . . . *m* zur 7ten Classe combinirt und zwar ohne Wiederholung. An erster Stelle sind die Elemente *abcdef* möglich, und das Ganze (12_7) zerlegt sich folgendermassen in Teile („Ordnungen“):

$$12_7 = 11_6 + 10_6 + 9_6 + 8_6 + 7_6 + 6_6$$

Ebenso sind an zweiter Stelle die Elemente b . . . g, an dritter die Elemente c . . . h möglich, und man erhält, wenn man die Häufigkeit dieser Fälle erwägt, die ferneren Formeln:

$$12_7 = 1_1 \,.\, 10_5 + 2_1 \,.\, 9_5 + 3_1 \,.\, 8_5 + 4_1 \,.\, 7_5 + 5_1 \,.\, 6_5 + 6_1 \,.\, 5_5$$
$$= 2_2 \,.\, 9_4 + 3_2 \,.\, 8_4 + 4_2 \,.\, 7_4 + 5_2 \,.\, 6_4 + 6_2 \,.\, 5_4 + 7_2 \,.\, 4_4$$
$$= 3_3 \,.\, 8_3 + 4_3 \,.\, 7_3 + 5_3 \,.\, 6_3 + 6_3 \,.\, 5_3 + 7_3 \,.\, 4_3 + 8_3 \,.\, 3_3$$
$$= 4_4 \,.\, 7_2 + \ldots \text{ wie oben}$$

u. s. w. wie oben.

Genau dieselben Resultate erhält man, wenn man die 6 Elemente *abcdef* zur 7ten Classe mit Wiederholung combinirt und dieselben Ueberlegungen anstellt wie soeben. Die gefundenen Formeln lassen sich allgemein folgendermassen ausdrücken:

$$(\alpha) \quad k_k (l+m)_l + (k+1)_k (l+m-1)_l + (k+2)_k (l+m-2)_l + \ldots$$
$$\ldots + (k+m)_k l_l = (k+l+m+1)_{k+l+1}$$

Diese Formel lässt sich nun zur Ermittlung der oben gefundenen Teilsummen dann anwenden, wenn *abc* . . . *h* die Werte 123 . . 8 besitzen oder ihnen wenigstens proportional sind:

$$a = u,\quad b = 2u,\quad c = 3u, \ldots h = 8u$$

Die erste Teilsumme wird jetzt:

$$(1_1 \,.\, 7_4 + 2_1 \,.\, 6_4 + 3_1 \,.\, 5_4 + 4_1 \,.\, 4_4) A_1 u = 9_6 A_1 u$$

Die zweite Teilsumme lässt sich schreiben:

$$2 \,.\, (2_2 \,.\, 6_3 + 3_2 \,.\, 5_3 + 4_2 \,.\, 4_3 + 5_2 \,.\, 3_3) A_2 u = 2 \,.\, 9_6 A_2 u$$

Ebenso die dritte:

$$3 \,.\, (3_3 \,.\, 5_2 + 4_3 \,.\, 4_2 + 5_3 \,.\, 3_2 + 6_3 \,.\, 2_2) A_3 u = 3 \,.\, 9_6 A_3 u$$

u. s. w. Man erhält:

$$S = 9_6 u (A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 5A_5) = 9_6 u \Sigma i A_i \qquad (\beta)$$

Wählt man z. B. $u = 1$ und $A_1 = 10^4$, $A_2 = 10^3$ u. s. w., so hat man das bemerkenswerte Resultat:

$$12345 + 12346 + \ldots + 45678 = 9_6 \,.\, 12345 = 84 \,.\, 12345$$

Die Summe aller Combinationszahlen ist hier also ein Vielfaches der kleinsten unter ihnen.

Man erkennt jetzt leicht, welche erste Verallgemeinerung bei unserer Aufgabe möglich ist. Man wähle die Elemente $ab \ldots h$ als Glieder einer beliebigen arithmetischen Reihe erster Ordnung:

$$a = u + v,\quad b = 2u + v,\quad c = 3u + v, \ldots h = 8u + v$$

Jede einzelne Complexion, z. B. $bdefh$, mit den jetzigen Werten der Elemente $a \ldots h$ übertrifft die gleichnamige Complexion mit den früheren Werten um $vvvvv$, d. h. um

$$v(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = v \Sigma A_i$$

Da wir im ganzen 8_5 Complexionen zu addiren haben, so erhalten wir:

$$S' = 9_6 u \Sigma i A_i + 8_5 v \Sigma A_i \qquad (\beta')$$

Beispiele:

$$23456 + 23457 + \ldots + 56789 = 9_6 \,.\, 12345 + 8_5 \,.\, 11111$$

$87654 + 87653 + \ldots + 54321$ giebt für $u = -1$, $v = 9$:

$$= 8_5 \,.\, 9 \,.\, 11111 - 9_6 \,.\, 12345 = 6 \,.\, 9_6 \,.\, 11111 - 9_6 \,.\, 12345$$
$$= 9_6 \,.\, (66666 - 12345) = 9_6 \,.\, 54321$$

ähnlich dem ursprünglichen Beispiel.

$$98765 + 98764 + \ldots + 65432 = 9_6 \,.\, 54321 + 8_5 \,.\, 11111$$
$$76543 + 76542 + \ldots + 43210 = 9_6 \,.\, 54321 - 8_5 \,.\, 11111$$

Unsere Betrachtungen lassen sich nun dahin verallgemeinern, dass die Elemente $ab \dots h$ als Glieder einer beliebigen arithmetischen Reihe höherer Ordnung gewählt werden können, und es wird sich herausstellen, dass die Aufgabe hiermit in voller Allgemeinheit ihre Lösung findet.

Als Beispiel wählen wir eine Reihe vierter Ordnung; es sei nämlich:

$$a, b, c \dots h = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2 \dots 7$$

Um die Gleichung (α) anwenden zu können, müssen wir die Elemente $a \dots h$ auf eine andere Form bringen. Man bestimme für ein beliebiges k die Coefficienten $xyzuv$ derart, dass identisch ist:

$$\alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon = x(n+k)_4 + y(n+k-1)_3 \\ + z(n+k-2)_2 + u(n+k-3)_1 + v$$

Diese Bestimmung ist stets möglich durch ein System linearer Gleichungen. Im Falle einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung z. B. erhält man die Identität:

$$\alpha n^2 + \beta n + \gamma = 2\alpha(n+k)_2 + (\beta - \alpha(2k-1))(n+k-1)_1 \\ + (\alpha(k-1)^2 - \beta(k-1) + \gamma)$$

Hiernach wähle man (im obigen Beispiel) $k = 4$ und allgemein im Falle einer arithmetischen Reihe $r$ter Ordnung $k = r$. Da für das Element a $n = 0$ ist, für b $n = 1$ u s. f., so erhält man die folgenden Ausdrücke für die Elemente:

$a = x \,.\, 4_4 + y \,.\, 3_3 + z \,.\, 2_2 + u \,.\, 1_1 + v$	7_4				
$b = x \,.\, 5_4 + y \,.\, 4_3 + z \,.\, 3_2 + u \,.\, 2_1 + v$	6_4	$1 \,.\, 6_3$			
$c = x \,.\, 6_4 + y \,.\, 5_3 + z \,.\, 4_2 + u \,.\, 3_1 + v$	5_4	$2 \,.\, 5_3$	$2_2 \,.\, 5_2$		
$d = x \,.\, 7_4 + y \,.\, 6_3 + z \,.\, 5_2 + u \,.\, 4_1 + v$	4_4	$3 \,.\, 4_3$	$3_2 \,.\, 4_2$	$3_3 \,.\, 4_1$	
$e = x \,.\, 8_4 + y \,.\, 7_3 + z \,.\, 6_2 + u \,.\, 5_1 + v$		$4 \,.\, 3_3$	$4_2 \,.\, 3_2$	$4_3 \,.\, 3_1$	4_4
$f = x \,.\, 9_4 + y \,.\, 8_3 + z \,.\, 7_2 + u \,.\, 6_1 + v$			$5_2 \,.\, 2_2$	$5_3 \,.\, 2_1$	5_4
$g = x \,.\, 10_4 + y \,.\, 9_3 + z \,.\, 8_2 + u \,.\, 7_1 + v$				$6_3 \,.\, 1_1$	6_4
$h = x \,.\, 11_4 + y \,.\, 10_3 + z \,.\, 9_2 + u \,.\, 8_1 + v$					7_4

Die beigefügten 5 Factoren-Columnen sind den oben aufgestellten Ausdrücken für die einzelnen Teilsummen I II III IV V entsprechend gewählt. Mit Benutzung der vordersten Factoren-Columne und der Gleichung (α) erhalten wir so als Beitrag der vordersten Stelle:

$$\text{I} = A_1(x \,.\, 12_9 + y \,.\, 11_8 + z \,.\, 10_7 + u \,.\, 9_6 + v \,.\, 8_5)$$

Bei Ermittlung des Beitrags der zweiten Stelle schreibe man statt der Producte $x \cdot 5_4 \cdot 1 \cdot 6_3$, $x \cdot 6_4 \cdot 2 \cdot 5_3$, $x \cdot 7_4 \cdot 3 \cdot 4_3$, $x \cdot 8_4 \cdot 4 \cdot 3_3$ die damit identischen $5x \cdot 5_5 \cdot 6_3$, $5x \cdot 6_5 \cdot 5_3$, $5x \cdot 7_5 \cdot 4_3$, $5x \cdot 8_5 \cdot 3_3$ und verfahre ähnlich mit den Factoren von y, z, u, v. Es ergiebt sich:

$$\text{II} = A_2(5x \cdot 12_9 + 4y \cdot 11_8 + 3z \cdot 10_7 + 2u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

Die dritte Teilsumme erfordert folgende Umformung:

$$x \cdot 6_4 \cdot 2_2 \cdot 5_2 = \frac{6!}{4!\ 2!} x \cdot 6_6 \cdot 5_2 = 6_2 x \cdot 6_6 \cdot 5_2$$

$$x \cdot 7_4 \cdot 3_2 \cdot 4_2 = \frac{6!}{4!\ 2!} x \cdot 7_6 \cdot 4_2 \quad \text{u. s. w.}$$

sodass das Product, das den Factor x enthält, die Form annimmt:

$$6_2 x \cdot (6_6 \cdot 5_2 + 7_6 \cdot 4_2 + 8_6 \cdot 3_2 + 9_6 \cdot 2_2) = 6_2 x \cdot 12_9$$

So erhalten wir:

$$\text{III} = A_3(6_2 x \cdot 12_9 + 5_2 y \cdot 11_8 + 4_2 z \cdot 10_7 + 3_2 u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

Ebenso:

$$\text{IV} = A_4(7_3 x \cdot 12_9 + 6_3 y \cdot 11_8 + 5_3 z \cdot 10_7 + 4_3 u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

und:

$$\text{V} = A_5(8_4 x \cdot 12_9 + 7_4 y \cdot 11_8 + 6_4 z \cdot 10_7 + 5_4 u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

Fassen wird endlich die Teilsummen zusammen, so ergiebt sich:

$$S = 12_9 x \Sigma(i+3)_{i-1} A_i + 11_8 y \Sigma(i+2)_{i-1} A_i + 10_7 z \Sigma(i+1)_{i-1} A_i \\ + 9_6 u \Sigma i_{i-1} A_i + 8_5 v \Sigma A_i$$

oder:

$$S = 12_3 x \Sigma(i+3)_4 A_i + 11_3 y \Sigma(i+2)_3 A_i + 10_3 z \Sigma(i+1)_2 A_i \\ + 9_3 u \Sigma i_1 A_i + 8_3 v \Sigma A_i \qquad (\gamma)$$

Für $x = y = z = 0$ erhält man wieder die Formel (β').

Wir haben bisher immer das Beispiel von 8 Elementen zu Grunde gelegt, die zur 5. Classe zu combiniren waren. Haben wir allgemein n Elemente zur k ten Classe zu combiniren, so treten an Stelle der Factoren

$$8_5 \quad 9_6 \quad 10_7 \quad 11_8 \quad 12_9 \quad \text{die folgenden auf:}$$

$$n_k \quad (n+1)_{k+1} \; . \; . \; . \; (n+4)_{k+4}$$

oder:

$$n_{n-k} \quad (n+1)_{n-k} \; . \; . \; . \; (n+4)_{n-k}$$

So wenigstens, wenn wir es in der Endformel, die (γ) entspricht, wieder mit 5 Posten zu tun haben: diese 5 Posten rührten her von der arithmetischen Reihe 4ter Ordnung. Für eine Reihe $r$ter Ordnung bekommen wir $(r+1)$ Posten mit den Factoren:

$$n_{n-k}\ (n+1)_{n-k}\ (n+2)_{n-k}\ .\ .\ .\ (n+r)_{n-k}$$

Die n gegebenen Elemente lassen sich wieder auf die Form bringen:

$$a = xr_r + y(r-1)_{r-1} + z(r-2)_{r-2} + \ .\ .\ .\ + u\ .\ 1_1 + v$$
$$b = x(r+1)_r + yr_{r-1} + z(r-1)_{r-2} + \ .\ .\ .\ + u\ .\ 2_1 + v$$
$$c = x(r+2)_r + y(r+1)_{r-1} + zr_{r-2} + \ .\ .\ .\ + u\ .\ 3_1 + v$$
. . . .
. . . .

Endlich steigen die zu den A_i hinzutretenden Factoren bis zu $(i+r-1)_r$ an. Die allgemeine Summenformel wird also:

$$S = (n+r)_{n-k}x\ .\ \sum_{i=1}^{k}(i+r-1)_r A_i + (n+r-1)_{n-k}y\ .\ \Sigma(i+r-2)_{r-1}A_i$$
$$+ (n+r-2)_{n-k}z\ .\ \Sigma(i+r-3)_{r-2}A_i + \ .\ .\ .\ + (n+1)_{n-k}u\ .\ \Sigma i_1 A_i$$
$$+ n_{n-k}v\ .\ \Sigma A_i \qquad (\delta)$$

Hiermit ist die Aufgabe allgemein gelöst, denn die Reihe der n scheinbar vielleicht gesetzlos auf einander folgenden Elemente lässt sich stets mindestens als arithmetische Reihe $(n-1)$ter Ordnung darstellen. Zugleich ergiebt sich, dass stets

$$r \leqq n-1 \text{ ist}$$

Ein Beispiel mag die Richtigkeit der Formel (δ) erhärten. Es handle sich um Combinationen der 5 Elemente 12356 zur dritten Classe. Die unmittelbare Addition ergiebt für $A_1 = 100$, $A_2 = 10$, $A_3 = 1$:

$$123 + 125 + 126 + 135 + 136 + 156 + 235 + 236 + 256 + 356 = 1884$$

Die Elemente 12356 müssen, wie die Aufstellung der Differenzenreihen 1ter, 2ter und 3ter Ordnung zweifellos macht, als Glieder einer Reihe 4ter Ordnung aufgefasst werden, sodass hier der Fall

$$r = n-1$$

vorliegt. Man setze also in Uebereinstimmung mit unseren allgemeinen Festsetzungen:

$$1 = x \,.\, 4_4 + y \,.\, 3_3 + z \,.\, 2_2 + u \,.\, 1_1 + v = x + y + z + u + v$$
$$2 = x \,.\, 5_4 + y \,.\, 4_3 + z \,.\, 3_2 + u \,.\, 2_1 + v = 5x + 4y + 3z + 2u + v$$
$$3 = x \,.\, 6_4 + y \,.\, 5_3 + z \,.\, 4_2 + u \,.\, 3_1 + v = 15x + 10y + 6z + 3u + v$$
$$5 = x \,.\, 7_4 + y \,.\, 6_3 + z \,.\, 5_2 + u \,.\, 4_1 + v = 35x + 20y + 10z + 4u + v$$
$$6 = x \,.\, 8_4 + y \,.\, 7_3 + z \,.\, 6_2 + u \,.\, 5_1 + v = 70x + 35y + 15z + 5u + v$$

Man erhält:

$$x = -3, \quad y = 13, \quad z = -21, \quad u = 16, \quad v = -4$$

Ueberdies ist

$$n = 5, \quad k = 3, \quad r = 4$$

somit ergiebt (δ):

$$S = 9_2 \,.\, (-3)\Sigma(i+3)_4 A_i + 8_2 \,.\, 13\Sigma(i+2)_3 A_i + 7_2 \,.\, (-21)\Sigma(i+1)_2 A_i$$
$$+ 6_2 \,.\, 16\Sigma i A_i + 5_2 \,.\, (-4)\Sigma A_i$$
$$= -108\overset{1}{\Sigma} + 364\overset{2}{\Sigma} - 441\overset{3}{\Sigma} + 240\overset{4}{\Sigma} - 40\overset{5}{\Sigma}$$

Es ist aber:

$$\overset{1}{\Sigma} = 100+50+15 = 165; \quad \overset{2}{\Sigma} = 100+40+10 = 150$$
$$\overset{3}{\Sigma} = 100+30+6 = 136; \quad \overset{4}{\Sigma} = 100+20+3 = 123; \quad \overset{5}{\Sigma} = 111$$

Also:

$$S = -17820 + 54600 - 59976 + 29520 - 4440 = 1884, \text{ wie oben.}$$

Combinationen mit Wiederholung. Einfache Aufgaben aus diesem Gebiet lassen sich auf Combinationen ohne Wiederholung zurückführen. Es handle sich z. B. um die 4 Elemente 0 1 2 3, die zur 5ten Classe mit Wiederholung zu combiniren sind. Nun vergleiche man die Combinationen

00000, 00001, 00002, 00003, 00011, . . . 11111, 11112, . . .
. . . 33333

deren Anzahl 8_5 ist, mit den ebenfalls 8_5 Combinationen der 8 Elemente 12 . . . 8 zur 5ten Classe ohne Wiederholung:

12345, 12346, 12347, 12348, 12356, . . . 23456, 23457, . . .
. . . 45678

Jede Combination der ersten Art ist um 12345 kleiner als die homologe der zweiten Art. Die Combinationen zweiter Art sind oben addirt worden und ergaben die Summe $9_6 \,.\, 12345$, folglich finden wir für diejenigen der ersten Art:

$$S = 9_6 \,.\, 12345 - 8_5 \,.\, 12345 = (9_6 - 8_5) \,.\, 12345 = 8_6 \,.\, 12345$$

oder allgemeiner $= 8_6 \,.\, \Sigma i A_i$

Durch Fortführung der hier eingeleiteten Gedankenreihe könnten wir in Anlehnung an die bereits gefundene Lösung für Combinationen ohne Wiederholung die jetzige Frage durchführen für Elemente $abc \ldots$, die eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden und zwar in der von der früheren etwas abweichenden Form:

$$a = v, \quad b = u + v, \quad c = 2u + v, \quad d = 3u + v \quad \text{u, s. f.}$$

Wir ziehen es vor, das Problem von vornherein allgemeiner zu behandeln und wählen wieder das Beispiel einer Combination von 8 Elementen $ab \ldots h$, die eine arithmetische Reihe 4ter Ordnung bilden, zur 5ten Classe. Sei ursprünglich wieder:

$$a, b, c, \ldots h = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots 7$$

so hat man jetzt eine etwas andere Umformung dieses Ausdrucks vorzunehmen als früher, nämlich:

$$\alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon = x(n+k)_4 + y(n+k)_3 + z(n+k)_2 + u(n+k)_1 + v$$

und ferner hat man, um Gleichung (α) anwenden zu können, k hier $= 0$ zu wählen. Da nun die von den einzelnen Stellen der Combinationen herrührenden Teilsummen jetzt folgende Gestalt annehmen:

$$\mathrm{I} = A_1(a \,.\, 11_4 + b \,.\, 10_4 + \ldots + h \,.\, 4_4)$$
$$\mathrm{II} = A_2(a \,.\, 1 \,.\, 10_3 + b \,.\, 2 \,.\, 9_3 + \ldots + h \,.\, 8 \,.\, 3_3)$$
$$\mathrm{III} = A_3(a \,.\, 2_2 \,.\, 9_2 + b \,.\, 3_2 \,.\, 8_2 + \ldots + h \,.\, 9_2 \,.\, 2_2)$$
u. s. w.

so erhalten wir die folgenden Ansätze für die Elemente und das beigefügte Factorenschema:

$a =$	v	11_4	$1_1 \,.\, 10_3$	$2_2 \,.\, 9_2$	$3_3 \,.\, 8_1$	4_4
$b =$	$1_1 u + v$	10_4	$2_1 \,.\, 9_3$	$3_2 \,.\, 8_2$	$4_3 \,.\, 7_1$	5_4
$c =$	$2_2 z + 2_1 u + v$	9_4	$3_1 \,.\, 8_3$	$4_2 \,.\, 7_2$	$5_3 \,.\, 6_1$	6_4
$d =$	$3_3 y + 3_2 z + 3_1 u + v$	8_4	$4_1 \quad 7_3$	$5_2 \,.\, 6_2$	$6_3 \,.\, 5_1$	7_4
$e =$	$4_4 x + 4_3 y + 4_2 z + 4_1 u + v$	7_4	$5_1 \,.\, 6_3$	$6_2 \,.\, 5_2$	$7_3 \,.\, 4_1$	8_4
$f =$	$5_4 x + 5_3 y + 5_2 z + 5_1 u + v$	6_4	$6_1 \,.\, 5_3$	$7_2 \,.\, 4_2$	$8_3 \,.\, 3_1$	9_4
$g =$	$6_4 x + 6_3 y + 6_2 z + 6_1 u + v$	5_4	$7_1 \,.\, 4_3$	$8_2 \,.\, 3_2$	$9_3 \,.\, 2_1$	10_4
$h =$	$7_4 x + 7_3 y + 7_2 z + 7_1 u + v$	4_4	$8_1 \,.\, 3_3$	$9_2 \,.\, 2_2$	$10_3 \,.\, 1_1$	11_4

Durch das bereits früher angewandte Verfahren ergeben sich jetzt die von den einzelnen Stellen herrührenden Teilsummen:

$$\begin{aligned}
\text{I} &= A_1(x \cdot 12_9 + y \cdot 12_8 + z \cdot 12_7 + u \cdot 12_6 + v \cdot 12_5)\\
\text{II} &= A_2(5x \cdot 12_9 + 4y \cdot 12_8 + 3z \cdot 12_7 + 2u \cdot 12_6 + v \cdot 12_5)\\
\text{III} &= A_3(6_2x \cdot 12_9 + 5_2y \cdot 12_8 + 4_2z \cdot 12_7 + 3_2u \cdot 12_6 + v \cdot 12_5)\\
\text{IV} &= A_4(7_3x \cdot 12_9 + 6_3y \cdot 12_8 + 5_3z \cdot 12_7 + 4_3u \cdot 12_6 + v \cdot 12_5)\\
\text{V} &= A_5(8_4x \cdot 12_9 + 7_4y \cdot 12_8 + 6_4z \cdot 12_7 + 5_4u \cdot 12_6 + v \cdot 12_5)
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
S = {} & 12_9x \cdot \Sigma(i+3)_{i-1}A_i + 12_8y \cdot \Sigma(i+2)_{i-1}A_i + 12_7z \cdot \Sigma(i+1)_{i-1}A_i\\
& + 12_6u \cdot \Sigma i_{i-1}A_i + 12_5v\Sigma A_i = 12_9x \cdot \Sigma(i+3)_4A_i + 12_8y \cdot \Sigma(i+2)_3A_i\\
& + 12_7z \cdot \Sigma(i+1)_2A_i + 12_6u \cdot \Sigma i_1A_i + 12_5v \cdot \Sigma A_i
\end{aligned}$$

Endlich mag die gewonnene Formel noch verallgemeinert werden. Ein Blick auf die oben gegebenen Ansätze für die Elemente und die beigefügten Factoren lehrt, dass im Falle von n Elementen $a_1\, a_2 \ldots a_n$, die zur $k$ten Classe zu combiniren sind, an die Stelle von 12_5, $12_6 \ldots 12_9$ die Factoren treten:

$$(n+k-1)_k, \quad (n+k-1)_{k+1}, \ldots (n+k-1)_{k+4}$$

So wenigstens, wenn wir es wieder mit einer arithmetischen Reihe 4ter Ordnung zu tun haben. Auch in dem allgemeinen Falle einer arithmetischen $r$ter Ordnung lassen sich die Elemente auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= v\\
a_2 &= u \cdot 1_1 + v\\
a_3 &= t \cdot 2_2 + u \cdot 2_1 + v\\
a_4 &= s \cdot 3_3 + t \cdot 3_2 + u \cdot 3_1 + v\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{r+1} &= x \cdot r_r + y \cdot r_{r-1} + \ldots + s \cdot r_3 + t \cdot r_2 + u \cdot r_1 + v\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n &= x \cdot (n-1)_r + y \cdot (n-1)_{r-1} + \ldots + s \cdot (n-1)_3 + t \cdot (n-1)_2\\
&\qquad + u \cdot (n-1)_1 + v
\end{aligned}$$

Hierbei sei wieder auf die Ungleichung

$$r \leqq n-1$$

hingewiesen, die hier bewirkt, dass selbst in dem äussersten Falle

$$r = n-1$$

die in dem Bau der Elemente $a_1 \ldots a_n$ zu Tage tretende terrassenförmige Anordnung ihren Abschluss findet, wie es sein muss.

In dem Fall der arithmetischen Reihe $r$ter Ordnung erhalten wir die Factoren:

$$(n+k-1)_k, \quad (n+k-1)_{k+1}, \ldots (n+k-1)_{k+r}$$

Ueber die Aenderungen, die die Summen $\Sigma(i+3)_4 A_i$ u. s. w. erleiden, gilt wörtlich das früher Gesagte. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} S = (n+k-1)_{k+r}x \,.\, \sum_{i=1}^{k}(i+r-1)_r A_i \\ + (n+k-1)_{k+r-1}y \,.\, \Sigma(i+r-2)_{r-1}A_i + \ldots \\ + (n+k-1)_{k+1}u \,.\, \Sigma i_1 A_i + (n+k-1)_k v \,.\, \Sigma A_i \end{aligned} \qquad (\varepsilon)$$

Als Beispiel mögen dienen die 4 Elemente 2, 4, 5, 9, die zur 3. Classe zu combiniren seien. Direct erhält man (für $A_1 = 100$, $A_2 = 10$, $A_3 = 1$):

$$222+224+225+229+244+\ldots+599+999 = 7914$$

Ferner hat man zu setzen:

$$2 = v; \quad 4 = u+v; \quad 5 = y+2u+v; \quad 9 = x+3y+3u+v$$

Man erhält:

$$x = 4, \quad y = -1, \quad u = 2, \quad v = 2$$

Ueberdies ist $n = 4$, $k = 3$, $r = 3$, also:

$$S = 6_6 x \overset{1}{\Sigma} + 6_5 y \overset{2}{\Sigma} + 6_4 u \overset{3}{\Sigma} + 6_3 v \overset{4}{\Sigma} = 4\overset{1}{\Sigma} - 6\overset{2}{\Sigma} + 30\overset{3}{\Sigma} + 40\overset{4}{\Sigma}$$

Es ist aber:

$$\overset{1}{\Sigma} = 100+40+10 = 150; \quad \overset{2}{\Sigma} = 100+30+6 = 136$$
$$\overset{3}{\Sigma} = 100+20+3 = 123; \quad \overset{4}{\Sigma} = 111$$

Also:

$$S = 4 \,.\, 150 - 6 \,.\, 136 + 30 \,.\, 123 + 40 \,.\, 111 = 600 - 816 + 3690 + 4440 = 7914, \text{ wie oben.}$$

IV. Bestimmung der Anzahl der Variationen und der Anzahl der Zahlen von gegebener Quersumme.

Unter Variationen sind im Folgenden stets solche mit Zulassung der Wiederholung der einzelnen Elemente zu verstehen. Die

Elemente sind ganze positive Zahlen entweder mit Ausschluss oder mit Zulassung der Null. Wir werden nämlich von Variationen zu sprechen haben, A) mit völligem Ausschluss der Null: Bezeichnung V; B) mit Zulassung der Null an jeder Stelle: V'; C) mit Zulassung der Null ausser an erster Stelle V''. — Wichtiger und principieller als diese Unterscheidung ist eine andere, wonach zur Bildung der Variationen entweder alle Elemente verwendet werden können, die bei der vorgeschriebenen Quersumme statthaft sind, oder nur ein beschränktes System von „Ziffern": im letzteren Falle sprechen wir von Zahlen von gegebener Quersumme. So giebt es 17 Variationen zweiter Classe aus den Elementen 1, 2, 3, . . . 17, die die Quersumme 18 ergeben, aber nur eine Zahl des dekadischen Systems, nämlich 99. — Wir behandeln zunächst bloss die Variationen zur $k$ten Classe zur Quersumme n und schreiben je nach der Voraussetzung A, B oder C: $\overset{n}{V_k}$, $\overset{n}{V_k'}$, $\overset{n}{V_k''}$. — Beispiele:

A) $\overset{7}{V_3} = 15 = 6_2$, nämlich:

115, 124, 133, 142, 151; 214, 223, 232, 241; 313, 322, 331; 412, 421; 511

B) $\overset{5}{V_3'} = 21 = 7_2$, nämlich:

005, 014, 023, 032, 041, 050; 104, 113, 122, 131, 140; 203, 212, 221, 230; 302, 311, 320; 401, 410; 500

C) $\overset{5}{V_3''} = 15 = 6_2$, nämlich:

104, 113 u. s. w., Fortsetzung wie in B).

Bei Ermittlung der gesuchten Anzahlen kommen mehrfach die bekannten Formeln zur Verwendung:

$$n_k + n_{k+1} = (n+1)_{k+1} \tag{1}$$

$$k_k + (k+1)_k + \ldots + n_k = (n+1)_{k+1} \tag{2}$$

A) Die Null ist ausgeschlossen. Berechnung von $\overset{n}{V_k}$.

Es ist:

$$\overset{n}{V_1} = 1 \quad \text{und} \quad \overset{n}{V_2} = n-1 = (n-1)_1$$

Zur Berechnung von $\overset{n}{V_3}$ unterscheiden wir die Complexe der mit 1, mit 2, . . . mit $n-2$ beginnenden Variationen oder, was dasselbe besagt, die Ordnungen O_1, O_2, . . . O_{n-2} und finden:

$$\overset{n}{V}_3 = O_1+O_2+\dots+O_{n-2} = \overset{n-1}{V}_2+\overset{n-2}{V}_2+\dots+\overset{2}{V}_2$$
$$= (n-2)_1+(n-3)_1+\dots+1_1 = (n-1)_2$$

Ebenso:

$$\overset{n}{V}_4 = O_1+O_2+\dots+O_{n-3} = \overset{n-1}{V}_3+\overset{n-2}{V}_3+\dots+\overset{3}{V}_3$$
$$= (n-2)_2+(n-3)_2+\dots+2_2 = (n-1)_3$$

Allgemein durch den Schluss von k auf $k+1$:

$$\overset{n}{V}_k = O_1+O_2+\dots+O_{n+1-k} = \overset{n-1}{V}_{k-1}+\overset{n-2}{V}_{k-1}+\dots+\overset{k-1}{V}_{k-1}$$
$$= (n-2)_{k-2}+(n-3)_{k-2}+\dots+(k-2)_{k-2} = (n-1)_{k-1}$$

B) Die Null wird an jeder Stelle zugelassen. Berechnung von $\overset{n}{V}_k{}'$.

Zunächst ist:

$$\overset{n}{V}_1{}' = 1 \quad \text{und} \quad \overset{n}{V}_2{}' = n+1 = (n+1)_1$$

daher:

$$\overset{n}{V}_3{}' = O_0+O_1+\dots O_n = \overset{n}{V}_2{}'+\overset{n-1}{V}_2{}'+\dots+\overset{0}{V}_2{}'$$
$$= (n+1)_1+n_1+\dots+1_1 = (n+2)_2$$

$$\overset{n}{V}_4{}' = O_0+O_1+\dots+O_n = \overset{n}{V}_3{}'+\overset{n-1}{V}_3{}'+\dots+\overset{0}{V}_3{}'$$
$$= (n+2)_2+(n+1)_2+\dots+2_2 = (n+3)_3$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens allgemein:

$$\overset{n}{V}_k{}' = (n+k-1)_{k-1}$$

C) Die Null wird zugelassen, aber nicht an erster Stelle. Berechnung von $\overset{n}{V}_k{}''$.

Man erhält $\overset{n}{V}_k{}''$, wenn man von $\overset{n}{V}_k{}'$ die Ordnung O_0 abzieht, also:

$$\overset{n}{V}_k{}'' = \overset{n}{V}_k{}' - \overset{n}{V}{}'_{k-1} = (n+k-1)_{k-1} - (n+k-2)_{k-2} = (n+k-2)_{k-1}$$

nach (1)

Wir haben also folgende Resultate gewonnen:

$$(\alpha)\quad \overset{n}{V}_k = (n-1)_{k-1}, \qquad (\beta)\quad \overset{n}{V}_k{}' = (n+k-1)_{k-1}$$
$$(\gamma)\quad \overset{n}{V}_k{}'' = (n+k-2)_{k-1}$$

Wählen wir die Quersumme $n = 9$, wobei ein Unterschied zwischen

Variationen und dekadischen Zahlen von der Quersumme n noch nicht vorliegt, so ergiebt uns Formel (β), dass es einziffrige, höchstens zweiziffrige, höchstens dreiziffrige, höchstens vierziffrige Zahlen u. s. f. der gedachten Art giebt:

$$9_0 = 1;\quad 10_1 = 10;\quad 11_2 = 55;\quad 12_3 = 220;\quad 13_4 = 715$$
$$14_5 = 2002 \quad \text{u. s. w.}$$

Formel (γ) dagegen ergiebt als Anzahl der wirklich ein-, zwei-, dreiziffrigen Zahlen u. s. f.:

$$8_0 = 1;\quad 9_1 = 9;\quad 10_2 = 45;\quad 11_3 = 165;\quad 12_4 = 495$$
$$13_5 = 1287 \quad \text{u. s. w.}$$

Andere Herleitung derselben Resultate.

Aus dem Resultat B) lässt sich C) herleiten, wie es geschehen ist; aber auch A) ist eine Folgerung von B). Denkt man sich nach der Bedingung B) eine Variationstabelle durchgeführt und erhöht dann jedes Element jeder Complexion um die Zahl 1, sodass z. B. aus 00324 die neue Complexion 11435 hervorgeht, so erhält man eine fehlerlose Variationstabelle nach der Bedingung A). Sie ist fehlerlos, da in ihr jede der verlangten Variationen vorkommt, aber keine mehrfach; denn wäre dies der Fall, so müsste auch in der ursprünglichen Tabelle, die sich aus der neuen durch Subtraction von lauter Einsen wiederherstellen lässt, eine Variation null- oder mehr als einmal aufgetreten sein. Durch das gedachte Verfahren gehen die $\overset{n}{V_k}{}'$ in die $\overset{n+k}{V_k}$ über, also ist

$$\overset{n+k}{V_k} = \overset{n}{V_k}{}' = (n+k-1)_{k-1}$$

folglich

$$\overset{n}{V_k} = (n-1)_{k-1}$$

wie in (α). — Dabei sei die Bemerkung eingeschaltet, dass bei den $\overset{n}{V_k}$ immer $n \geqq k$, bei den $\overset{n}{V_k}{}'$ $n \geqq 0$ und bei den $\overset{n}{V_k}{}''$ $n \geqq 1$ ist.

Gelingt es nun, Resultat B) herzuleiten, so sind auch A) und C) leicht gefunden. Man betrachte das oben gegebene Beispiel der $\overset{5}{V_3}{}'$, sowie das folgende der $\overset{2}{V_5}{}'$:

nämlich:

$$\overset{2}{V_5}{}' = 6_4 = 15$$

00002, 00011, 00020, 00101, 00110, 00200, 01001, 01010, 01100, 02000, 10001, 10010, 10100, 11000, 20000

In dem einen Beispiel ist $k < n$, im andern $k > n$. Sieht man die k Stellen, die man mit Ziffern zu besetzen hat, als Fächer an, die mit der Quersumme n, d. h. mit n Einsen auszufüllen sind, so läuft die Bestimmung der Anzahl $\overset{n}{V}_k{}'$ auf die Beantwortung der Frage hinaus: „Wie oft lassen sich n ununterscheidbare Gegenstände (z. B. lauter Einsen) in k wohlunterschiedene Fächer derart verteilen, dass einige Fächer auch leer bleiben (d. h. mit Nullen besetzt werden) dürfen?" Um dies zu entscheiden, denken wir uns sowol die Gegenstände wie die Fächer numerirt. Die Unterbringung würde dann in folgender Weise geschehen:

Gegenstand Nr.	1	2	3	....	$n-1$	n
in Fach	1	1	1	....	1	1
	1	1	1	....	1	2
	....					
	....					
	1	1	1	....	1	k
	1	1	1	....	2	2
	....					
	1	1	1	....	2	k
	1	1	1	....	3	3
	....					
	....					
	k	k	k	....	k	k

Dabei ist zu bemerken, dass z. B. die Anordnungen

111 . . . 112 und 111 . . . 121

als identisch gelten müssen, denn beide drücken nur aus, dass $n-1$ Einsen in Fach 1 und eine Eins in Fach 2 getan wird. Daher haben wir es zu tun mit Combinationen von k Elementen zur $n$ten Classe mit Wiederholung; also ist:

$$\overset{n}{V}_k{}' = (k+n-1)_n = (n+k-1)_{k-1}, \quad \text{wie oben.}$$

Das gefundene Resultat lässt sich folgendermassen in Worte kleiden:

„Die Anzahl der Variationen $k$ter Classe zur Quersumme n mit überall zugelassener Null ist gleich der Anzahl der

Combinationen von k Elementen zur $n$ten Classe mit Wiederholung". – Es wechselt also der Classenindex.

Auch folgende Aufgabe gehört hierher: Wieviel Glieder ergiebt die Entwicklung von $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n$? Auch hier handelt es sich um Unterbringung von n Einsen (jede Eins ist Potenzexponent) in k wohlunterschiedene Fächer (die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_k$). Also ergiebt sich auch hier dieselbe Anzahl $(n+k-1)_{k-1}$.

Der gefundene Ausdruck

$$(n+k-1)_{k-1} = (n+k-1)_n$$

ändert sich nicht, wenn man gleichzeitig $k-1$ und n vertauscht. Wählen wir statt $k-1$ lieber k, so haben wir folgende Resultate:

1) $\overset{n}{V}_{k+1}' = \overset{k}{V}_{n+1}' = (n+k)_k = (n+k)_n$.

2) n ununterscheidbare Dinge lassen sich ebenso oft in $(k+1)$ wol unterschiedene Fächer verteilen als k in $(n+1)$, nämlich $(n+k)_k = (n+k)_n$ mal.

3) Die Entwicklung von $(a_0 + a_1 + \ldots + a_k)^n$ liefert ebenso viel Glieder als diejenige von $(a_0 + a_1 + \ldots a_n)^k$, nämlich $(n+k)_k = (n+k)_n$.

Beispiel: 7 Dinge lassen sich in

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 . . .

Fächer ebenso oft verteilen wie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . .

Dinge in 8 Fächer.

Indem wir jetzt zu Zahlen von der Quersumme n übergehen, erwägen wir zunächst, dass die für Variationen gefundenen Resultate auch hier anwendbar sind, soweit auch zur Bildung der Variationen keine anderen Elemente als 012 . . . 9 erforderlich sind. Man findet leicht, dass dies unter den Bedingungen A, B, C der Fall ist, solange

$$\text{A)}\ n \leqq k+8 \qquad \text{B)}\ n \leqq 9 \qquad \text{C)}\ n \leqq 10$$

ist. Führen wir also analog zu V, V', V'' für die gesuchten Anzahlen die Bezeichnungen Z, Z', Z'' ein, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{Z}_k &= \overset{n}{V}_k = (n-1)_{k-1} \quad \text{für} \quad n \leqq k+8 \\ \overset{n}{Z}_k{}' &= \overset{n}{V}_k{}' = (n+k-1)_{k-1} \quad \text{für} \quad n \leqq 9 \\ \overset{n}{Z}_k{}'' &= \overset{n}{V}_k{}'' = (n+k-2)_{k-1} \quad \text{für} \quad n \leqq 10 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In allen anderen Fällen erfordert die Bestimmung der Z, Z', Z'' eine besondere Behandlung.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Falle A, wo die Null als Element nicht zugelassen wird. Ferner ist es ratsam die Zahl der verfügbaren Elemente nicht als 9, sondern allgemein als d anzunehmen. Die Frage lautet also:

1) Wieviel k-ziffrige Zahlen von der Quersumme n lassen sich im Zahlensystem mit der Grundzahl $d+1$ aus den Ziffern 1, 2, 3, . . . d bilden?

Die Aufgabe ist identisch mit den beiden folgenden:

2) k d-flächige Polyeder, die keine einspringende Ecke besitzen tragen auf ihren Flächen je die Numern 1, 2, 3, . . . d; man würfelt mit ihnen und fragt, wie oft die Augensumme n möglich ist.

3) In jeder von k Urnen liegen die Numern 1, 2, 3, . . . d: aus jeder Urne wird eine, aber auch nur eine Numer gezogen; wie oft ergiebt sich die Summe n?

Alle diese Aufgaben lassen sich zurückführen auf die folgende:

4) Den Coefficienten von x^n in der Entwickelung von

$$F^k = (x + x^2 + x^3 \ . \ . \ . + x^d)^k$$

zu bestimmen [1]).

Wir behaupten: dieser Coefficient ist die in den Aufgaben 1, 2, 3 gesuchte Anzahl. Es ist:

$$F^k = \overset{1}{\overbrace{(x^1+x^2+ \ . \ . +x^d)}}\overset{2}{\overbrace{(x^1+x^2+ \ . \ . +x^d)}}\overset{3}{\overbrace{(x^1+x^2+ \ . \ . +x^d)}} \ . \ . \ .$$
$$. \ . \ . \overset{k}{\overbrace{(x^1+x^2+ \ . \ . +x^d)}}$$

1) Die Methode der Einführung solcher fonctions génératrices stammt von Laplace her.

Nun entsteht das Product $1 \,.\, x^n$ jedesmal dann, wenn durch Zusammentreten der Factoren $x^{\lambda_1} x^{\lambda_2} \ldots x^{\lambda_k}$ die Exponentensumme n gebildet wird. Also:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k = n \\ \text{die } \lambda_k = 1, 2, \ldots d, \text{ aber nicht } = 0 \\ \text{die } \lambda_i \text{ dürfen nach Art von Variationen mit Wiederholung} \\ \qquad \text{angeordnet erscheinen.} \end{array}\right.$$

Bei allen vier Aufgaben handelt es sich um Bildung sämtlicher **Variationen** $k$ter Classe zur Quersumme n aus einer beschränkten Anzahl von Elementen $1, 2, \ldots d$.

Es kommt also darauf an, den Coefficienten von x^n, geschrieben $[x^n]$, in der Entwicklung von F^k zu finden, und es ist dann:

$$\overset{n}{Z}_k = [x^n] \tag{4}$$

Man hat:

$$F = x(1+x+x^2+\ldots+x^{d-1}) = x\frac{1-x^d}{1-x}$$

folglich:

$$\begin{aligned} F^k &= x^k(1-x^d)^k(1-x)^{-k} \\ &= (x^k+k_1x^{k+1}+(k+1)_2x^{k+2}+(k+2)_3x^{k+3}+\ldots) \\ &\times (1-k_1x^d+k_2x^{2d}-+\ldots) \\ &= x^k+k_1x^{k+1}+(k+1)_2x^{k+2}+\ldots+(k+d-2)_{d-1}x^{k+d-1} \\ &\left\{\begin{array}{l} +(k+d-1)_dx^{k+d}+(k+d)_{d+1}x^{k+d+1}+(k+d+1)_{d+2}x^{k+d+2}+\ldots \\ \quad -k_1 \,.\, x^{k+d}-k_1k_1 \,.\, x^{k+d+1} \qquad -k_1(k+1)_2x^{k+d+2}-\ldots \end{array}\right. \\ &\left\{\begin{array}{l} +(k+2d-2)_{2d-1}x^{k+2d-1}+(k+2d-1)_{2d}x^{k+2d}+(k+2d)_{2d+1}x^{k+2d+1} \\ -k_1(k+d-2)_{d-1}x^{k+2d-1}-k_1(k+d-1)_dx^{k+2d}-k_1(k+d)_{d+1}x^{k+2d+1} \\ \qquad\qquad +k_2x^{k+2d} \qquad\qquad +k_2k_1x^{k+2d+1} \end{array}\right. \\ &\left\{\begin{array}{l} +\ldots+(k+3d-2)_{3d-1}x^{k+3d-1}+(k+3d-1)_{3d}x^{k+3d}+\ldots \\ -\ldots-k_1(k+2d-2)_{2d-1}x^{k+3d-1}-k_1(k+2d-1)_{2d}x^{k+3d}-\ldots \\ +\ldots+k_2(k+d-2)_{d-1}x^{k+3d-1}+k_2(k+d-1)_dx^{k+3d}+\ldots \\ \qquad\qquad -k_3 \,.\, x^{k+3d} \qquad -\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ist nun $n < k$, so ist

$$[x^n] = 0$$

Ist $n \geqq k$, aber $\leqq k+d-1$, z. B. $= k+\lambda$, so ist $[x^n]$, also auch

$$\overset{n}{Z}_k = [x^{k+\lambda}] = (k+\lambda-1)_\lambda = (n-1)_{n-k} = (n-1)_{k-1}$$

wie in (3). In jedem Falle

$$n \geqq k$$

aber kann man setzen:

$$n-k = pd+\lambda$$

wobei p eine positive ganze Zahl und

$$0 \leqq \lambda < d$$

ist, also:

$$n = k+pd+\lambda$$

Dann wird:

$$\begin{aligned}[x^n] &= (k+pd+\lambda-1)_{pd+\lambda} - k_1(k+\overline{p-1}\,d+\lambda-1)_{(p-1)d+\lambda} \\ &\quad + k_2(k+\overline{p-2}\,d+\lambda-1)_{(p-2)d+\lambda} - + \ldots \\ &\quad + (-1)^{p-1} \cdot k_{p-1}(k+d+\lambda-1)_{d+\lambda} + (-1)^p \cdot k_p(k+\lambda-1)_\lambda \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i (k+\overline{p-i}\,d+\lambda-1)_{(p-i)d+\lambda} \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i (n-id-1)_{n-id-k} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i (n-id-1)_{k-1}\end{aligned}$$

Setzen wir endlich vermöge der Gleichung

$$\frac{n-k}{d} = p + \frac{\lambda}{d}$$

für p seinen Wert $E\left(\frac{n-k}{d}\right)$ ein, so wird

$$\overset{n}{Z}_k = \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-k}{d}\right)} (-1)^i k_i (n-id-1)_{k-1} \qquad (\alpha')$$

Der Fall B), zu dem wir jetzt übergehen, lässt sich auf A) zurückführen. Nehmen wir statt der früheren Function F^k jetzt:

$$F'^k = (1+x+x^2+\ldots+x^{d-1})^k = \frac{F^k}{x^k}$$

so wird der jetzige Coefficient von x^{n-k} identisch mit dem früheren von x^n, also

$$[x^{n-k}]' = [x^n]$$

folglich

$$[x^n]' = [x^{n+k}]$$

und somit:

$$\overset{n}{Z_k'} = \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n}{d}\right)} (-1)^i k_i (n-id+k-1)_{k-1} \qquad (\beta')$$

Endlich soll nach Bedingung C) die Null zugelassen werden, nur nicht an vorderster Stelle. Die Formel (β') ergiebt die Anzahl sämtlicher höchstens k-ziffrigen Zahlen von der Quersumme n; ziehen wir von dieser Anzahl diejenige aller höchstens $(k-1)$-ziffrigen Zahlen ab, so erhalten wir die gesuchte Zahl, also, wenn

$$n - id = \nu$$

gesetzt wird:

$$\overset{n}{Z_k''} = \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n}{d}\right)} (-1)^i \,.\, \{k_i(\nu+k-1)_{k-1} - (k-1)_i(\nu+k-2)_{k-2}\}$$

Der in der Klammer auftretende Ausdruck ist:

1) für $i = 0$:

$$k_0(n+k-1)_{k-1} - (k-1)_0(n+k-2)_{k-2} = (n+k-1)_{k-1} - (n+k-2)_{k-2} = (n+k-2)_{k-1}$$

2) für $i > 0$:

$$\frac{k(k-1)\ldots(k+1-i)}{i!} \cdot \frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)\ldots(\nu+1)}{(k-2)!\,(k-1)}$$

$$-\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k+1-i)(k-i)}{i!} \cdot \frac{(\nu+k-2)\ldots(\nu+1)}{(k-2)!}$$

$$=\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k+1-i)}{i!} \cdot \frac{(\nu+k-2)\ldots(\nu+1)}{(k-2)!} \times \left(\frac{k(\nu+k-1)}{k-1} - (k-i)\right)$$

$$= \frac{1}{i} \cdot (k-1)_{i-1}(\nu+k-2)_{k-2} \cdot \frac{k\nu + i(k-1)}{k-1}$$

$$= (k-1)_{i-1}(\nu+k-2)_{k-i}\left(1 + \frac{k\nu}{i(k-1)}\right)$$

Also:

$$\overset{n}{Z_k''} = (n+k-2)_{k-1} + \sum_{i=1}^{E\left(\frac{n}{d}\right)} (-1)^i \,.\, (k-1)_{i-1}(n-id+k-2)_{k-2} \,.\, \left(1 + \frac{k(n-id)}{i(k-1)}\right) \qquad (\gamma')$$

Sollen die Formeln α', β', γ' auf das dekadische Zahlensystem angewendet werden, so ist folgendes zu beachten. In A wurden als zulässig angesehen die Elemente $1, 2, 3, \ldots d$; also muss für (α') $d = 9$ gesetzt werden, wie es auch oben bei Formulirung der Aufgabe 1) angedeutet worden ist. In B und C dagegen waren $0, 1, 2, \ldots d-1$ die zulässigen Elemente, denn wir haben die Resultate (β') und (γ') durch Entwicklung der Function

$$F'^{k} = (1 + x + \ldots x^{d-1})^{k}$$

hergeleitet. Also haben wir hier $d = 10$ zu wählen.

Beispiel: Wie viel giebt es 4-ziffrige Zahlen mit der Quersumme 32?

$$k = 4, \quad d = 10, \quad n = 32$$

Aus (γ') erhalten wir:

$$\overset{32}{Z_4}{}'' = 34_3 + \sum_{i=1}^{3} (-1)^i \,.\, 3_{i-1} \,.\, (34 - 10i)_2 \,.\left(1 + \frac{4(32-10i)}{3i}\right)$$

$$= 34_3 - 3_0 \,.\, 24_2 \,.\left(1 + \frac{4\,.\,22}{3}\right) + 3_1 \,.\, 14_2 \,.\left(1 + \frac{4\,.\,12}{6}\right)$$

$$- 3_2 \,.\, 4_2 \,.\left(1 + \frac{4\,.\,2}{9}\right)$$

$$= 5984 - 1\,.\,276\,.\,\frac{91}{3} + 3\,.\,91\,.\,9 - 3\,.\,6\,.\,\frac{17}{9}$$

$$= 5984 - 8372 + 2457 - 34 = 35.$$

Die 35 Zahlen sind:

5999; 6899, 6989, 6998; 7799, 7889, 7898, 7979, 7988, 7997; 8699, 8789, 8798, 8879, 8888, 8897, 8969, 8978, 8987, 8996; 9599, 9689, 9698, 9779, 9788, 9797, 9869, 9878, 9887, 9896, 9959, 9968, 9977, 9986, 9995.

Allgemeine Sätze über die in α', β', γ' vorkommenden Entwicklungscoefficienten.

1) Für jedes $n > kd$ in A ist $\overset{n}{Z_k}$, also auch $[x^n]'$ gleich null: für jedes $n > k(d-1)$ in B ist $\overset{n}{Z_k}{}'$, also auch $[x^n]'$ gleich null. Diese Bemerkung ergiebt, auf (α') oder (β') angewendet, einen allgemeinen Lehrsatz der Arithmetik.

2) Lässt man in (α') und (β') n alle statthaften Werte durchlaufen, nämlich in (α') von k bis kd, in (β') von 0 bis $k(d-1)$, so erhält man eine symmetrische Reihe, d. h. es ist

$$[x^{k+n}] = [x^{kd-n}]$$

oder, was dasselbe ist:

$$[x^n]' = [x^{k(d-1)-n}]'$$

Es ist nämlich $[x^n]'$, d. h. der Coefficient $[x^n]$ in der Entwicklung von $(1+x+x^2+\ldots+x^{d-1})^k$

$$\text{gleich } [x^{-n}] \text{ in } \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)^k$$

$$\text{gleich } [x^{k(d-1)-n}] \text{ in } \left(x^{d-1}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)\right)^k$$

oder in $(1+x+x^2+\ldots+x^{d-1})^k$, d. h.

$$[x^n]' = [x^{k(d-1)-n}]'$$

3) Auch (γ') ergiebt eine symmetrisch verlaufende Reihe der $\overset{n}{Z}_k''$, wenn n alle statthaften Werte von 1 bis $k(d-1)$ durchläuft; es ist nämlich

$$\overset{1}{Z}_k'' = \overset{k(d-1)}{Z}_k''; \quad \overset{2}{Z}_k'' = \overset{k(d-1)-1}{Z}_k''; \quad \ldots \overset{n}{Z}_k'' = \overset{k(d-1)+1-n}{Z}_k$$

Es wurde nämlich $\overset{n}{Z}_k''$ durch den Ansatz

$$\overset{n}{Z}_k'' = \overset{n}{Z}_k' - \overset{n}{Z}_{k-1}'$$

gefunden; folglich ist $\overset{n}{Z}_k''$ der Coefficient von x^n in der Entwicklung von $\quad F'^k - F'^{k-1} = F'^{k-1}(F'-1)$ oder:

$$\overset{n}{Z}_k'' \text{ gleich } [x^n] \text{ in } (1+x+\ldots+x^{d-1})^{k-1}\,.\,(x+x^2+\ldots+x^{d-1})$$

$$\text{gleich } [x^{1-n}] \text{ in } \left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)^{k-1} \cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)$$

$$\text{gleich } [x^{1-n}] \text{ in } \left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)^{k-1} \cdot\left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-2}}\right)$$

$$\text{gleich } [x^{k(d-1)+1-n}] \text{ in } \left(x^{d-1}\left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)\right)^{k-1} \cdot\left(x^{d-1}\left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-2}}\right)\right)$$

oder in $(1+x+\ldots+x^{d-1})^{k-1} \cdot (x+x^2+\ldots+x^{d-1})$
oder in $F'^{k-1}(F'-1)$

Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Hiernach hätte man das vorhin behandelte Beispiel kürzer erledigen können, nämlich:

$$\overset{32}{Z_4''} = \overset{37-32}{Z_4''} = \overset{5}{Z_4''} = (n+k-2)_{k-1}, \quad \text{d. h.} \quad = 7_3 = 35$$

Der symmetrische Bau in den Entwicklungen, die zu den Formeln α', β', γ' führten, ergiebt, auf eben diese Formeln angewendet, wieder einen Lehrsatz der Arithmetik.

4) Die genannten Entwicklungen ergeben Coefficienten, die bis zur Mitte der Reihe ansteigen, dann wieder sinken. Das Letztere haben wir wegen der Symmetrie der Entwicklung nicht weiter zu beweisen. Um das Erste zu zeigen, beachten wir zunächst, dass die Entwicklungen A und B sich nur durch den Factor x^k unterscheiden, sodass sich der Beweis auf die Fälle B und C beschränken kann. Wir zeigen zunächst die Richtigkeit der Behauptung für $k=2$. In B liegt die Entwicklung von F'^2 vor, die die Form hat

$$(1+x+x^2+\ldots+x^p)^2 = (1+x+\ldots+x^p)(1+x+\ldots+x^p)$$

Multipliciren wir aus, so erhalten wir folgendes Coefficienten-Schema:

x^0	x^1	x^2	...	x^{p-1}	x^p	x^{p+1}	x^{p+2}	...	x^{2p-1}	x^{2p}
1	1	1	...	1	1					
	1	1	...	1	1	1				
		1	...	1	1	1	1			
			...							
			...							
				1	1	1	1	...	1	
					1	1	1	...	1	1
1	2	3	...	p	$p+1$	p	$p-1$	...	2	1

Ganz ähnlich in C, wo wir $(1+x+x^2+\ldots+x^p)(x+x^2+\ldots+x^p)$ zu multipliciren haben: wir erhalten die Coefficienten

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots p \quad p \quad p-1 \ldots 2 \quad 1$$

Für beide Entwicklungen trifft unsere Behauptung zu, und die Producte haben die Form:

$$Q = 1+a_1x+a_2x^2+ \dots +a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m+a_{m-1}x^{m+1} + \dots +a_1x^{2m-1}+x^{2m}$$

und

$$Q' = x(1+b_1x+b_2x^2+ \dots +b_nx^n+b_nx^{n+1}+ \dots +b_1x^{2n}+x^{2n+1})$$

Dabei ist $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$ und $1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$, und die Entwicklungen sind symmetrisch. Es mögen nun die Ausdrücke Q und $\frac{Q'}{x}$ mit

$$P = 1+x+x^2+ \dots +x^p$$

multiplicirt werden, wobei $p \leqq m$ und $\leqq n$ vorausgesetzt wird. Wenn sich beweisen lässt, dass in der Entwicklung der Producte bis zur Mitte hin wiederum ein Aufsteigen der Coefficienten stattfindet, so ist unsre Behauptung überhaupt bewiesen. Man hat dann nämlich bloss nötig, $2m$ oder $2n+1$ gleich $k(d-1)$ und für den Fall B) $p = d-1$, für den Fall C) $p = d-2$ anzunehmen, um durch den Schluss von k auf $k+1$ von $k = 2$ aus die allgemeine Richtigkeit unserer Behauptung zu erschliessen. — Für das Product QP ergiebt sich folgendes Coefficienten-Schema:

x^0	x^1	x^2	$x^3 \dots$	x^{p-1}	x^p	x^{p+1}	$x^{p+2} \dots$
1	a_1	a_2	$a_3 \dots$	a_{p-1}	a_p	a_{p+1}	$a_{p+2} \dots$
	1	a_1	$a_2 \dots$	a_{p-2}	a_{p-1}	a_p	$a_{p+1} \dots$
		1	$a_1 \dots$	a_{p-3}	a_{p-2}	a_{p-1}	$a_p \dots$
			$\dots$	$\dots$	$\dots$		
			$\dots$	$\dots$	$\dots$		
				1	a_1	a_2	$a_3 \dots$
					1	a_1	$a_2 \dots$

$\dots x^m$	x^{m+1}	$x^{m+2} \dots$
$\dots a_m$	a_{m-1}	$a_{m-2} \dots$
$\dots a_{m-1}$	a_m	$a_{m-1} \dots$
$\dots a_{m-2}$	a_{m-1}	$a_m \dots$
$\dots a_{m-p+1}$	a_{m-p+2}	$a_{m-p+3} \dots$
$\dots a_{m-p}$	a_{m-p+1}	$a_{m-p+2} \dots$

Man erkennt nun, dass zunächst infolge unserer Voraussetzung über die $a_1 a_2 \dots a_m$ bis zur Potenz x^m ein beständiges Steigen der

Coefficienten stattfindet. Dasselbe gilt aber auch noch jenseits x^m, und zwar wird solange

$$[x^{m+r}] \leqq [x^{m+r+1}] \text{ sein, als } a_{m-p+r} \leqq a_{m-r-1}$$

ist; denn beim Uebergang von der einen zur anderen Potenz wird der Posten a_{m-p+r} verdrängt, und a_{m-r-1} tritt an seine Stelle. Die gefundene Bedingung aber reducirt sich auf folgende:

$$p-r \geqq r+1 \quad \text{oder} \quad r \leqq \frac{p-1}{2}$$

Dies aber bedeutet: ist p gerade, so steigen die Coefficienten an bis zu dem mittelsten $\left[{}_x^{m+\frac{p}{2}}\right]$; ist p ungerade, so gilt dasselbe für die zwei einander gleichen mittleren Coefficienten:

$$\left[{}_x^{m+\frac{p-1}{2}}\right] = \left[{}_x^{m+\frac{p+1}{2}}\right]$$

Ein genau entsprechendes Resultat ergiebt sich für das Product $\frac{Q'}{x} \cdot P$. Wir stellen nur die folgenden Coefficienten auf:

$$[x^n] = b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_{n-p}$$
$$[x^{n+1}] = b_n + b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-p+1}$$
$$[x^{n+2}] = b_{n-1} + b_n + b_n + \ldots + b_{n-p+2}$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$[x^{n+r}] = b_{n-(r-1)} + \ldots + b_n + b_n + \ldots + b_{n-(p-r)}$$
$$[x^{n+r+1}] = b_{n-r} + \ldots + b_n + b_n + \ldots + b_{n-(p-r-1)}$$

Also ist solange

$$[x^{n+r}] \leqq [x^{n+r+1}], \text{ als } b_{n-(p-r)} \leqq b_{n-r}$$

$$\text{oder } p-r \geqq r \quad \text{oder } r \leqq \tfrac{1}{2}p$$

ist. Man erhält entsprechend den $2n+2+p$ Gliedern der ganzen Entwicklung bei geradem p zwei mittelste und grösste Coefficienten, bei ungeradem p einen.

Beispiel. Wir leiten die Anzahl der dreiziffrigen (dekadisch geschriebenen) Zahlen (Bedingung *C*) nochmals her aus der Anzahl

der höchstens dreiziffrigen und der höchstens zweiziffrigen (Bedingung *B*) und zwar für alle möglichen Quersummen. Um die $\overset{n}{Z_3}'$ zu erhalten, nehmen wir folgende Entwicklung vor:

$$F'^3 = (1+x+\ldots+x^9)^3 = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{10})^3(1-x)^{-3}$$
$$= (1-3x^{10}+3x^{20}-x^{30})(1+3_1x+4_2x^2+5_3x^3+6_4x^4+7_5x^5+\ldots)$$
$$= (1-3x^{10}+3x^{20}-x^{30})(1+3_2x+4_2x^2+5_2x^3+6_2x^4+7_2x^5+\ldots)$$
$$= 1+3_2x+4_2x^2+\ldots+11_2x^9+12_2x^{10}+13_2x^{11}+\ldots$$
$$+21_2x^{19}+22_2x^{20}+\ldots+31_2x^{29}+32_2x^{30}+\ldots$$
$$-3x^{10}-3\,.\,3_2x^{11}-\ldots-3\,.\,11_2x^{19}-3\,.\,12_2x^{20}-\ldots$$
$$-3\,.\,21_2x^{29}-3\,.\,22_2x^{30}-\ldots+3\,.\,2_2x^{20}+\ldots$$
$$+3\,.\,11_2x^{29}+3\,.\,12_2x^{30}+\ldots-1\,.\,2_2x^{30}-\ldots$$

Hierbei ist z. B.

$$[x^{30}] = 32_2-3\,.\,22_2+3\,.\,12_2-2_2 = 496-3\,.\,231+3\,.\,66-1 = 0$$

wie es sein muss. Man erhält:

Quersumme $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
											12	13
	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
											15	14
$\overset{n}{Z_3}' =$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69
											73	75

Bis $n = 9$ hätte schon die Formel (β) geführt:

$$\overset{n}{V_3}' = (n+2)_2$$

Mechanisch ausgeführte Addition sämtlicher $\overset{n}{Z_3}'$ ergiebt die Summe 1000, wie es sein muss, da 000 mitgezählt wird.

Um die $\overset{n}{Z_2}'$ zu finden, worin n bis 18 steigen kann, erwägen wir die Symmetrie ihrer Reihe; wir brauchen nur bis $n = 9$ zu gehen, und für diesen Zweck reicht schon die Formel (β) hin:

$$\overset{n}{V_2}' = (n+1)_1$$

Also erhalten wir:

Quersumme $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
$\overset{n}{Z_2}' =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dabei ist übrigens $\sum\limits_{n=0}^{18} \overset{n}{Z}_2{}' = 100$, wie es sein muss.

Subtrahiren wir jetzt die $\overset{n}{Z}_2{}'$ von den $\overset{n}{Z}_3{}'$, so erhalten wir die $\overset{n}{Z}_3{}''$ nämlich:

Quersumme $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
										12	13	14
	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	
										16	15	
$\overset{n}{Z}_3{}'' =$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	54	61	
										66	69	70

Dabei ist $\sum\limits_{n=1}^{27} \overset{n}{Z}_3{}'' = 900$, wie es sein muss.

Auch zahlentheoretisch ist das Ergebniss interessant, dass durch Subtraction einer symmetrischen Zahlenreihe von einer anderen, die nicht dieselbe Gliederzahl besitzt, wieder eine symmetrische Zahlenreihe hervorgehen kann.

Bemerkung. Die Sätze 2) und 3) über die Symmetrie der Reihen Z, Z', Z'' liessen sich auch auf anderem Wege herleiten. Zwei Beispiele werden genügen, um dies zu zeigen, das eine für den Fall B (oder ebenso gut A), das andere für C. Es handle sich zunächst um die $\overset{n}{Z}_3{}'$, also:

039, 048, 057, 066, 075, 084, 093; 129, 138, . . . 930

Nimmt man jetzt statt jeder Ziffer ihre Ergänzung zu 9, so müssen lauter dreistellige Zahlen von der Quersumme $27 - 12 = 15$ entstehen, nämlich:

960, 951. 942, 933, 924, 915, 906; 870, 861, . . . 069

Die entstandene Reihe muss ein fehlerloses System der $\overset{15}{Z}_3{}'$ darstellen, denn sie kann weder lückenhaft sein noch eine Zahl mehrmals enthalten, weil dann ganz dasselbe für die Reihe der $\overset{12}{Z}_3{}'$ gelten müsste, aus der sie hergeleitet ist, und die sich aus ihr wiederherstellen lässt. Also ist

$$\overset{15}{Z}_3{}' = \overset{12}{Z}_3{}' \quad \text{und ebenso} \quad \overset{n}{Z}_3{}' = \overset{27-n}{Z}_3{}'$$

allgemein

$$\overset{n}{Z}_k{}' = \overset{k(d-1)-n}{Z}_k{}'$$

Ferner mögen vorliegen die $\overset{13}{Z_3}''$, nämlich:

139, 148, 157, 166, 175, 184, 193; 229, . . . 490,
508, ... 940

Man ersetze die jedesmalige erste Ziffer durch ihre Ergänzung zu 10, die übrigen Ziffern durch ihre Ergänzung zu 9. Es gehen so die Ziffern 1 . . . 9 der ersten und 0 . . . 9 der zweiten und dritten Stelle über in 9 . . . 1 an erster und 9 . . . 0 an den übrigen Stellen: die Bedingung C bleibt also gewahrt. Es entsteht eine Reihe von $\overset{28-13}{Z_3}'' = \overset{15}{Z_3}''$
und zwar die vollständige Reihe, aus denselben Gründen wie oben, nämlich:

960, 951, 942, 933, 924, 915, 906; 870, . . . 609,
591, . . . 159

Es ist also

$$\overset{13}{Z_3}'' = \overset{15}{Z_3}'' \quad \text{und ebenso} \quad \overset{n}{Z_3}'' = \overset{28-n}{Z_3}''$$

und allgemein

$$\overset{n}{Z_k}'' = \overset{n'}{Z_k}''$$

wenn $n + n' = k(d-1)+1$ ist.

V. Problem der bunten Reihe.

Eine Gesellschaft besteht aus n Herren und n Damen oder aus n Norddeutschen und n Süddeutschen — wir werden sagen: aus n Personen I und n Personen II. Sie setzen sich in bunter Reihe neben einander. Es entsteht die Frage: „Wieviel verschiedene Anordnungen wird es geben?“ Dabei haben wir hauptsächlich zu unterscheiden, ob nur ein Tisch gebildet wird oder mehrere. Jede Anordnung soll in einer geschlossenen oder Kreisreihe erfolgen, nicht etwa in einer Längsreihe.

Bunte Reihe an einem Tisch. Haben wir eine beliebige Tischordnung vor uns und lassen dann die ganze Gesellschaft um einen oder mehrere Stühle weiter rücken, so gilt die neue Anordnung als identisch mit der alten. Daher werden wir einer Person I von vornherein einen festen Platz anweisen dürfen. Die übrigen Personen I können noch $(n-1)!$ verschiedene Reihenfolgen annehmen, und die zwischen ihre Sitze sich einschiebenden Personen II $n!$ eben solche. Wir dürfen nämlich keiner II einen bestimmten Platz anweisen, da diese eine Person dann entweder immer oder nie

Nachbar der auf dem festen Platz sitzenden I sein würde, sodass uns zahlreiche Anordnungen entgehen würden. Wir erhalten also vorläufig das Resultat $(n-1)!\,n!$ Wir setzen aber fest, dass Anordnungen, die sich nur durch den Drehungssinn unterscheiden, als identisch gelten sollen, denn es bleiben bei Anordnung der ganzen Tischgesellschaft in umgekehrter Reihenfolge sämtliche Nachbarschaften erhalten. Daher haben wir noch durch 2 zu dividiren, ausser falls $n = 1$ ist; also:

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = \varepsilon \cdot \dfrac{(n-1)!\,n!}{2} = \varepsilon \cdot \dfrac{n!\,n!}{2n} \\ \varepsilon \text{ stets } = 1, \text{ bloss für } n = 1 \text{ gleich } 2 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Beispiele:

$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 6,\ f(4) = 72,\ f(5) = 1440,$
$f(6) = 43200,\ f(7) = 1814400,\ f(8) = 101\,606\,400, \ldots$

Bezeichnen wir die Personen I und die Personen II durch A, B, ..., so sind für $n = 2$ die beiden Sitzweisen

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ 1 & & 2 \\ & B & \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} & A & \\ 2 & & 1 \\ & B & \end{array}$$

identisch, weil sie sich nur durch die Anordnung rechts- und linksherum unterscheiden. Für $n = 3$ giebt es 6 Anordnungen, nämlich:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ 1 & & 3 \\ B & & C \\ & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ 1 & & 2 \\ B & & C \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ 2 & & 3 \\ B & & C \\ & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ 2 & & 1 \\ B & & C \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ 3 & & 2 \\ B & & C \\ & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ 3 & & 1 \\ B & & C \\ & 2 & \end{array}$$

A ist die festgehaltene Person; eine Vertauschung von B und C führt nach der vorgenommenen Festsetzung über den Drehungssinn zu keiner neuen Anordnung.

Bunte Reihe an zwei Tischen. An dem einen Tisch sollen k Paare sitzen, an dem anderen $n-k$; wir suchen die Zahl aller möglichen Anordnungen $f(k, n-k)$. Vertauschen wir an irgend einer vorliegenden Tischordnung die beiden Tische, ohne die Anordnung der Personen unter sich zu ändern, so gilt uns dieser Wechsel als **nichts** neu zu Zählendes. Daher muss

$$f(k, n-k) = f(n-k, k)$$

sein, und wir könnten, falls die Tische ungleich stark besetzt werden sollen, als ersten Tisch stets den stärker besetzten annehmen; doch

ist dies nicht einmal nötig. Zunächst lassen sich zur Besetzung des ersten Tisches in n_k Weisen Personen I und in n_k Weisen Personen II aussuchen; aus den gewählten Personenpaaren lassen sich $f(k)$ Anordnungen am ersten Tische vornehmen. Die übrigen $n-k$ Paare können sich am anderen Tische in $f(n-k)$ verschiedenen Arten gruppiren; daher erhalten wir das Resultat $(n_k)^2 . f(k) f(n-k)$. Herleitung und Resultat bleiben richtig, wenn k oder $n-k$ gleich 1 ist. Nur in dem Falle

$$k = n - k, \text{ d. h. } k = \frac{n}{2}$$

haben wir noch durch 2 zu dividiren, weil hier ein Wechsel der blossen Tische, der niemals neu zu zählende Anordnungen ergeben soll, solche Anordnungen wieder ergiebt, die bereits gezählt worden sind. Also:

$$f(k, n-k) = (n_k)^2 . f(k) f(n-k) : \alpha$$

wobei $\alpha = 1$, nur in dem Falle $k = \frac{n}{2}$ gleich 2 zu setzen ist. Setzen wir jetzt

$$f(k) = \frac{k!\,k!}{2k} . \varepsilon \quad \text{und} \quad f(n-k) = \frac{(n-k)!(n-k)!}{2(n-k)} . \varepsilon'$$

ein, so erhalten wir, weil

$$n_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{ist:}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(k, n-k) = \dfrac{n!\,n!}{4k(n-k)} . \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} \\ \varepsilon = 2 \text{ für } k = 1,\ \varepsilon' = 2 \text{ für } n-k = 1,\ \alpha = 2 \text{ für } k = \dfrac{n}{2} \\ \text{sonst } \varepsilon = \varepsilon' = \alpha = 1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wie es sein muss, ergiebt sich:

$$f(k, n-k) = f(n-k, k)$$

Beispiele:

$f(1, 1) = 2$, denn hier ist $\varepsilon = \varepsilon' = \alpha = 2$

$f(1, 2) = 9$; $f(1, 3) = 96$; $f(1, 4) = 1800$; $f(1, 5) = 51840$

$f(2, 2) = 18$; $f(2, 3) = 600$; $f(2, 4) = 16200$

$f(3, 3) = 7200$; $f(4, 4) = 12700800$

Der Fall $f(1, 1)$ ergiebt die beiden Anordnungen

A	B
1	2

und

A	B
2	1

Der Fall $f(1, 2)$ ergiebt:

A	B	
1	2	3
	C	

A	B	
2	1	3
	C	

A	B	
3	1	2
	C	

u. s. w.

nämlich noch 6 weitere Zusammenstellungen, worin am kleineren Tische B mit 1, 2 oder 3 und C mit 1, 2 oder 3 zusammensitzt.

Dividiren wir Formel (2) durch Formel (1) und berücksichtigen, dass der Fall $n = 1$ jetzt unmöglich ist, so erhalten wir:

$$f(k, n-k) = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} \cdot \frac{n}{2k(n-k)} \cdot f(n) \tag{3}$$

1) Für $n = 2$ und $k = 1$ erhalten wir so:

$$f(1, 1) = 2 \cdot \frac{2}{2} \cdot f(2) = 2f(2)$$

also ist $f(1, 1)$ doppelt so gross als $f(2)$.

2) $n > 2$, $k = 1$ ergiebt $\varepsilon = 2$, $\varepsilon' = \alpha = 1$, also:

$$f(1, n-1) = \frac{n}{n-1} \cdot f(n)$$

also ist auch hier noch $f(1, n-1) > f(n)$. — In allen übrigen Fällen ist $f(k, n-k) < f(n)$, nämlich:

3) $n > 2$, $k > 1$, $k \leqq n-k$, also auch $n \geqq 4$. Schliessen wir den Fall

$$k = n-k = \frac{n}{2}$$

zunächst aus, so ist

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} = 1, \quad \text{also:} \quad f(k, n-k) = \frac{n}{2k(n-k)} \cdot f(n)$$

Nun ist der Zusatzfactor

$$\frac{n}{2k(n-k)} = \frac{\frac{1}{2}n}{n-k} \cdot \frac{1}{k}$$

also $< \frac{1}{k}$, daher sogar $f(k, n-k) < \frac{1}{k} f(n)$. Für

$$k = n-k = \frac{n}{2} \quad \text{ist} \quad \alpha = 2, \quad \text{also:}$$

$$f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(n)$$

Denken wir uns einstweilen k als s t e t i g veränderlich, so lehrt der Differentialquotient des Nenners $2k(n-k)$ nach k, dass die Function

$f(k, n-k)$ mit wachsendem k stetig abnimmt bis zu $k = \frac{n}{2}$. Daher wird im Falle eines geraden n

$$k = \frac{n}{2}$$

im Fall eines ungeraden n

$$k = \frac{n-1}{2}$$

den kleinsten (hier in Betracht kommenden) Wert von $f(k, n-k)$ ergeben. Man erhält:

$$n \equiv 0 \text{ (mod. 2)}: \quad f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(n)$$

$$n \equiv 1 \text{ (mod. 2)}: \quad f\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{2}{n - \frac{1}{n}} \cdot f(n)$$

Für $n = \infty$ wird also $f\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ doppelt so gross als $f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, offenbar eine Folge des wechselnden Wertes von α.

Beispiel. Für $n = 10$ und $n = 11$ nimmt der Quotient

$$\frac{f(k, n-k)}{f(n)} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} \cdot \frac{n}{2k(n-k)}$$

folgende Werte an:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n = 10$	1,111	0,313	0,238	0,208	0,100
$n = 11$	1,100	0,306	0,229	0,196	0,183

Bunte Reihe an drei oder mehr Tischen. Es sollen sich n Paare an r Tischen verteilen, und zwar sollen am ersten Tisch k_1 Paare Platz nehmen, am zweiten k_2 u. s. w., am letzten k_r; also:

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$$

Werden zunächst die Fälle ausgeschlossen, wo mehrere k einander gleich sind, oder wo auch nur eine Grösse $k = 1$ ist, so erhält man sofort:

$$f(k_1, k_2, \ldots k_r) = (n)^2{}_{k_1} f(k_1) \cdot (n-k_1)^2{}_{k_2} f(k_2) \cdot (n-k_1-k_2)^2{}_{k_3} f(k_3) \ldots \ldots (k_r)^2{}_{k_r} f(k_r)$$

Dabei wird an jedem Tische ein fester Platz etwa für diejenige Person reservirt, deren Name im Alphabet vorangeht. Also:

$$f(k_1, k_2, \ldots k_r) = ((n)_{k_1}(n-k_1)_{k_2}(n-k_1-k_2)_{k_3} \ldots (k_r)_{k_r})^2 \times f(k_1) f(k_2) \ldots f(k_r)$$

$$= \left(\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}\right)^2 \cdot \frac{k_1!\, k_1!}{2k_1} \cdot \frac{k_2!\, k_2!}{2k_2} \cdots \frac{k_r!\, k_r!}{2k_r}$$

$$= \frac{n!\, n!}{2^r \cdot k_1 k_2 \ldots k_r}$$

Sind nun α unter den Grössen k_i einander gleich, so würde jede Permutation der betreffenden α Tischgruppen, die doch kein neues Resultat ergeben soll, bereits gezählte Anordnungen wieder ergeben; also haben wir noch durch $\alpha!$ zu dividiren, oder wenn mehrere solcher Gruppen vorhanden sind, durch $\alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots$ Sind ferner unter den Grössen k_i eine oder einige $= 1$, so haben wir entsprechend oft den Factor 2 hinzuzufügen. Also erhalten wir:

$$f(k_1, k_2, \ldots k_r) = \frac{n!\, n!}{2^{r-\tau} \cdot k_1 k_2 \ldots k_r \cdot \alpha!\, \beta! \ldots \tau!}$$

$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$; $\alpha + \beta + \ldots + \tau = r$; unter den k_i giebt es α gleiche, β gleiche u. s. f. und τ solche, die $= 1$ sind. (4)

Specialfälle. $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = \frac{n}{r}$ ergiebt:

$$f\left(\frac{n}{r}, \frac{n}{r}, \ldots \frac{n}{r}\right) = \frac{n!\, n!}{\left(\frac{2n}{r}\right)^r \cdot r!} \quad \text{für } \frac{n}{r} > 1 \tag{5}$$

und

$$f(1, 1, \ldots 1) = \frac{n!\, n!}{2^{n-n} \cdot n!} = n! \tag{6}$$

$r = 2$ verwandelt Formel (4) wieder in Formel (3). nämlich:

$$f(k, n-k) = \frac{n!\, n!}{2^{2-\tau} \cdot k(n-k) \cdot \alpha!} = \frac{2^\tau}{\alpha} \cdot \frac{n!\, n!}{4k(n-k)}$$

Ebenso erhalten wir aus (5) und (6) wieder:

$$f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{n!\, n!}{2n^2} = \frac{1}{n} \cdot f(n); \quad f(1, 1) = 2!$$

Formel (6) bestätigt sich folgendermassen: da hier an jedem Tische nur ein Personenpaar sitzt, für das Paar aber es gleichgültig ist, an welchem Tische es sitzt, so lässt sich von vornherein jeder Person I ein bestimmter Platz zuweisen: dann bleiben uns noch die n Personen II zu permutiren übrig. — Einige Zahlenbeispiele sind:

$$f(1,1,2)=72;\quad f(1,1,3)=1200;\quad f(1,2,2)=450$$
$$f(1,2,3)=21600;\quad f(1,1,2,2)=8100$$

Verallgemeinerung der Aufgabe. Statt von Paaren wollen wir jetzt von Gruppen zu je λ Personen (oder Dingen) sprechen. Solcher Gruppen mögen n vorhanden sein. Die einzelnen Sorten werden wieder durch I, II, III, . . . bezeichnet. Zunächst handelt es sich darum, die n Gruppen „in bunter Reihe" auf alle möglichen Weisen an einem Tisch anzuordnen. Das Wort „bunte Reihe" ist so zu verstehen, dass in jeder Reihe von λ Nachbarn alle „Sorten" vertreten sind und zwar innerhalb der ganzen Tischordnung immer in derselben Reihenfolge. Wir setzen zunächst innerhalb der λ Sorten eine bestimmte Reihenfolge fest und ordnen ihr zufolge an, etwa derart, dass die Personen I jedesmal Flügelmänner ihrer rechts neben ihnen sitzenden Gefolgschaft sind. Nachdem eine Person I einen festen Platz erhalten hat, bekommen wir

$$(n-1)!\,n!\,n!\,.\,.\,.=\frac{(n!)^{\lambda}}{n}$$

verschiedene Anordnungen. Diese Anordnungen sind aber noch alle so beschaffen, dass z. B. für $\lambda=4$ jede II zwischen einer I und einer III, jede III zwischen einer II und einer IV, jede IV zwischen einer III und einer I und jede I zwischen einer IV und einer II sitzt. Indem wir jetzt die Aufeinanderfolge innerhalb jeder Gruppe von λ Personen gleichmässig ändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit festsetzen, dass die Personen I stets Flügelmänner ihrer Gruppen bleiben, denn bei jeder vorliegenden Tischordnung bleibt es der Willkür des Beobachters überlassen, von welcher Sorte aus er jede Gefolgschaft von λ Personen zu zählen beginnen will, sodass uns keine Anordnung entgehen kann, wenn wir die Gefolgschaften stets mit den Personen I anfangen. Somit ergeben sich $(\lambda-1)!$ gleichberechtigte Fälle zu je $\frac{(n!)^{\lambda}}{n}$ Anordnungen. Berücksichtigen wir endlich, dass bis jetzt jede Anordnung doppelt gezählt ist, einmal rechtsherum, einmal linksherum, so erhalten wir nach Division durch 2:

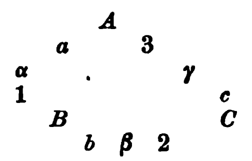
$$F\lambda(n)=\frac{(n!)^{\lambda}(\lambda-1)!}{2n}\tag{7}$$

Die Formel bleibt offenbar auch für $n=1$ richtig.

Beispiel: $\lambda=4$, $n=3$. Man soll erhalten:

$$F_4(3)=\frac{(3!)^4\,.\,3!}{6}=6^4=1296$$

Die erste Anordnung sei:



A ist Flügelmann der Gruppe $Aa\alpha 1$ u. s. f.; zugleich sei A die auf festem Platze sitzende Person. Man vertausche nun B und C auf ihren Plätzen und **bloss** auf diesen, ebenso abc, $\alpha\beta\gamma$ und 123: bisher giebt es $2 \cdot 6^3$ Anordnungen. Ueberall aber hat I (grosser lateinischer Buchstabe) noch Nachbarn von bestimmten Sorten (II und IV, kleiner lateinischer Buchstabe und Ziffer). Man nehme jetzt die Umstellung der Sorten vor: von den Stellungen

I	I	I	I	I	I
II	II	III	III	IV	IV
III	IV	II	IV	II	III
IV	III	IV	II	III	II

sind nur drei wirklich verschieden: die sechste z. B. ist bis auf den Drehungssinn dieselbe wie die erste. Daher erhalten wir in der Tat

$$2 \cdot 6^3 \cdot 3 = 6^4 = 1296$$

verschiedene Anordnungen.

Dasselbe für mehrere Tische. Am ersten Tische sollen k_1 Gruppen sitzen, am zweiten $k_2, \ldots$, am $r$ten k_r. Setzt man zunächst die k_i als sämtlich verschieden voraus, und beschränkt man sich vorläufig auf eine beliebig festgesetzte Normalreihenfolge der einzelnen Sorten innerhalb jeder Gruppe, so erhält man das Resultat:

$$n)^\lambda{}_{k_1} (n-k_1)^\lambda{}_{k_2} (n-k_1-k_2)^\lambda{}_{k_3} \ldots (k_r)^\lambda{}_{k_r} \cdot$$
$$\cdot \frac{(k_1!)^\lambda}{k_1} \cdot \frac{(k_2!)^\lambda}{k_2} \ldots \frac{(k_r!)^\lambda}{k_r} = \frac{(n!)^\lambda}{k_1 k_2 \ldots k_r}$$

Sind unter den k_i α und β und $\gamma \ldots$ gleiche vorhanden, so haben wir aus den früher angegebenen Gründen noch durch $\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots$ zu dividiren. Der Fall, dass ein oder einige $k_i = 1$ sind, ist nicht ausgeschlossen. Lässt man endlich noch die Sorten innerhalb jeder Gruppe permutiren und zwar in jeder Gruppe und **an allen Tischen gleichmässig**, so erhält man, wie sofort eingehender erörtert werden soll, $\frac{(\lambda-1)!}{2}$ gleichberechtigte Fälle, sodass sich das Resultat ergiebt:

$$\begin{cases} F\lambda(k_1, k_2, \ldots k_r) = \dfrac{(n!)\lambda}{k_1 k_2 \ldots k_r} \cdot \dfrac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} \cdot \dfrac{(\lambda-1)!}{2} \\ \lambda > 2 \end{cases} \quad (8)$$

Wir haben noch den Nachweis zu führen, dass wir hier mit $\frac{(\lambda-1)!}{2}$ und nicht wie im Falle $\lambda = 2$ mit $\frac{(\lambda-1)!}{2^{r-\tau}}$ zu multipliciren haben. Zwei Tischordnungen werden nur dann als identisch gelten, wenn jede Person an jedem Tische ihre Nachbarn beibehalten hat. Dies wird in unserem Falle nur dann erreicht sein, wenn sich die Personen an sämtlichen Tischen gleichzeitig in verkehrter Reihenfolge (oder „in entgegengesetztem Drehungssinn") anordnen. Daher würden wir, wenn wir mit $(\lambda-1)!$ multiplicirten, jede Anordnung zweimal gezählt haben; der richtige Zusatzfactor ist also $\frac{(\lambda-1)!}{2}$. Anders lag die Sache im Falle $\lambda = 2$. Dort hatten wir $r-\tau$ Tische, an denen die $k_i > 1$ waren. Wenn an einem oder mehreren dieser Tische eine Umordnung der Personen in verkehrter Reihenfolge eintrat, so wurden dadurch die übrigen unter diesen Tischen nicht mit betroffen, weil bei zwei Sorten (I und II) das Gesetz der Abwechslung in ihrer Aufeinanderfolge oder das Gesetz der bunten Reihe durch eine Umordnung gedachter Art nicht gestört wird. Die Gesamt-Tischordnung im Sinne unserer Definition blieb also dieselbe für $2^{r-\tau}$ verschiedene Sitzweisen: darum mussten wir eben nicht mit $(\lambda-1)!$, sondern mit $\frac{(\lambda-1)!}{2^{r-\tau}}$ multipliciren.

Im Falle $\lambda > 2$ hat die Verkehrung der Personenfolge an einem Tische, gleichgültig, ob dessen $k_i >$ oder $= 1$ ist, stets auch eine Umordnung an den anderen Tischen, wenn auch nur innerhalb der einzelnen Grupppen, zur Folge: denn durch die Bedingung der völlig gleichmässigen Gruppirung der λ Sorten waren die verschiedenen Tische einheitlich verbunden. Soweit nun die übrigen Tische solche sind, deren $k_i = 1$ ist, tritt an ihnen allerdings nichts Neues ein, wohl aber für alle Tische mit grösserem k_i, sodass jede Umordnung auch nur an einem Tische eine neue Gesamtordnung ergiebt. Nur der Fall, dass für sämtliche übrigen Tische oder auch für sämtliche Tische überhaupt die $k_i = 1$ sind, erfordert eine gesonderte Behandlung: dieser Fall erledigt sich aber leicht, da dann mit der vorausgesetzten Verkehrung der Reihenfolge an dem einen Tische die gleichzeitige Verkehrung an allen übrigen Tischen von selbst verbunden ist: die Bedingung, die zur Aufstellung des Factors $\frac{(\lambda-1)!}{2}$ führte, ist hier also von selbst erfüllt. — Zur Erläuterung möge

noch das Folgende dienen: an einem Tische mit $k_i = 1$ mag die ursprüngliche Reihenfolge $\underset{a\quad\alpha}{A}$ umgewandelt werden in $\underset{\alpha\quad a}{A}$. An einem andern Tische, dessen $k_i = 2$ oder 3 ist, geht dann die ursprüngliche Reihenfolge

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ b & & \gamma \\ \beta & & c \\ & C & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} & B\delta & \\ b & & d \\ \beta & & D \\ & C\,c\gamma & \end{array}$$

über in die ganz andere:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \beta & & c \\ b & & \gamma \\ & C & \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{ccc} & Bd & \\ \beta & & \delta \\ b & & D \\ & C\,\gamma c & \end{array}$$

Ebenso hat die Verkehrung der Reihenfolge an einem Tische $k_i = 3$, nämlich

$$\begin{array}{ccc} & aA_3 & \\ \alpha & & \gamma c \\ 1 & & C \\ & B b\beta & 2 \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{ccc} & {}_3A a\alpha & \\ \gamma & & 1 \\ c & & B \\ & C_2\beta & b \end{array}$$

an anderen Tischen $k_i = 1$ und 3 die Folge, dass sich

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ d & & 4 \\ & \delta & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} & lL7 & \\ \lambda & & \nu \\ 5 & & n \\ M & & N \\ & m\mu & 6 \end{array}$$

umwandeln in

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ 4 & & d \\ & \delta & \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} & 5Ln & \\ \lambda & & \nu \\ l & & 7 \\ M & & N \\ & 6\mu\; m & \end{array}$$

Specialfälle: $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = \frac{n}{r}$ ergiebt:

$$F\lambda\left(\frac{n}{r}, \frac{n}{r}, \ldots \frac{n}{r}\right) = \frac{(n!)^\lambda}{\left(\frac{n}{r}\right)^r . r!} . \frac{(\lambda-1)!}{2} \tag{9}$$

Für $r = n$ erhält man

$$F\lambda(1, 1, \ldots 1) = (n!)^{\lambda-1} . \frac{(\lambda-1)!}{2} \tag{10}$$

Beispiel. $F\lambda(1, 1) = 2^{\lambda-2} . (\lambda-1)!$, d. h. für $\lambda = 3$ und $\lambda = 4$ bezüglich $= 4$ und $= 24$.

$\lambda = 3$:

A		B	
a	α	b	β

A		B	
b	α	a	β

A		B	
a	β	b	α

A		B	
b	β	a	α

$\lambda = 4$ (bloss der erste Tisch ist 8 mal dargestellt):

A	A	A	A	A	A	A	A
a 1	a 2	a 1	b 1	a 2	b 2	b 1	b 2
α	α	β	α	β	α	β	β

Jetzt treten in der ersten Anordnung $Aa\alpha 1$ die Umstellungen ein: $Aa1\alpha$ und $A\alpha a1$; ebenso in den übrigen sieben. Andere Umstellungen, wie $A\alpha 1a$, $A1a\alpha$, $A1\alpha a$ ergeben nichts Neues. Somit bestätigt sich die Formel

$$F_4(1, 1) = 24$$

Weitere Beispiele sind:

$F_3(1, 1, 1) = (3!)^2 = 36$. Erste Anordnung:

A		B		C	
a	α	b	β	c	γ

Man permutire a, b, c bloss auf ihren Plätzen und ebenso α, β, γ auf den ihrigen; Zahl der Anordnungen

$$= 6 . 6 = 36$$

$F_4(1, 1, 1) = \frac{(3!)^4}{2} = 648$. Erste Anordnung:

A	B	C
a 1	b 2	c 3
α	β	γ

Man permutire a, b, c auf ihren Plätzen, ebenso α, β, γ und 1, 2, 3: bisher 6^3 Anordnungen; dann $a\alpha 1$ unter sich: Factor $\frac{3!}{2} = 3$; also in der Tat

$$3 . 6^3 = 648$$

$F_3(2, 2) = \frac{(4!)^3}{2^2 . 2} = 1728$. Erste Anordnung:

A		*C*	
a	β	*c*	δ
α	*b*	γ	*d*
B		*D*	

Man permutire *a*, *b*, *c*, *d* auf ihren Plätzen, ebenso α, β, γ, δ, ebenso *B*, *C*, *D*, die letzteren aber so, dass am zweiten Tisch nur *B* oder *C* den jetzt von *C* innegehabten Platz besetzen darf; also:

$$\frac{4!\ 4!\ 3!}{2} = 1728$$

Noch seien zwei Formeln erwähnt, die sich durch Vergleichung von (7), (9), (10) ergeben:

$$\frac{F\lambda(n)}{F\lambda\left(\frac{n}{r}, \frac{n}{r}; \ldots \frac{n}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{n}{r}\right)^r \cdot r!}{n} = \left(\frac{n}{r}\right)^{r-1} (r-1)!$$

$$\frac{F\lambda(n)}{F\lambda(1, 1, \ldots 1)} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

XV.

Die Willensfreiheit und der physische Determinismus.

Von

R. Hoppe.

Vor 15 Jahren hat Boussinesq in einem Artikel der Comptes Rendus t. LXXXIV. p. 362—364: „Sur la conciliation de la liberté morale avec le déterminisme scientifique" dargetan, dass die Willensfreiheit der Menschen mit keinem physikalischen Causalitätsgesetze im Widerspruch steht, und dass die Fälle freier Wahl nur vermöge gewisser Eigenschaften der Materie in der leblosen Natur nicht vorkommen können. Der Artikel ist kurz gefasst, doch reichen die gegebenen Andeutungen hin, die nicht ausgeführte strenge Begründung erkennen zu lassen. Da die entgegengesetzte Meinung, die Willensfreiheit sei unverträglich mit durchgehender Causalität, seit Jahrhunderten eine sehr verbreitete, nur mit eilfertiger und augenfällig mangelhafter Logik verteidigte, gewiss noch nie eingehend geprüfte ist, so ist die von Boussinesq dargebotene Erledigung der Frage unstreitig von grosser Wichtigkeit, und sein Gedanke verdient mit hinreichender Ausführlichkeit ans Licht gestellt zu werden, die vielleicht nur gefehlt hat um demselben Beachtung zu verschaffen.

Indessen brauchen wir bei den genannten 2 Sätzen nicht stehen zu bleiben. Die Hauptfrage, ob die Willensfreiheit existirt, wird durch jene gar nicht in Angriff genommen. Auch in Bezug auf sie macht sich die leichtfertige Logik populär; man sagt: das vermeintliche Bewusstsein der Willensfreiheit beruhe auf Selbsttäuschung; denn für jede Wahl gäbe es Bestimmungsgründe; fragt aber nicht danach, ob dieselben zur Entscheidung hinreichen, namentlich wenn

solche teils für, teils wider sprechen. Ein mathematischer Beweis der Existenz der Willensfreiheit lässt sich geben. Wir wollen im folgenden die drei Fragen, deren letzte sich wieder in zwei teilt, nach einander behandeln und die Antworten als Thesen voranstellen.

Ehe wir indes damit beginnen, ist es nötig den Sinn einiger Ausdrücke zu präcisiren.

1) Die Wörter „Ursache", „Causalität" gebrauchen wir nur im physikalischen Sinne. Demgemäss können Vorgänge an concreten Gegenständen durch Ursachen nur in Verbindung mit einer Epoche, d. h. einem vorausgehenden momentanen Zustande derselben Gegenstände bestimmt werden. Die Ursache ist ein dauerndes Gesetz' ihre Wirkung eine Zustandsänderung. Nur in zeitlicher Succession können Vorgänge causal verbunden sein, die gleichzeitigen sind es nicht.

2) Unter den möglichen Verbalprädicaten eines Menschen ist es schwer ein hinreichend allgemeines zu finden, das unabhängig von der Willensfreiheit verstanden würde. „Handlung" wird als activ gedeutet, „Vorgang" als passiv, und Activität unterscheidet sich nur durch die Willensfreiheit von Passivität. Da nun für eine Untersuchung über die Frage der Willensfreiheit ein Wort, welches ihr nicht vorgreift, unentbehrlich ist, so wählen wir dazu das Wort „tun". Dieses wird zwar für sich activ verstanden; doch sagt man nach einem vorausgehendem Verbum, auch wenn es ein Erleiden bedeutet: „Er tut es". Wir setzen daher fest, dass die Wörter „tun" und „Tat" hier Activität und Passivität ohne Unterschied umfassen.

Satz 1. „Die Willensfreiheit widerstreitet nicht dem ausnahmlosen causalen Zusammenhange der Vorgänge".

Ich beginne der Deutlichkeit wegen mit einem Beispiele. Es ist ohne Zweifel möglich eine undurchdringliche Fläche und einen schweren Punkt zu denken, gleichviel ob solche in der materiellen Natur existiren. Eine solche Fläche habe die Gleichungen:

$$x = \varrho \cos\varphi; \quad y = \varrho \sin\varphi; \quad \varrho = \psi - \sin\psi; \quad z = 1 - \cos\psi \qquad (1)$$

Die zAxe habe die positive Richtung der Schwerkraft. Ein Punkt von der Masse 1 bewege sich auf der Fläche, allein unter dem Einfluss seiner Schwere g. Dann sind die ersten Integrale der Bewegungsgleichungen:

$$\varrho^2 \partial\varphi = \gamma \partial t \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \sin\frac{\psi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\varrho}\right)^2 = g \sin^2\frac{\psi}{2} + h \qquad (3)$$

(γ und h constant)

Nach Gl. (3) kann die Spitze $\psi = 0$ nur erreicht werden für $\gamma = 0$. Ist dann $h < 0$, so wird sie auch nicht erreicht; für $h = 0$ wird sie mit Nullgeschwindigkeit erreicht; für $h > 0$ ist die lebendige Kraft in der Spitze nicht erschöpft, der Punkt geht in der Tangente nach oben weiter und fällt auf sie zurück, ohne dass die Spitze sein Weiterfallen hindern kann. Für $h = 0$ hat man nach Gl. (3) (2):

$$\psi = \sqrt{g}(t - t_0); \qquad \varphi = \text{const}$$

und zwar sei für $t < t_0$

$$\varphi = \alpha$$

also

$$x = \varrho \cos\alpha; \quad y = \varrho \sin\alpha$$

Zur Zeit $t = t_0$ verschwinden x, y, z, ∂x, ∂y, ∂z, werden mithin unabhängig von α: folglich kann aus der ganzen Epoche der Bewegung der Wert von φ für alle Folgezeit nicht bestimmt werden. Wir können daher beliebig setzen:

$$\varphi = \beta \quad \text{für} \quad t > t_0$$
$$x = \varrho \cos\beta; \quad y = \varrho \sin\beta$$

Auf den Fall $h > 0$, wo das Analoge stattfindet, brauchen wir nicht einzugehen.

Hiermit ist gezeigt, dass das einfachste physikalische Gesetz, das der Schwerkraft, Fälle theoretisch zulässt, wo die dasselbe unabänderlich befolgende Bewegung in einzelnen Zeitpunkten sich willkürlich ändert, indem irgend welche Integrationsconstanten willkürliche andre Werte annehmen.

Es kommt nun bloss darauf an, ob etwas entgegensteht, dass der Zeitpunkt einer Willensentscheidung ein singulärer Punkt der bezeichneten Art in den physischen Vorgängen ist. Nach einem Satze der Physiologie ist jede psychische Tat, Empfindung, reflexives und äusserndes Denken, von gleichzeitigen eindeutig entsprechenden Vorgängen in den Nerven begleitet. Nur von den Organen der Empfindung und des äussernden Denkens sind Vorgänge bekannt, die des reflexiven Denkens sind es überhaupt nicht. Jede Tat aber, (Reflexion oder Gliederbewegung), die direct aus der Empfindung hervorgeht, ist unfrei, nur aus reflexivem Denken kann ein freies Wollen hervorgehen. Da die demselben entsprechenden physischen Vorgänge gänzlich unbekannt sind, so ist es klarerweise unmöglich einen Einwand gegen die Annahme zu erheben, dass sie singuläre Punkte enthalten, in denen sich die Folgen mit Erhaltung des Causalgesetzes willkürlich spalten, w. z. b. war.

Satz 2. „Der causale Determinismus der leblosen Natur wird durch den 1. Satz nicht berührt“

In der Mechanik physischer Körper kann der im Beweise zu Satz 1. gedachte Fall nicht vorkommen. Denn hier kann die Fläche (1) nur vermöge abstossender Kräfte undurchdringlich sein, während sie daselbst als indifferent betrachtet ward, und der bewegte Punkt gehört einem System von Punkten an, dessen innere Beziehungen die Unabhängigkeit von α und β aufheben würden. Handelt es sich aber um physische Vorgänge, deren Reduction auf Mechanik zur zur Zeit noch Problem ist, so gehört das Bestimmtsein der Folgen durch die Ursachen zu den Bedingungen der Lösung. Nun ist die Lösbarkeit aller physikalischen Probleme überhaupt nicht apriori verbürgt. Die mögliche Unlösbarkeit schliesst dann den Fall singularer Unbestimmtheit in sich. Folglich ist Satz 1., indem er die logische Möglichkeit singularer Unbestimmtheit innerhalb der fortbestehenden Causalität beweist, eine einfache specielle Bestätigung einer auch ohne ihn vorhandenen Ungewissheit und vermindert nicht die Berechtigung den causalen Determinismus der leblosen Natur als Antrieb zur Untersuchung vorauszusetzen, w. z b. war.

Satz 3. „Nicht alles, was Menschen tun, ist vorher bestimmt.“

Wir nehmen an: zwei Menschen A und B gehen folgende Wette ein. Jeder schreibt eine Zahl auf. Nach Vergleichung soll derjenige gewonnen haben, welcher die grössere Zahl aufgeschrieben hat.

Wüsste nun A die Zahl b, welche B schreibt, so würde er eine Zahl $a > b$ schreiben. Wüsste auch B die Zahl a, welche A schreibt, so würde er eine Zahl $b > a$ schreiben. Es ergäbe sich der Widerspruch

$$a > b > a$$

Folglich ist es unmöglich, dass Jeder vorher weiss, was der Andere tun wird.

Offenbar ist nun der resultirende Widerspruch unabhängig von aller Begabung und allen Geistesfähigkeiten der zwei Beteiligten. Wäre also das, was jeder tut, notwendige Folge alles dessen, was vorhergegangen ist, so könnte man annehmen, dass A und B von allen mitwirkenden Tatsachen Kenntniss gehabt, und die notwendige Folge daraus sicher geschlossen hätten. Es ist daher ebenso unmöglich, dass die Wahl der Zahlen, welche Beide trafen, aus allem Vorhergegangenen mit Notwendigkeit hervorgieng.

Mit Anwendung auf alle Menschen und alle Zeiten folgt daraus, dass es nicht mehr als einen Menschen gegeben haben kann, dessen

sämtliches Tun determinirt wäre, und dass dieser eine längst tot sein würde.

Satz 4. „Ueber alles Tun der Menschen, welches nicht durch Ursachen vollständig bestimmt ist, entscheidet der Wille.“

Die Begründung dieses Satzes ist empirisch und bedarf der Ergänzung durch eine Hypothese.

Zunächst muss ich eine Argumentation abweisen, die, so beliebt sie auch sein mag, aus irrigem und sehr verderblichem Princip hervorgeht. Wäre nämlich keine Entscheidung apriori vorhanden, so würden die Vorgänge nach Zufall eintreten. Dies scheint Vielen undenkbar, und sie halten die Unmöglichkeit damit für bewiesen. Dennoch würde die Vernunft gegen die erfolgende Tatsache nichts einzuwenden vermögen. Dadurch, dass das erkennende Subject etwas (die Ursache) bedarf, kann das Object nicht gezwungen sein sich dem Bedürfnisse gemäss zu verhalten. Jene Schlussweise ist ein Selbstbetrug, der oft als unbewusstes Vorurteil einwurzelt und gegen die offenen Bahnen der Erkenntniss blind macht.

Unser Fall lässt uns den fehlenden apriorischen Beweis nicht vermissen. Die Erfahrung gibt uns reichlich die Beantwortung unserer Frage. In unzähligen Fällen geht der Tat der Gedanke der Tat bewusstermassen voraus. Die Uebereinstimmung des Gedankens mit dem folgenden Geschehen zeigt dann die Abhängigkeit des letztern vom Gedanken. Die Zeit zwischen beiden kann beliebig kurz, mithin unmerklich sein, d. h. zur bewussten Auffassung der Succession nicht hinreichen. Gleichzeitigkeit des Gedankens mit dem gedachten Geschehen aber ist unmöglich. Denn wir denken stets, mit Ueberspringung der executiven Nerven- und Muskelvorgänge, unmittelbar an die Gliederbewegung (wenn nicht noch darüber hinaus an die Wirkung auf äussere Gegenstände); daher liegt stets zwischen dem Gedanken und der entsprechenden Ausführung durch die Glieder die Zeit der Fortpflanzung vom Gehirn bis zu den Gliedern. Der Gedanke nun, der in der genannten Beziehung zu dem ihm folgenden Geschehen steht, heisst, wofern letzteres nicht ursächlich bestimmt war, der Wille.

Hiermit ist unter Satz noch nicht vollständig bewiesen, weil noch fraglich bleibt, ob neben den durch Willen entschiedenen, es noch andre ursächlich nicht bestimmte Vorgänge geben kann, die zu keiner Entscheidung gelangen, bevor eine unerklärbare Tatsache entscheidend eintritt.

Zur Ergänzung stelle ich folgende, gewiss zulässige Hypothese auf: „Jedem singularen Punkte in den Nervenvorgängen, in welchem

die Folgen causal unbestimmt werden, entspricht in der Seele ein gesteigert klares Bewusstsein der wirklichen objectiven Umgebung des Menschen und der in dem Augenblicke erlangten Freiheit."

Dies angenommen, ist es nicht möglich, dass die erfolgende Nervenaction anders endigt als dem Gedanken entsprechend, ohne dass der Mensch es merkte, mithin würde es sich als Ausnahme von der allgemeinen Erfahrung offen darstellen.

Die Bestätigung anlangend, ist zunächst die Annahme an die Hand gegeben, dass die Gliederbewegung eines vernünftigen Wesens mit der richtigen Vorstellung von seiner Umgebung verbunden ist, weil sie Bedingung des beabsichtigten Erfolges der Bewegung ist. Eine auffallend treffende Bestätigung hat gewiss schon Maneher im halbwachenden Zustande erlebt, wo, solange noch traumhafte Vorstellungen von der Oertlichkeit in das Erwachen-wollen sich einmischen, alles Streben die Glieder zu bewegen erfolglos ist, im Augenblicke aber der Erinnerung an die wirkliche Oertlichkeit die freie Gliederbewegung und das volle Erwachen sofort eintritt.

XVI.

Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie.

Von

R. Hoppe.

Es soll zuerst das vollständige System von Regelflächen, welche eine gegebene Curve zur gemeinsamen Strictionslinie haben, analytisch dargestellt, dann das Resultat geometrisch interpretirt, und der Constructionsweg einer beliebigen Regelfläche gezeigt werden.

Gegeben sind, mit der Curve s, die Richtungscosinus der Tangente f, g, h, der Hauptnormale f', g', h', der Binormale l, m, n, der Krümmungs- und Torsionswinkel τ und ϑ.

Gesucht sind die Richtungscosinus a, b, c der Erzeugenden der Regelfläche. Bedingung dafür, dass s ihre Strictionslinie sei, ist

$$f\partial a + g\partial b + h\partial c = 0$$

Setzt man

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 \tag{1}$$

so sind $\frac{\partial a}{\partial v}, \frac{\partial b}{\partial v}, \frac{\partial c}{\partial v}$ die Richtungscosinus einer Geraden L, welche auf der Tangente von s senkrecht steht, haben daher den allgemeinen Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial v} &= f'\cos\mu + l\sin\mu = p\\ \frac{\partial b}{\partial v} &= g'\cos\mu + m\sin\mu = q\\ \frac{\partial c}{\partial v} &= h'\cos\mu + n\sin\mu = r\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sofern μ willkürlich bleibt, sind p, q, r bekannte Grössen.

Setzt man

$$\partial w^2 = \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 \tag{3}$$

$$p_1 = \frac{q\,\partial r - r\,\partial q}{\partial w}; \quad q_1 = \frac{r\,\partial p - p\,\partial r}{\partial w}; \quad r_1 = \frac{p\,\partial q - q\,\partial p}{\partial w} \tag{4}$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} p & \frac{\partial p}{\partial w} & \frac{\partial^2 p}{\partial w^2} \\ q & \frac{\partial q}{\partial w} & \frac{\partial^2 q}{\partial w^2} \\ r & \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial^2 r}{\partial w^2} \end{vmatrix} \tag{5}$$

so wird

$$\frac{\partial^2 p}{\partial w^2} = \varDelta p_1 - p; \quad \frac{\partial^2 q}{\partial w^2} = \varDelta q_1 - q; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial w^2} = \varDelta r_1 - r \tag{6}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial w} = -\varDelta \frac{\partial p}{\partial w}; \quad \frac{\partial q_1}{\partial w} = -\varDelta \frac{\partial q}{\partial w}; \quad \frac{\partial r_1}{\partial w} = -\varDelta \frac{\partial r}{\partial w}$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial w^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial w^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial w^2}\right)^2 = \varDelta^2 + 1$$

Durch dreimalige Differentiation der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

erhält man vermöge der Formeln (2) (6):

$$pa + qb + rc = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial w} a + \frac{\partial q}{\partial w} b + \frac{\partial r}{\partial w} c = -\frac{\partial v}{\partial w} \tag{8}$$

$$p_1 a + q_1 b + r_1 c = -\frac{1}{\varDelta} \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} \tag{9}$$

woraus:

$$a = -\frac{\partial p}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial w} - \frac{p_1}{\varDelta} \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}; \quad \text{etc.} \tag{10}$$

daher:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 = \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\varDelta^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\right)^2$$

integrirt:

$$\frac{\partial v}{\partial w} = \sin \int \varDelta\,\partial w; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} = \varDelta \cos \int \varDelta\,\partial w \tag{11}$$

eingeführt in die Gleichung (10):

$$a = -\frac{\partial p}{\partial w}\sin\int\varDelta\,\partial w - p_1\cos\int\varDelta\,\partial w; \quad \text{etc.} \tag{12}$$

Die Gleichungen der Regelfläche lauten also:

$$x_1 = x - u\left(\frac{\partial p}{\partial w}\int\varDelta\,\partial w + p_1\cos\int\varDelta\,\partial w\right); \quad \text{etc.} \tag{13}$$

Sei nun ψ_2 eine Curve, deren Tangente die Richtungscosinus p, q, r hat; dann ist nach Gl. (3) w ihr Krümmungswinkel und nach Gl. (5) $\varDelta$ ihr Krümmungsverhältniss, das wir durch $\frac{\partial\eta}{\partial w}$ bezeichnen, daher

$$\eta + \text{const} = \int\varDelta\,\partial w \tag{14}$$

ihr Torsionswinkel; ferner sind die Richtungscosinus

ihrer Hauptnormale $\frac{\partial p}{\partial w}, \frac{\partial q}{\partial w}, \frac{\partial r}{\partial w}$

ihrer Binormale p_1, q_1, r_1

Ist demnach ψ_3 parallel ψ_2, und sind $x_3 y_3 z_3$, $x_2 y_2 z_2$ entsprechende Coordinaten beider Curven, so ist

$$x_3 = x_2 - k\left[\frac{\partial p}{\partial w}\cos(\eta + \varkappa) - p_1\sin(\eta + \varkappa)\right]; \quad \text{etc}$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Gl. (12), wenn man

$$\frac{x_3 - x_2}{k} = a; \quad \text{etc.}$$

und $\varkappa + R$ an die Stelle der Constanten in Gl. (14) setzt; und zwar bedeutet k den Normalabstand der Parallelen, und es zeigt sich, dass a, b, c die Richtungscosinus ihrer gemeinsamen Normale sind.

Um also aus der Strictionslinie s die Regelfläche zu construiren, hat man erst eine beliebige Normalenfläche an s zu legen, indem man eine Gerade L an s gleiten lässt, die beständig mit der Tangente einen rechten Winkel macht, dabei aber beliebig um die Tangente rotiren kann. Diese Gerade hat dann die Richtungscosinus p, q, r. Dann beschreibt man (als Nebenfigur) eine Curve ψ_2, deren Tangente in den, den Curvenpunkten von s entsprechenden Punkten den obigen Normalen von s gleichgerichtet ist, und parallel mit ihr eine Curve ψ_3. Parallel mit der Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von ψ_2 und ψ_3 zieht man endlich durch den entsprechenden Punkt von s die Erzeugende der gesuchten Regelfläche.

Das Resultat enthält 2 willkürliche Functionen und 2 willkürliche Constanten. Zunächst ist die Rotation von L um die Tangente von s, gemessen durch die Variable μ, willkürlich. Ferner bleibt bei Bestimmung von ψ_2 durch die blosse Tangente das Linienelement $\partial\psi_2$ willkürlich. Endlich sind zur Bestimmung der Parallele ψ_3 noch 2 Constanten willkürlich festzusetzen, der Normalabstand k und der Winkel $\varkappa$ zwischen der gemeinsamen Normale und einer solchen für eine beliebig fest zu wählende Parallele ψ_0.

Von der im Vorstehenden gelösten Aufgabe sind bereits zwei Specialfälle, der eine für eine ebene, der andre für eine sphärische Strictionslinie, in einer Schrift von G. Pirondini: „Sulle superficie rigate". Battaglini G. XXV. — unter vielen andern die Regelflächen betreffenden Fragen behandelt worden.

XVII.

Miscellen.

1.

Dreiteilung jedes Winkels mittelst fester Kegelschnitte. (Dritter Artikel).

Im Anschluss an meine früheren Mitteilungen in diesem Archiv (II. Reihe, 10ter Teil, pag. 333—336 und pag. 441—442) und an eine inzwischen veröffentlichte Abhandlung [1]) wird nunmehr die Dreiteilung jedes Winkels mittelst einer festen Ellipse angegeben. Sie beruht auf folgendem Lehrsatz:

> Wenn man die eine der beiden Katheten ($CB = a$) eines rechtwinkligen Dreiecks ACB in zwölf, die andere ($CA = b$) in vier gleiche Teile teilt, durch den fünften Teilpunkt E der ersteren und den dritten Teilpunkt F der letzteren Parallele zu den Katheten legt, deren Schnittpunkt O heisse, FA durch A bis G verlängert, sodass FG die Grösse der Höhe eines über $\frac{b}{2}$ errichteten gleichseitigen Dreiecks erreicht, OB_1 und OB_2 gleich OG und OA_1 und OA_2 zu Höhen des über $B_1 B_2$ errichteten gleichseitigen Dreiecks macht, so wird der dem Dreieck ACB umgeschriebene Kreis von der Ellipse, deren Mittelpunkt O und deren Achsen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ sind, in C und den drei Punkten P_1, P_1 und P_3 derartig geschnitten, dass AP_1 und BP_3

1) Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Falk-Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1892. Ueber einige Lösungen des Trisectionsproblems mittelst fester Kegelschnitte. Von Wilhelm Panzerbieter. R. Gaertners Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder).

Trisectionslinien der spitzen Winkel BAC und ABC, AP_2 BP_2 Trisectionslinien der entsprechenden Nebenwinkel und MP_1 und MP_3 Trisectionslinien der Winkel BMC und AMC sind.

Beweis: Da $FO = \frac{5a}{12}$ und $FG = \frac{b\sqrt{3}}{4}$ ist, so folgt:

$$OG = \sqrt{\frac{25a^2}{144} + \frac{3b^2}{16}} = OB_1 = b_1 \quad \text{und} \quad OA_1 = b_1\sqrt{3}$$

Die halbe lineare Excentricität der Ellipse ist daher gleich $b_1\sqrt{2}$; ihre numerische Excentricität ε gleich $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Macht man OA_1 zur Xachse und OB_1 zur Yachse eines Coordinatensystems, so lautet die Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{3b_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

oder:

$$x^2 + 3y^2 = \frac{25a^2}{48} + \frac{9b^2}{16} \qquad \text{(I)}$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von O nach dem vierten Teilpunkt L der der Kathete a, so nimmt die Gleichung (I), da $x - \frac{3}{4}b$ für x und $y - \frac{a}{12}$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$x^2 - \frac{3}{2}bx + \frac{9b^2}{16} + 3y^2 - \frac{a}{2}y + \frac{a^2}{48} = \frac{25a^2}{48} + \frac{9b^2}{16}$$

oder:

$$2x^2 - 3bx + 6y^2 - ay = a^2 \qquad \text{(II)}$$

an, während die Gleichung des dem Dreieck ACB umgeschriebenen Kreises

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{6}\right)^2 = r^2$$

lautet und, da $r^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ ist, in

$$x^2 - bx + y^2 - \frac{a}{3}y = \frac{2a^2}{9}$$

oder:

$$3x^2 - 3bx + 3y^2 - ay = \frac{2a^2}{3} \qquad \text{(III)}$$

übergeht Durch Subtraction der Gleichung (III) von (II) ergiebt sich:

$$3y^2 - x^2 = \frac{a^2}{3}$$

oder:

$$y^2 - \tfrac{1}{3}x^2 = \frac{a^2}{9} \qquad \text{(IV)}$$

Da nun die Coordinaten der Schnittpunkte der Ellipse und des Kreises auch der Gleichung (IV) genügen müssen und diese letztere eine der beiden Hyperbeln ($\varepsilon = 2$) darstellt, deren Schnittpunkte mit dem Kreise nach den früheren Mitteilungen die Bogen der Centriwinkel 2α und 2β, $180^0 - 2\alpha$ und $180^0 - 2\beta$ etc. triseciren (wenn α und β die spitzen Winkel BAC und ABC bedeuten), so ist hiermit der obige Lehrsatz bewiesen.

Aus demselben ergiebt sich folgende (weniger einfache) Construction für die Dreiteilung jedes beliebigen (concaven) Winkels 2β mittelst der festen Ellipse $O'(\varepsilon = \sqrt{\tfrac{2}{3}})$:

Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck QRS mit dem spitzen Winkel $RQS = \beta$, mache $RT = \frac{5RS}{12}$ und $RU = \frac{RQ}{4}\sqrt{3}$, construire das dem Dreieck URT ähnliche Dreieck WRZ, dessen Hypotenuse die Länge der halben kleinen Achse $O'B_1'$ hat und ziehe durch Z die zu SQ parallele Gerade ZN. Alsdann trage man die Kathete RN auf der Hauptachse der Ellipse von A_2' bis K und die andere Kathete RZ auf der Scheiteltangente als $A_2'H$ ab, verlängere diese durch A_2' bis J, sodass $A_2'J = \tfrac{1}{3}A_2'H$ wird, lege durch H und J Parallele zur Hauptachse, bis erstere die Ellipse in C, letztere die durch C zu HK gelegte Parallele in M schneidet. und schlage um M mit dem Radius MC den Kreis. Dieser trifft den Schenkel des an JM in M anzutragenden Winkels β in A und die Ellipse in einem zwischen A und C liegenden Punkte P_3, für welchen Wkl. $AMP_3 = \tfrac{1}{3}$ Wkl. $AMC = \frac{2\beta}{3}$ ist. Für die beiden anderen Schnittpunkte P_2 und P_1 ist Wkl. $AMP_2 = \tfrac{1}{3}(360^0 - 2\beta)$ und Wkl. $AMP_1 = \tfrac{1}{3}(360^0 + 2\beta)$.

Wilhelm Panzerbieter.

2.

Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken.

Auf 2 Geraden G, H seien vom Schnittpunkt P aus 2 Strecken a, b je 2mal in gleicher Richtung abgetragen, so dass

$$PQ = QS = a \text{ (auf } G); \quad PR = RT = b \text{ (auf } H)$$

wird. Die Verbindungsgeraden QT und RS schneiden sich in Dann ist M zunächst Schwerpunkt des Dreiecks PST.

Jetzt trage man ferner auf G von Q aus nach beiden Seiten l die Strecke $QA = QC = m$ und von R aus nach beiden Seit hin die Strecke $RB = RD = n$ ab. Dann ist M auch Schw punkt des Vierecks $ABCD$.

Indem m und n unabhängig variiren, erhält man ein Syst von Vierecken mit gemeinsamem Schwerpunkt. Durch Vertauschu der Seiten des Dreiecks AST ergeben sich 3 analoge Systen Das Gesamtsystem ist bestimmt, wenn das Dreieck gegeben ist.

Sei jetzt M allein gegeben; dann ziehe man durch M beliel QT, nehme die Strecke MQ beliebig und mache $MT = 2MQ$, zie durch Q beliebig PS und trage die beliebige Strecke $a = QP =$ (nach beiden Seiten auf. Dann hat man das allgemeinste Dreie PST und construirt daraus nach dem Vorigen das allgemein Viereck mit dem Schwerpunkt M.

Zur analytischen Darstellung sei M Anfang der xy, ferner und β die Richtungswinkel von QT und QS gegen die x, fern $QM = c$, $QS = a$. Dadurch ist der Richtungswinkel φ von F schon bestimmt, und man hat, indem man von M aus den Linie der Figur folgt, unmittelbar die Coordinaten der 4 Ecken:

(für A) $x = -c\cos\alpha - m\cos\beta; \quad y = -c\sin\alpha - m\sin\beta$

(für C) $x = -c\cos\alpha + m\cos\beta: \quad y = -c\sin\alpha + m\sin\beta$

(für B) $x = \frac{1}{2}c\cos\alpha - \frac{1}{2}a\cos\beta - n\cos\varphi$; etc.

(für D) $x = \frac{1}{2}c\cos\alpha - \frac{1}{2}a\cos\beta + n\cos\varphi$; etc.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3c\sin\alpha + a\sin\beta}{3c\cos\alpha + a\cos\beta}$$

R. Hoppe.

Fi

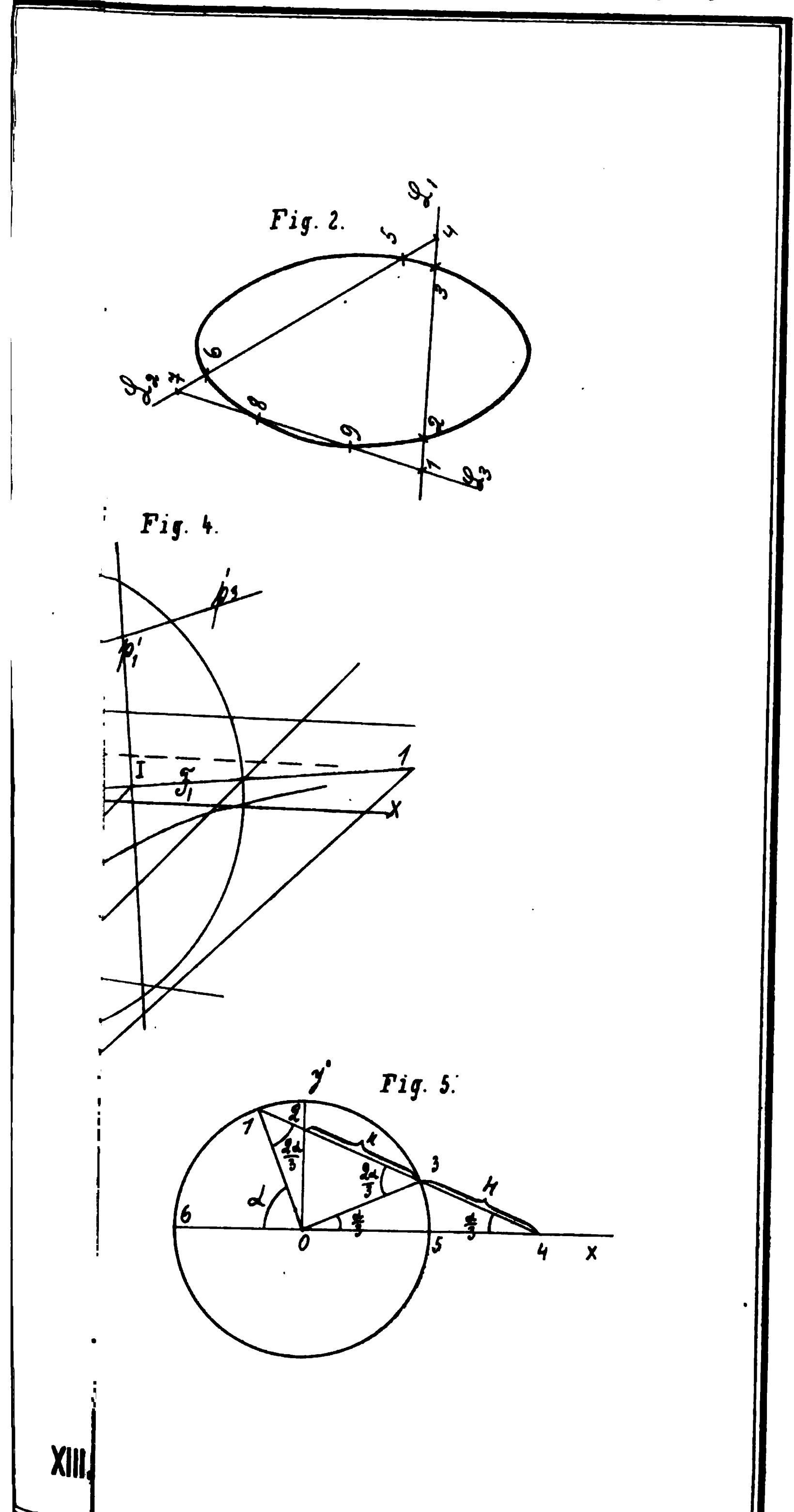

Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 5.
XIII

Fig. 1.

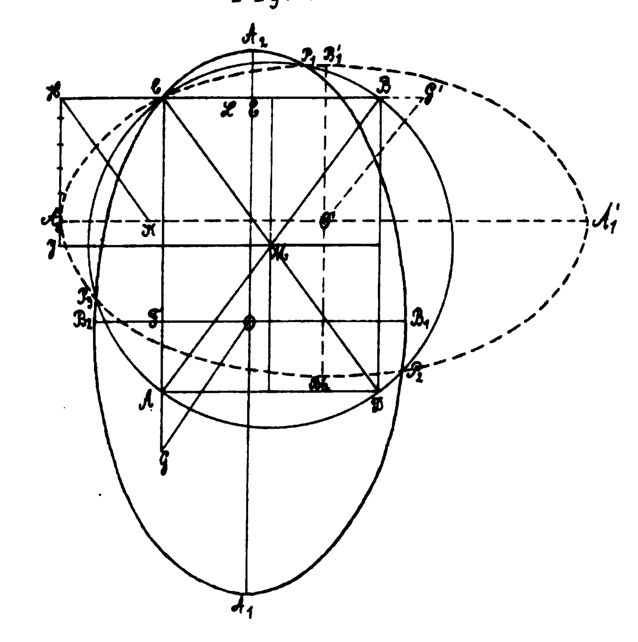
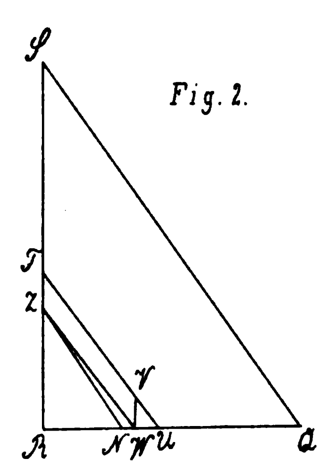


Fig. 2.



XVII. Panzerbieter: Dreiteilung des Winkels.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Elfter Teil. Viertes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1892.

XVIII.

Beiträge zur Lehre von der n-fachen Mannigfaltigkeit.

Von

H. Kühne.

Es ist in neuerer Zeit vielfach der Versuch gemacht worden, Lehrsätze der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern, und man ist hierbei zu Ergebnissen gekommen, die nicht nur für die Mannigfaltigkeitslehre selbst von Interesse sind, sondern sich auch darin als von Wichtigkeit erweisen, dass sie das Specielle erkennen lassen, welches der Ebene und dem Raum als 2- bzhw. 3-facher Mannigfaltigkeit anhaftet. Einen Versuch in eben dieser Richtung stellt die nachfolgende Arbeit dar. Sie giebt im wesentlichen eine Verallgemeinerung einiger aus der Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen bekannten Sätze, denen sich zum Schluss einige Betrachtungen über die conforme Abbildung in der n-fachen Mannigfaltigkeit anreihen.

Von den mir bekannten Arbeiten handelt eine Abhandlung des Herrn Schlegel: Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions. Bull. S. M. Fr. X über denselben Gegenstand, doch geschieht die dort an gegebene Verallgemeinerung in einer etwas anderen Richtung. Inbezug auf die Betrachtungen über conforme Abbildung bemerke ich, dass ich mich eng an die Untersuchungen Liouvilles, die er in einer Anmerkung zu Monge, Applications de l'analyse à la géométrie veröffentlicht hat, angelehnt habe. Dort befindet sich das von uns bewiesene Theorem für den Raum abgeleitet.

Was die Bezeichnungsweise anbetrifft, so werde ich mich eng an die Bezeichnungen des Herrn Professor Kronecker, wie er sie in seiner Vorlesung über Determinantentheorie zu gebrauchen pflegte, anschliessen. Da ich mich ferner auf diese Vorlesung häufig zu stützen habe, so mache ich mit Vergnügen von der gütigen Erlaubniss des Herrn Professors Gebrauch, die Hauptsachen des über Mannigfaltigkeitslehre in jener Vorlesung Vorgetragenen in Kürze anzuführen: das soll in den §§ 1—3 geschehen. Zugleich verfehle ich nicht, an dieser Stelle meinen tiefgefühlten Dank gegen Herrn Prof. Kronecker für die gütige Erlaubniss im besondern, sowie für die Anregung und freundliche Förderung, die er mir bei dieser Arbeit hat zuteil werden lassen, im allgemeinen auszusprochen, und ferner meinem lebhaften Bedauern Ausdruck zu verleihen, dass es mir nicht vergönnt gewesen ist, ihm diese Arbeit veröffentlicht zu überreichen.

Es sei noch bemerkt, dass der besseren Uebersichtlichkeit wegen und um die Analogie mit Bekanntem schärfer hervortreten zu lassen, die Arbeit in Paragraphen eingeteilt ist, an deren Spitze, wenn tunlich, die Lehrsätze angegeben sind, deren Verallgemeinerung der betreffende Paragraph enthält.

§ 1.

Wie in der Ebene ein Punkt durch 2, im Raume durch 3 Abmessungen bestimmt wird, die man Coordinaten nennt, so, wollen wir sagen, bestimmen n Grössen — mit x_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ seien sie bezeichnet — einen Punkt in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, und alle Punkte dieser Mannigfaltigkeit werden erhalten, indem man den x_h, die wir auch hier Coordinaten nennen wollen, alle möglichen reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ giebt. Bestehen zwischen den x_h $n-\nu$ von einander unabhängige Gleichungen, oder sind alle x_h durch ν unabhängige Veränderliche ausgedrückt, so können nur ν der x_h beliebig gewählt werden, dadurch sind die übrigen bestimmt. Dabei werden aus sämtlichen Punkten der n-fachen Mannigfaltigkeit bestimmte ausgesondert, wir wollen sagen: alle diese Punkte liegen auf einer aus der n-fachen herausgeschnittenen ν-fachen Mannigfaltigkeit, und wir erklären die gegebenen Gleichungen als die Gleichungen dieser Mannigfaltigkeit. Sind diese Gleichungen linear, so nennen wir die Mannigfaltigkeit eben. Der Einfachheit halber, wollen wir eine ebene ν-fache Mannigfaltigkeit eine $\mathfrak{M}_\nu$, eine beliebige eine M_ν nennen.

Nach diesen Erklärungen ist die Gleichung einer $\mathfrak{M}_{n-1}$, die der Ebene im Raume, der Geraden in der Ebene entspricht,

$$\sum_r c_r' x_{pr} = 0 \qquad (r = 0, 1 \ldots n)$$

wobei x_{pr} $(r = 1, 2 \ldots n)$ die laufenden Coordinaten sein sollen und $x_{p0} = 1$ ist. Diese Gleichung enthält insofern eine Unbestimmtheit, als sie noch mit einem beliebigen Factor multiplicirt werden kann. Wählen wir diesen Factor als den reciproken Wert der positiven Quadratwurzel aus $\sum_{r=1}^{n} c_r'^2$, so erhalten wir die Form:

$$c_0 + \sum_{r=1}^{n} c_r x_{pr} = 0$$

mit der Bedingung

$$\sum_{r=1}^{n} c_r^2 = 1$$

Diese Form wollen wir als die Normalform der Gleichung einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnen.

Haben wir zwei $\mathfrak{M}_{n-1}$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_r c_r x_{pr} + c_0 = 0 \\ f' &= \sum_r c_r' x_{pr} + c_0' = 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} \sum_r c_r^2 = \sum_r c_r'^2 = 1 \\ r = 1, 2 \ldots n \end{aligned}\right)$$

so sei der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} c_r c_r'$$

als der **Correlationsfactor** der beiden $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnet; wir schreiben:

$$\operatorname{cor}(f, f') = \sum_{r=1}^{n} c_r c_r' \quad .$$

Der Correlationsfactor entspricht dem cosinus des Neigungswinkels zweier Ebenen im Raume, zweier Geraden in der Ebene. Er liegt wie dieser zwischen -1 und $+1$, was man aus der folgenden Ungleichung sieht:

$$2(1 \mp \operatorname{cor}(f, f')) = \sum_r c_r^2 + \sum_r c_r'^2 \mp 2 \sum_r c_r c_r' = \sum_r (c_r - c_r')^2 > 0$$

Weiter erklären wir in der $\mathfrak{M}_n$ als den **Abstand** zweier Punkte, deren Coordinaten x_{1r} bzhw. x_{2r} seien $(r = 1, 2 \ldots)$, den Ausdruck:

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{n} (x_{1r} - x_{2r})^2}$$

Soll die Form dieses Ausdrucks erhalten bleiben, wenn wir die Coordinaten x_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ linear durch andre ξ_h $(h = 1, 2 \ldots n)$

ausdrücken, oder mit andern Worten, um in Analogie zu Raum und Ebene zu reden, nehmen wir eine Coordinatentransformation vor, so ist notwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der Transformation:

$$x_h = \alpha_h + \sum_k \alpha_{hk} \xi_k \qquad (h, k = 1, 2 \ldots n)$$

den Bedingungen genügen

$$\sum_k \alpha_{hi} \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

wobei $\delta_{ik} = 1$ ist für $i = k$, und $= 0$ für $i \gtrless k$. Es sei noch hierbei bemerkt, dass durch Coordinatentransformation sich die Gleichungen jeder $\mathfrak{M}_\nu$ auf die Form

$$x_s = 0 \qquad (s = \nu + 1 \ldots n)$$

bringen lassen, und dass Eigenschaften, die von dem Abstand von Punkten abhangen, und die sich für diese specielle Form der Gleichungen leicht erweisen lassen, ohne weiteres auch für die allgemeine Form der Gleichungen als giltig angesehen werden können.

Ferner erklären wir als den Abstand eines Punktes von einer $\mathfrak{M}_\nu$ den kürzesten unter den Abständen aller Punkte der $\mathfrak{M}_\nu$ von dem gegebenen Punkte. Es sei zunächst $\nu = n - 1$ und der gegebene Punkt (x_{or}) $(r = 1, 2 \ldots n)$; die Gleichung von $\mathfrak{M}_{n-1}$ in der Normalform:

$$c_0 + \sum_r c_r x_{pr} = 0 \quad (r = 1, 2 \ldots n)$$

Die Bedingung, dass der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} (x_{pr} - x_{or})^2$$

ein Minimum werden soll, ergiebt dann die Gleichung:

$$x_{ph} - x_{oh} = - c_h \sum_{r=0}^{n} c_r x_{or} \qquad (x_{or} = 1, h = 1, 2 \ldots n)$$

Mithin ist die Entfernung des Punktes von der $\mathfrak{M}_{n-1}$

$$((x_{or}), \mathfrak{M}_{n-1}) = \sqrt{(\sum_{r=0}^{n} c_r x_{or})^2 \sum_{h=1}^{n} c_h^2}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} c_r x_{or} = c_0 + \sum_{r=1}^{n} c_r x_{or}$$

Dieser Ausdruck liefert also, abgesehen vom Zeichen, den Abstand des Punktes von der $\mathfrak{M}_{n-1}$, wie in der Ebene und im Raume

Wir wollen nun in weiterer Analogie zu Ebene und Raum homogene Coordinaten von Punkt und $n-1$-facher Mannigfaltigkeit einführen. Dazu seien $n+1$ Punkte in der $\mathfrak{M}_n$ gegeben, gekennzeichnet durch die Zahlen $0, 1 \ldots n$. Die Coordinaten des Punktes g seien ξ_{gh} $(h = 1, 2 \ldots)$. Diese $n+1$ Punkte bestimmen in der $\mathfrak{M}_n$ ein Gebilde, das dem Dreieck in der Ebene, dem Tetraeder im Raume entspricht, wir wollen es Prismatoid nennen. Nun stellen wir uns zunächst die Aufgabe, die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$ zu bestimmen, welche alle Eckpunkte des Prismatoides, mit Ausnahme des Punktes k enthält. Zu diesem Zwecke betrachten wir das System

$$(\xi_{gh}) \quad (g, h = 0, 1 \ldots n; \quad \xi_{g0} = 1)$$

dessen Determinante sei Δ, ferner die zu ξ_{gh} gehöirge Subdeterminante Δ_{hg}. Dann ist die Gleichung

$$\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk} = 0$$

die verlangte Gleichung der $\mathfrak{M}_{n-1}$, denn für

$$x_{ph} = \xi_{ik}$$

wird der Ausdruck linker Hand

$$= \delta_{ik} \Delta, \text{ also}$$

$$= 0 \text{ für } i \gtrless k \quad \text{und} \quad = \Delta \text{ für } i = k$$

Diese Gleichung hat aber noch nicht die Normalform, diese ist:

$$\frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk}}{\Theta_k} = 0$$

wobei

$$\Theta_k^2 = \sum_{h=1}^{n} \Delta_{hk}^2 \text{ ist.}$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes x_{ph} von dieser $\mathfrak{M}_{n-1}$ ist dann gemäss dem Vorhergehenden

$$= \frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{ik}}{\Theta_k}$$

Nun erklären wir als homogene Coordinaten eines Punktes die Verhältnisse der Abstände dieses Punktes und eines Eckpunktes des Prismatoides von der $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle Eckpunkte mit Ausnahme dieses einen enthält. Bezeichnen wir die homogenen Coordinaten mit u_{pk}, so ist also

$$u_{pk} = \frac{\sum\limits_{h=0}^{n} x_{ph}\varDelta_{hk}}{\Theta_k} : \frac{\sum\limits_{h=0}^{n} \xi_{kh}\varDelta_{hk}}{\Theta_k} = \frac{\sum\limits_{h=0}^{n} x_{ph}\varDelta_{hk}}{\varDelta}$$

Setzen wir abkürzungsweise noch

$$\sum_{h=0}^{n} x_{ph}\varDelta_{hk} = \varDelta_p^{(k)}$$

so kommt:

$$u_k = \frac{\varDelta_p^{(k)}}{\varDelta} \quad (k = 0, 1 \ldots n)$$

Wir schreiten nun sofort zur Einführung der homogenen Coordinaten einer $\mathfrak{M}_{n-1}$, und wir erklären sie als die Verhältnisse der Abstände jedes Grundpunktes von der gegebenen $\mathfrak{M}_{n-1}$ und derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle anderen Grundpunkte enthält. Die gegebene $\mathfrak{M}_{n-1}$ sei bestimmt durch n Punkte

$$x_{ih} \quad (i = 0, 1 \ldots f-1, f+1 \ldots n;\; h = 1, 2 \ldots n)$$

ferner seien

$$x_{fh} \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

beliebige Grössen, D_{hg} die im System

$$(x_{gh}) \quad (g, h = 0, 1 \ldots n)$$

zum Element x_{gh} gehörige Subdeterminante, so ist die Gleichung der gegebenen $\mathfrak{M}_{n-1}$ in der Normalform:

$$\frac{\sum\limits_{h=0}^{n} x_{ph} D_{hf}}{S_f} = 0$$

dabei

$$S_f^2 = \sum_{\nu=1}^{n} D_{\nu f}^2$$

Mithin ergiebt sich, wenn U_{fk} $(k = 0, 1 \ldots n)$ die homogenen Coordinaten der $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnen, nach der Erklärung:

$$U_{fk} = \frac{\sum\limits_{h} \xi_{kh} D_{hf}}{S_f} : \frac{\sum\limits_{h} \xi_{kh}\varDelta_{hk}}{\Theta_k} \quad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

oder, wenn

$$\sum_{h=0}^{n} \xi_{hk} D_{hf} = D_f^{(k)}$$

gesetzt wird

$$U_{fk} = \frac{D_f^{(k)}\Theta_k}{S_f\varDelta} \quad (k = 0, 1 \ldots n)$$

Es ist bekannt, dass zwischen den im Raume und in der Ebene

angewendeten homogenen Coordinaten Gleichungen bestehen; es handelt sich darum, die entsprechenden Beziehungen auch für die n-fache Mannigfaltigkeit festzustellen. Für einen Punkt gilt zunächst:

$$\sum_k u_{pk} = \frac{1}{\Delta} \sum x_{ph} \Delta_{hk} = \frac{1}{\Delta} \sum_{h,k} x_{ph} \xi_{ko} \Delta_{hk} = \frac{1}{\Delta} \sum_h x_{ph} \delta_{oh} \Delta$$

$$(h, k = 0, 1 \ldots n)$$

$$= x_{ko} = 1, \text{ also}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_{pk} = 1$$

Die zwischen den homogenen Coordinaten einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ bestehende Beziehung ergiebt sich nach einiger Rechnung leicht als

$$\sum_{i,k} U_{fi} U_{fk} \operatorname{cor}(\varphi_i, \varphi_k) = 1 \quad (i, k = 0, 1 \ldots n)$$

wobei φ_i die durch die Grundpunkte $0, 1 \ldots i-1, i+1, \ldots n$ gelegte $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnet.

§ 2.

Es ist bekannt, dass der Inhalt eines Dreiecks bzhw. Tetraeders durch die Determinante

$$|x_{ik}| \, (i, k = 0, 1, 2 \text{ bzhw. } 0, 1, 2, 3, \ x_{io} = 1)$$

geliefert wird, er ist nämlich gleich dieser Determinante dividirt durch 2! bzhw. 3! Wir werden nun zeigen, dass in einer $\mathfrak{M}_n$ der Inhalt eines Prismatoides

$$= \frac{1}{n!} \, |x_{ik}| \, (i, k = 0, 1 \ldots n; \ x_{io} = 1)$$

ist. Ist

$$\sum_k D_{hk} x_{ph} = D_p^{(k)} \quad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

so ist, wie wir oben gesehen hatten:

$$D_p^{(k)} = 0$$

die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle Eckpunkte des Prismatoides mit Ausnahme des Punktes k enthält. (Die Eckpunkte seien (x_{hk}) $(h, k = 0, 1 \ldots n)$). Diese $\mathfrak{M}_{n-1}$ kann aber auch dargestellt werden durch die Gleichung

$$f_k = -\frac{D_p^{(k)}}{D} = 0, \quad D = |x_{ik}| \, (i, k = 0, 1 \ldots n)$$

Für den Punkt (x_{kh}) $(h = 0, 1 \ldots n)$ wird

$$f_k = -1$$

Da nun die $\mathfrak{M}_{n-1}$ sämtliche Punkte der $\mathfrak{M}_n$, für welche $f_k < 0$ ist, von denen scheidet, für welche $f_k > 0$ ist, so können wir sagen: der Punkt k liegt auf der negativen Seite der $\mathfrak{M}_{n-1}$:

$$f_k = 0$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\sum_k f_k &= -\sum_{h,k} \frac{x_{ph} D_{hk}}{D} = -\frac{1}{D} \sum_{h,k} x_{ph} D_{hk} x_{ko} \\ &= -\frac{1}{D} \sum_h x_{ph} \delta_{ok} D = -x_{po} = -1 \quad (h,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)\end{aligned}$$

und das gilt für jeden beliebigen Punkt.

Daraus ergiebt sich ohne weiteres, dass es keinen Punkt giebt, für welchen alle $f_k > 0$ sind; es giebt aber sehr wol Pun kte, für welche alle $f_k < 0$ sind, da aber die Summe der $f_k = -1$ sein soll, giebt es nur ein einziges Gebiet solcher Punkte, während bei allen übrigen der im ganzen 2^{n+1} möglichen Zeichencombinationen der f_k die entsprechenden Gebiete unendlich sind. Das endliche Stück der $\mathfrak{M}_n$ wird also erklärt durch die Ungleichungen

$$f_k < 0 \quad (k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

und wir wollen nun in Analogie zu Ebene und Raum das Integral

$$\int dx_{p1}\, dx_{p2}\ .\ .\ .\ dx_{pn}$$

erstreckt über alle Werte der x_{pk}, welche obigen Ungleichungen genügen, als den **Inhalt** des aus den Punkten (x_{ih}) $(i = 0, 1\ .\ .\ .\ n)$ gebildeten Prismatoides nennen. Zur Ermittelung dieses Integrals verfahren wir folgendermassen. Es ist:

$$\begin{aligned}-\sum_k x_{kg} f_k &= \sum_k x_{kg} \frac{D_p^{(k)}}{D} = \sum_{h,k} x_{kg} x_{ph} \frac{D_{hk}}{D} = \sum_h x_{ph} \delta_{hg} \\ &= x_{pg} \qquad\qquad (h,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)\end{aligned}$$

Daraus folgt ohne Weiteres

$$x_{pg} - x_{og} = -\Sigma (x_{kg} - x_{og}) f_k \quad (g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$\frac{\partial x_{pg}}{\partial f_k} = -(x_{kg} - x_{og}) \qquad (g,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

und

$$\left\| \frac{\partial x_{pk}}{\partial f_i} \right\| = \| x_{ik} - x_{ok} \| = \| x_{gh} \| \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ g,\ h = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int dx_{p1} \ldots dx_{pn} = \int \left\| \frac{\partial x_{pk}}{\partial f_i} \right\| df_1 \ldots df_n$$

also kommt, wenn wir den Inhalt des Prismatoides mit J bezeichnen:

$$J = \| x_{ik} - x_{ok} \| \int df_1 \ldots df_n = \| x_{gk} \| \int df_1 \ldots df_n$$

$$\begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ g, h = 0, 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

mit den Bedingungen

$$-1 < \sum_k f_k < 0, \quad f_k < 0$$

Hierfür bestimmt sich das Integral

$$\int df_1 \ldots df_n \quad \text{als} \quad \frac{1}{n!}$$

sodass wir erhalten

$$J = \frac{1}{n!} \| x_{ik} - x_{ok} \| - \frac{1}{n!} \| x_{gk} \| \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ g, h = 0, 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Wir wenden uns nun zu Untersuchungen über die Beziehungen von Inhaltsdeterminanten zu gewissen aus den Verbindungsstrecken je zweier Punkte gebildeten Determinanten. Es seien (x_{ok}), (ξ_{ok}) $(k = 1, 2 \ldots n)$ zwei Punkte der $\mathfrak{M}_n$, ferner (x_{ik}), (ξ_{ik}) $(i, k = 1, 2 \ldots n)$ weitere $2n$ Punkte, welche zu den beiden ersten in den Beziehungen stehen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_k (x_{ik} - x_{ok})^2 &= r^2 \\ \sum_k (\xi_{ik} - \xi_{ok})^2 &= \varrho^2 \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Diese Gleichungen können wir als die Bedingungen dafür erklären, dass die Punkte (x_{ik}), $(i = 1, 2 \ldots n)$ bzhw. (ξ_{ik}) auf einer sphärischen Mannigfaltigkeit liegen, deren Mittelpunkte (x_{ok}) bzhw. (ξ_{ok}) sind, unter sphärischer Mannigfaltigkeit dabei die einer Kugel im Raume entsprechende Mannigfaltigkeit verstanden. Wir setzen nun

$$\sum_k (x_{ik} - \xi_{kh}) = s_{ik}^2 \quad (h, i, k = 0, 1 \ldots n)$$

und erklären c_{ik} durch die Gleichung

$$\sum_h (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) = s_{io} s_{ok} c_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Betrachten wir jetzt die Determinante

[illegible]

Mithin kommt:

$$|s_{lk}^2 - r^2 - \varrho^2 + s_{oo}^2| = (-2)^n\, |x_{lk} - \xi_{ok}|\, |\xi_{lk} - x_{ok}|$$
$$= (-2)^n\, \Pi(s_{lo}\, s_{ok})\, |c_{lk}|$$
$$(l,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

also schliesslich

$$|s_{lk}^2| + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}^2) B_n = (-2)^n\, |x_{lk} - \xi_{ok}|\, |\xi_{lk} - x_{ok}|$$
$$= (-2)^n\, \Pi(s_{lo}\, s_{ok})\, |c_{ik}|$$

Diese Gleichung specialisiren wir nun, indem wir setzen:

$$x_{ok} = \xi_{ok} = 0; \qquad r = \varrho$$

$$x_{in} = r + \frac{a_i}{r}, \quad \xi_{in} = r + \frac{a_i}{r}$$

$$(i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

so werden die Bedingungen, dass die Punkte (x_{ik}), (ξ_{ik}) $(i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$ auf einer sphärischen Mannigfaltigkeit liegen

$$\sum_g x_{ig}^2 + 2a_i + \frac{a_i^2}{r^2} = \sum_g \xi_{ig}^2 + 2a_i + \frac{a_i^2}{r^2} = 0$$
$$(g = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n-1; \qquad i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

ferner wird:

$$s_{oo} = 0$$

$$s_{ko}^2 = \sum_{g=1}^{n} x_{kg}^2 = r^2, \quad s_{ok}^2 = \sum_{g=1}^{n} \xi_{kg}^2 = r^2$$

$$s_{ik}^2 = \sum_{g=1}^{n-1} (x_{ig} - \xi_{kg})^2 + \left(\frac{a_i - \alpha_i}{r}\right)^2$$

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} \frac{x_{ih}\, \xi_{kh}}{r^2} \qquad (i, k = 12 \ldots n)$$

Mit Benutzung hiervon folgt

$$(-2)^n \mid x_{ik} \mid \; \mid \xi_{ik} \mid = \mid s_{ik}^2 \mid + 2r^2 S_n$$

oder

$$(-2,^n \frac{\mid x_{ik} \mid}{r} \frac{\mid \xi_{ik} \mid}{r} = \frac{\mid s_{ik}^2 \mid}{r^2} + 2S_n \qquad (i, k = 12 \ldots n)$$

Nun ist

$$\frac{\mid x_{ik} \mid}{r} = \left| x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in-1}, 1 + \frac{a_i}{r^2} \right|$$

$$= \mid x_{ik} \mid + \frac{1}{r^2} \mid x_{i1} \ldots x_{in-1} a_i \mid \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n-1, 0 \end{pmatrix}$$

entsprechend wird $\frac{\mid \xi_{ik} \mid}{r}$. Gehen wir jetzt für $r = \infty$ zur Grenze über, so wird obige Gleichung:

$$(-2)^n \mid x_{ih} \mid \mid \xi_{ih} \mid = 2S_n \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots r \\ h = 0, 1 \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir hierin $n+1$ an die Stelle von n und bezeichnen die Punkte $(x_{n+1,h})$ und $(\xi_{n+1,h})$ mit x_{oh} bzhw. ξ_{oh}, so wird

$$s_{ik}^2 = \sum_h (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \quad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

und

$$-(-2)_n \mid x_{ik} \mid \mid \xi_{ik} \mid \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Nun bestehen zwar zwischen den x_{ih} und ξ_{ih} noch die Bedingungen

$$\sum_h x_{ih}^2 + 2a_i = \sum_h \xi_{ih} + 2\alpha_i = 0$$

da aber a_i und α_i ganz beliebig sind, so bestehen in der Tat zwischen den x und ξ keinerlei Beziehungen. Mithin gilt die Formel

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \mid \mid \xi_{ik} \mid = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

ganz allgemein.

Wir wollen den Gang, den wir zur Herleitung dieser zwischen den Inhalten zweier Prismatoide (denn die Determinante $\mid x_{ik} \mid$ (i, $k = 0, 1 \dots n$) lieferte ja den Inhalt) und den Entfernungen je zweier ihrer Eckpunkte bestehenden Relation eingeschlagen haben, in Kürze für den dreidimensionalen Raum noch einmal vorführen, um ihn so dem Verständniss näher zu bringen. Wir nehmen zunächst zwei Kugeln und auf deren Oberfläche je 3 Punkte und entwickeln eine Beziehung, die zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte und den Entfernungen je zweier besteht. Dann lassen wir die Kugeln zusammenfallen und den Radius unendlich werden, doch so, dass dabei die Entfernungen der einzelnen Punkte endlich bleiben. Die Punkte kann man nun als in einer Ebene liegend betrachten und die vorher abgeleitete Relation liefert die bekannte Beziehung zwischen den Inhalten zweier Dreiecke und den Verbindungsstrecken je zweier ihrer Eckpunkte.

Setzen wir in der Gleichung

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \mid \mid \xi_{ik} \mid = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

nach

$$x_{i,\nu+r} = \xi_{i,\nu+r} = 0 \qquad (r > 0)$$

betrachten wir also mit andern Worten zweimal $n+1$ Punkte einer ν-fachen Mannigfaltigkeit, so verschwinden die Inhaltsdeterminanten mithin verschwindet auch die aus den Verbindungsstrecken gebildete Determinante rechter Hand.

Identificiren wir das System der ξ mit dem der x, so geht ob ige Gleichung über in

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \mid^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1, 2 \dots n)$$

oder

$$-(-2)^2(n!\,J)^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

wobei J wie oben den Inhalt des aus den Punkten (x_{ik}) $(i = 0, 1 \dots n)$ gebildeten Prismatoides bezeichnet. Rücken die $n+1$ Punkte in eine niedere Mannigfaltigkeit als die n-fache zusammen, so verschwindet die Inhaltsdeterminante und folglich auch die rechter Hand stehende Streckendeterminante.

Setzen wir ferner in der zuerst abgeleiteten Gleichung

$$|s_{ik}^2| + (r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2) S_n = (-2)^n \, |x_{ik} - \xi_{ok}| \, |\xi_{ik} - x_{ok}|$$
$$(i, k = 1, 2 \dots n)$$

$n+1$ an die Stelle von n und bezeichnen die Punkte $(x_{n+1,k})$; $(\xi_{n+1,k})$ mit (x_{ok}) bzhw. (ξ_{ok}), lassen zu gleicher Zeit die vorher mit (x_{ok}), (ξ_{ok}) bezeichneten Grössen verschwinden, setzen dann

$$x_{i\,n+1} = \xi_{i\,n+1} = 0 \quad (i = 0, 1 \dots n), \quad r = \varrho$$

d. h. betrachten wir in einer n-fachen Mannigfaltigkeit zweimal $n+1$ Punkte, die auf einer um den Nullpunkt construirten sphärischen Mannigfaltigkeit mit dem Radius r liegen, so kommt:

$$|s_{ik}| + 2r^2 \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

Identificiren wir nun noch das System der ξ mit dem der x, so liefert die resultirende Formel:

$$r^2 = -\tfrac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{|s_{ik}^2|} \qquad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

den Radius derjenigen sphärischen Mannigfaltigkeit, die durch alle Eckpunkte eines in der $\mathfrak{M}_n$ liegenden Prismatoides geht, ausgedrückt dur ch die Verdindungsstrecken je zweier Ecken. Im Nenner des Ausdrucks steht diejenige Streckendeterminante, welche den Inhalt bestimmt.

Was nun die Grössen c_{ik} betrifft, die wir oben eingeführt haben, so sieht man, dass sie zur Herleitung der von uns benutzten Resultate nicht nötig gewesen wären, ihre Einführung ist aber doch geschehen, weil sie Grössen von der Art sind, wie wir sie Correlationsfactoren genannt haben und die für Raum und Ebene Richtungscosinus werden. Lassen wir die Mannigfaltigkeit, in der die Punkte liegen, auf eine niedre zusammenschrumpfen, so sieht man sofort, dass die Determinante

$$| c_{ik} | \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

verschwindet. Diese Bedingung ist die Verallgemeinerung derjenigen interessanten Beziehung die zwischen den Richtungscosinus von vier (oder mehr) von irgend einem Punkt ausgehenden Strahlen besteht.

Wir hatten gesehen, dass die Determinante

$$S_n = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

verschwindet, sobald $n > N+1$, N sei die Ordnung der Mannigfaltigkeit, dass sie durch die Inhaltsdeterminante ausgedrückt wird, sobald $n = N+1$ ist; es fragt sich nun, in welcher Weise sie sich darstellt für $n < N+1$, d. h. wenn das von den Punkten gebildete Prismatoid nicht von der Ausdehnung der Mannigfaltigkeit, sondern von andrer ist.

Um diese Frage zu entscheiden, gehen wir aus von der Gleichung

$$(-2)^n \Sigma(x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) \mid = \mid s_{ik}^2 \mid + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}^2) S_n$$
$$(h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Aus der Herleitung dieser Beziehung ersieht man sofort, dass die Summation in Bezug auf h beliebig weiter z. B. bis zu N hin erstreckt werden kann ($N > n$), nur müssen dann s_{ik}, r, ϱ anders erklärt werden, nämlich

$$s_{ik}^2 = \sum_h (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots N)$$
$$r^2 = \sum_h (x_{ih} - x_{oh})^2$$
$$\varrho^2 = \sum_h (\xi_{ih} - \xi_{oh})^2$$

dann erhalten wir also die Gleichung:

$$(-2)^n \left| \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) \right| = | s_{ik}^2 | + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}^2) S_n$$
$$(i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Das System

$$\left(\sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) \right) \quad (i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

dessen Determinante auf der linken Seite vorkommt, lässt sich als aus den beiden rechteckigen Systemen

$$(x_{ih} - \xi_{oh}),\quad (\xi_{ih} - x_{oh}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2\ .\ .\ .\ n \\ h = 1, 2\ .\ .\ .\ N \end{pmatrix}$$

componirt betrachten. Die Determinante ergiebt sich also als eine Summe von Producten von Determinanten $n$ter Ordnung, zu bilden aus dem Schema der beiden Systeme. Setzen wir nun, entsprechend dem oben eingeschlagenen Verfahren,

$$\varrho = r,\qquad \xi_{oh} = x_{oh} = 0\quad (h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ N)$$
$$x_{iN} = r + \frac{a_i}{r},\quad \xi_{iN} = r + \frac{a_i}{r} \qquad (i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

und setzen nach Division von r^2 wieder $r = \infty$, so kommt

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} | x_{ih} |\, | \xi_{ih} | = S_n \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n \\ h = 0,\ h_1\ .\ .\ .\ h_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$(\xi_{io} = x_{io} = 1)$$

wo die Summe über alle Combinationen der Zahlen $1, 2\ .\ .\ .\ N-1$ zu $n-1$ Elementen zu erstrecken ist.

Schreiben wir noch N für $N-1$, so erhalten wir:

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} | x_{ih} |\, | \xi_{ih} | = S_n \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n \\ h = 0, h_1\ .\ .\ .\ h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dazu ist

$$s_{ik}^2 = \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{kh})^2$$

und $(h_1\ .\ .\ .\ h_{n-1})$ bedeuten alle Combinationen der Zahlen $1\ .\ .\ .\ N$ zu $n-1$ Elementen.

Identificiren wir nun das System der ξ mit dem der x, so folgt

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} | x_{ih} |^2 = S_n \qquad (i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

dabei ist:

$$s_{ik} = \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad (i,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n)$$

Wir sehen also, dass die Determinante S_n, die für $n > N+1$ verschwand, für $n = N+1$ durch die Inhaltsdeterminante ausgedrückt war, für $n < N+1$ durch eine Summe von Producten von Inhaltsdeterminanten dargestellt wird, die Gebilden einer niederen Mannigfaltigkeit entsprechen. Die zuletzt abgeleitete Gleichung wollen wir nun noch auf eine etwas andre Form bringen. Wir schreiben n für N, $\nu+1$ für n und bezeichnen den Punkt $(x_{\nu+1,h})$ mit (x_{oh}) $(h = 1, 2 \ldots n)$, so wird die Gleichung zu:

$$-(-2)^\nu \sum_{(h)} |\, x_{ih} \,|^2 = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & s_{ik}^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1 \ldots n \\ h = 0, h_1 \ldots h_\nu \end{pmatrix}$$

oder auch:

$$-(-2)^\nu \sum_{(h)} |\, x_{gh} - x_{oh} \,|^2 = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & s_{ik}^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i, k = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots n \\ h = h_1, \ldots h_\nu \end{pmatrix}$$

Nun ist die Summe, welche linker Hand steht, nichts anderes als die Determinante des Systems

$$\left(\sum_{h=1}^{n} (x_{fh} - x_{oh})(x_{gh} - x_{oh})\right) \qquad (f, g = 1, 2 \ldots \nu)$$

welches als durch Composition des Systems

$$(x_{fh} - x_{oh}) \quad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

mit sich selbst entstanden gedacht werden kann. Wir können also die Determinante des componirten Systems als von dem rechteckigen System abhängig betrachten, und wir wollen die positive Quadratwurzel dieser Determinante als die absolute Determinante des rechteckigen Systems bezeichnen und schreiben:

$$\|\, x_{fh} - x_{oh} \,\| \quad \begin{pmatrix} f = 1. 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Für quadratische Systeme wird die absolute Determinante gleich dem absoluten Betrage der Determinante des Systems.

Mit dieser Einführung können wir schreiben:

$$-(-2)^\nu \| x_{fh} - x_{oh} \|^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1 \dots \nu \\ f = 1, 2 \dots \nu \\ h = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

Nun liegen die $\nu+1$ Punkte $(x_{ih}) \begin{pmatrix} i = 0, 1 \dots \nu \\ h = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$ in einer $\mathfrak{M}_\nu$ und bestimmen in dieser ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung; dessen Inhalt wird aber nach dem Obigen geliefert durch

$$-(-2)^\nu (\nu!\, J_\nu)^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (i, k = 0, 1 \dots \nu)$$

sodass sich im Verein mit der vorhergehenden Gleichung

$$J_\nu = \frac{1}{\nu!} \| x_{fh} - x_{oh} \| \quad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \dots \nu \\ h = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

ergiebt. Diese Formel gilt auch, wenn $\nu = n$ wird, sodass sie also ganz allgemein den Inhalt eines Prismatoides ν-facher Ausdehnung, das durch $\nu+1$ Punkte bestimmt wird, angiebt.

§ 3.

Die Begriffe des Senkrecht-auf-einander-stehens und der Parallelität von Ebenen und Geraden im Raume sind von grosser Bedeutung zur Erkennung der Eigenschaften räumlicher Gebilde, wir schicken uns deswegen an, diese Begriffe auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern.

Durch die Punkte $(x_{ir}) \begin{pmatrix} i = 0, 1 \dots \nu \\ r = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$ sei eine $\mathfrak{M}_\nu$ bestimmt, ausserhalb derselben der Punkt $(x_{\nu+1,r})$ gegeben, es soll zunächst der Abstand des Punktes von der $\mathfrak{M}_\nu$ gefunden werden. Nach der von uns oben aufgestellten Erklärung muss x_{pr} so bestimmt werden, dass der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} (x_{pr} - x_{\nu+1,r})^2$$

ein Minimum wird; dann stellt eben dieser Ausdruck den Abstand dar.

Bezeichnet $((x_{\nu+1,r}), \mathfrak{M}_\nu)$ den letzteren, so findet man

$$((x_{\nu+1,r}), \mathfrak{M}_\nu) = -\frac{\| x_{mr} - x_{or} \|}{\| x_{ir} - x_{or} \|} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2 \ldots \nu+1 \\ i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Ist J_ν der Inhalt des Prismatoides, welches die Punkte 0, 1 . . . ν bilden, und $J_{\nu+1}$ der Inhalt des durch die Punkte 0, 1 . . . $\nu+1$ bestimmten Prismatoides, so folgt hieraus ohne weiteres

$$J_{\nu+1} = \frac{J_\nu ((x_{\nu+1,r}), \mathfrak{M}_\nu)}{\nu+1}$$

Der durch diese Gleichung ausgedrückte Satz ist das wichtige Analogon zu dem für Ebene und Raum giltigen Satze, der für die Ebene den doppelten Inhalt eines Dreiecks als durch das Product von Grundlinie und Höhe gegeben lehrt.

Eine $\mathfrak{M}_\nu$ lässt sich auf zwei Weisen darstellen, entweder durch das Gleichungssystem

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

oder durch das System

$$\sum_r \gamma_{kr} (x_{pr} - x_{or}) = \quad \begin{pmatrix} k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Zwischen den Coefficienten beider Darstellungsweisen gelten, wie man leicht sieht, die Beziehungen

$$\sum_r \gamma_{kr} c_{ir} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix} .$$

Die beiden Systeme

$$(c_{ir}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (\gamma_{kr}) \quad \begin{pmatrix} k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

ergänzen wir nun durch beliebige Grössen zu quadratischen Systemen

$$(c_{gh}) \quad \text{und} \quad (\gamma_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2 \ldots n)$$

und wollen diese Grössen so bestimmen, dass die Composition beider Systeme das Einheitssystem liefert. Diese Forderung steht mit den Gleichungen

$$\sum_r \gamma_{kr} c_{ir} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

nicht in Widerspruch, und die Anzahl der zu bestimmenden Grössen ist auch nicht kleiner als die Anzahl der Bestimmungsgleichungen.

Wir sehen also: im allgemeinen Falle sind die Coefficientensysteme der beiden Darstellungsweisen einer $\mathfrak{M}_\nu$ reciprok; es lassen sich nun diese Systeme so umformen, dass die beiden Darstellungsweisen identisch werden.

Da das System (c_{ir}) den Rang ν haben muss, weil ja sonst die $\mathfrak{M}_\nu$ auf eine Mannigfaltigkeit niederer Ordnung zusammenschrumpfen würde, so muss mindestens eine der aus dem System zu bildenden Determinanten νter Ordnung von null verschieden sein, es sei dies die Determinante

$$| c_{ir} | \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = r_1, r_2 \ldots r_\nu \end{pmatrix}$$

Dann führen wir statt der w_i andre Grössen w_i' durch die Gleichungen

$$w_h' = \sum_i c_{ir_h} w_i \qquad (h, i = 1, 2 \ldots \nu)$$

ein, so geht das Gleichungssystem

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

über in ein System von der Gestalt

$$\begin{matrix} x_{pr_h} - x_{or_h} = w_h' \\ x_{pr} - x_{or} = \sum_i a_{ir} w_i' \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r > \text{ od. } < r_h \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt sofort auch die andre Darstellungsweise:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ir} (x_{pr_i} - x_{or_i}) \qquad \begin{pmatrix} r > \text{ od. } < r_h \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das (c) System hat in diesem Fall die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \ldots 0, a_{1,\nu+1} \ldots a_n \\ 0, 1 \ldots 0, a_{2,\nu+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0 \ldots 1, a_{\nu,\nu+1} \ldots a_{\nu n} \end{pmatrix}$$

Wir wollen dann sagen: das Gleichungssystem der $\mathfrak{M}_\nu$ ist in der kanonischen Form.

Es sei jetzt eine $\mathfrak{M}_\nu$ vorgelegt, gegeben durch die beiden Gleichungssysteme:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i \qquad \sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu + 1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

dann wird der Punkt x_{pr} dieser $\mathfrak{M}_\nu$, welcher unter allen Punkten der $\mathfrak{M}_\nu$ von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkt $x_{\nu+1r}$ den kleinsten Abstand hat, durch die Gleichungen

$$\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{\nu+1,r}) = 0 \qquad \sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu + 1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix} \text{ bestimmt.}$$

Es sei jetzt der Punkt (x_{pr}) fest, und wir wollen den Punkt $(x_{\nu+1r})$ sich so bewegen lassen, dass von allen Punkten der $\mathfrak{M}_\nu$ immer der Punkt (x_{pr}) ihm am nächsten ist. Dann hat $(x_{\nu+1,r})$ nur den Gleichungen

$$\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{\nu+1,r}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

zu genügen. Infolge dessen durchläuft dieser Punkt eine $\mathfrak{M}_{n-\nu}$. Lassen wir nun noch den Punkt (x_{or}) mit (x_{pr}) zusammenfallen und bezeichnen diesen Punkt mit (x_{or}), so gelten für die $\mathfrak{M}_\nu$ die Darstellungen, unter x_{pr} laufende Coordinaten verstanden:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i$$

und

$$\sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) = 0$$

und für die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$:

$$\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{or}) = 0$$

und

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_k \gamma_{kr} w_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu + 1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Die zweite Darstellungsweise der $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ folgt unmittelbar aus dem Obengesagten.

Aus diesen beiden Gleichungssystemen erkennt man sofort, dass $\mathfrak{M}_\nu$ zu $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ in derselben Beziehung steht, wie diese zu $\mathfrak{M}_\nu$; die Beziehung ist also eine gegenseitige, und wir erklären:

Zwei Mannigfaltigkeiten sind normal zu einander, sobald unter den Abständen, die alle Punkte der einen von allen Punkten der andern haben, gerade die von dem beiden Mannigfaltigkeiten gemeinsamen Punkt die kürzesten sind.

Es sei noch bemerkt, dass die Mannigfaltigkeiten nur einen

einzigen Punkt mit einander gemein haben. Für einen gemeinsamen Punkt gelten nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{rr}) = 0 \\ &x_{pr} - x_{or} = \sum_k c_{kr} w_k \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Aus denen folgt zur Bestimmung der w_k:

$$\sum_{k,r} c_{ir} c_{kr} w_k = 0 \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Hieraus entweder

$$w_k = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots \nu)$$

oder

$$\left| \sum_{r=1}^{n} c_{ir} c_{kr} \right| = 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots \nu)$$

Nun ist

$$\left| \sum_r c_{ir} c_{kr} \right| = \| c_{ir} \|^2 \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

also sicher nicht $= 0$, da das c-System den Rang ν haben muss, mithin kommt

$$w_k = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots \nu)$$

womit die obige Behauptung erwiesen ist.

Die Mannigfaltigkeiten, die wir eben einer Betrachung unterzogen haben, waren so beschaffen, dass ihre Ordnungszahlen sich zu n ergänzten, wir untersuchen jetzt zwei beliebige Mannigfaltigfaltigkeiten νter Ordnung gegeben durch die Gleichnngen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}_\nu \quad x_{pr} = c_{or} + \sum_i c_{ir} w_i \\ &\mathfrak{M}_\nu' \quad x_{pr}' = x_{0r}' + \sum_i c_{ir}' w_i' \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

(x_{pr}) sei ein Punkt von $\mathfrak{M}_\nu$, und es bezeichne (x_{pr}') gerade denjenigen Punkt von $\mathfrak{M}_\nu'$, der von ihm die kleinste Entfernung habe. Wir können dann (x_{pr}) als die Projection von (x_{pr}) auf $\mathfrak{M}_\nu'$ bezeichnen. Gemäss früher abgeleitetem wird (x_{pr}') bestimmt durch die Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{n} c_{ir}'(x_{pr}' - x_{pr}) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots \nu)$$

Nun seien (x_{ir}) $(i = 0, 1 \ldots \nu)$ $\nu + 1$ Punkte auf $\mathfrak{M}_\nu$, ihre Projectionen auf $\mathfrak{M}_\nu'$ seien (x_{ir}'), ferner werde (x_{ir}) bestimmt durch die Parameter w_{ih} $(h = 1, 2 \ldots \nu)$, entsprechend (x_{ir}') durch w_{ih}' $(h = 1, 2 \ldots \nu)$, so bestehen die Gleichungen:

$$x_{ir} = c_{or} + \sum_h c_{hr} w_{ih} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots \nu \\ i = 0, 1 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$x'_{ir} = c_{or}' + \sum_h c_{hr}' w_{ih}'$$

Daraus folgt

$$x_{ir} - x_{or} = \sum_h c_{hr}(w_{ih} - w_{oh}) \qquad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$x_{ir}' - x_{or}' = \sum_h c_{hr}'(w_{ih}' - w_{oh}')$$

Ferner ist aber auch

$$\sum_r c_{kr}'(x_{ir}' - x_{ir}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1 \ldots \nu \\ k = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Mithin erhält man

$$\sum_r c_{or}'\{x_{ro}' + \sum_h c_{hr}'(w_{ih}' - w_{oh}') - x_{or} - \sum_h c_{hr}(w_{ih} - w_{oh})\} = 0$$
$$\begin{pmatrix} r = 1, 2 \ldots n \\ h, i, k = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

oder

$$\sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}'(w_{ih}' - w_{oh}') = \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}(w_{ih} - w_{oh})$$

Aus diesem sowie aus den beiden Gleichungssystemen

$$x_{ir} - x_{or} = \sum_h c_{hr}(w_{ih} - w_{oh}) \qquad \begin{pmatrix} i, h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$x_{ir}' - x_{or}' = \sum_h c_{hr}'(w_{ih}' - w_{oh}')$$

ergiebt der Uebergang zu den Determinanten die Beziehungen:

$$\| x_{ir} - x_{or} \| = \| c_{hr} \| \, \| w_{ih} - w_{oh} \| \qquad \begin{pmatrix} r, h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$\| x_{ir}' - x_{or}' \| = \| c_{hr}' \| \, \| w_{ih}' - w_{oh}' \|$$

$$\left| \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}'(w_{ih}' - w_{oh}') \right| = \left| \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}(w_{ih} - w_{oh} \right|$$

Nach einigen Umformungen wird die letzte Gleichung zu:

$$\| c_{ir}' \|^2 \, | w_{ih}' - w_{oh}' | = \left| \sum_r c_{ir}' c_{hr} \right| \, | w_{ih} - w_{oh} |$$
$$(i, h = 1, 2 \ldots \nu; \quad r = 1, 2 \ldots n)$$

In Verbindung mit den beiden oberen liefert diese

$$\frac{\| x_{ir}' - x_{or}' \|}{\| x_{ir} - x_{or} \|} = \frac{\| \sum_r c_{hr} c_{ir}' \|}{\| c_{ir} \| \cdot \| c_{ir}' \|} \qquad \begin{pmatrix} i, h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung lehrt: Der Inhalt eines durch Projection auf eine ν-fache Mannigfaltigkeit von einer andern entstandenen Gebildes hat zu dem Inhalt des projicirten Gebildes ein von der Lage der Eckpunkte unabhängiges Verhältniss. Aus dieser Form der Darstellung ersieht man auch, dass es ganz gleich ist, welches die projicirte Mannigfaltigkeit ist. Der Ausdruck bezeichnet eine gegenseitige Beziehung, wir nennen ihn den Correlationsfactor der beiden Mannigfaltigkeiten und schreiben:

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_\nu) = \frac{|\sum_r c_{hr}' c_{ir}|}{\|c_{ir}\| \, \|c_{ir}'\|} \quad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Für den Fall $\nu = n - 1$ geht dieser Correlationsfactor in den von uns oben erklärten und angewendeten über.

Sind zwei Mannigfaltigkeiten verschiedener Ordnung $\mathfrak{M}_\nu$, $\mathfrak{M}_{\nu+\varrho}$ $(\varrho > 0)$ vorgelegt, so projiciren wir $\mathfrak{M}_\nu$ auf $\mathfrak{M}_{\nu+\varrho}$ und erhalten dadurch $\mathfrak{M}_\nu'$, dann erklären wir:

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_{\nu+\varrho}) = \operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_\nu')$$

Sind $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ und $\mathfrak{M}_{n-\nu}'$ die zu $\mathfrak{M}_\nu$ bzhw. $\mathfrak{M}_\nu'$ normalen Mannigfaltigkeiten, so wird

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_{n-\nu}, \mathfrak{M}_{n-\nu}') = \frac{|\sum_r \gamma_{kr} \gamma_{lr}'|}{\|\gamma_{kr}\| \cdot \|\gamma_{kr}'\|} \quad \begin{pmatrix} k, l = \nu + 1, \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Bringt man die beiden Systeme

$$(c_{ir}) \quad \text{und} \quad (c_{ir}') \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

auf die kanonische Form, so sieht man ohne Mühe, dass

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_{n-\nu}, \mathfrak{M}_{n-\nu}') = \operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_\nu') \quad \text{ist.}$$

Der Correlationsfactor hat den Wert 0, wenn die Mannigfaltigkeiten normal sind, denn dann verschwindet jedes Element der Zählerdeterminante des Correlationsfactors. Das gilt aber nicht umgekehrt. Verschwindet nämlich der Correlationsfactor, so kann das Verschwinden von verschiedener Ordnung sein, wir bezeichnen in diesem Fall überhaupt die Mannigfaltigkeiten als orthogonal und bemessen die Stufe der Orthogonalität nach dem Range des Systems

$$\left(\sum_{r=1}^{n} c_{hr} c_{ir}'\right) \quad (h, i = 1, 2 \ldots \nu)$$

Ist der Rang $= 0$, so tritt die höchste Stufe der Orthogonalität, die Normalität, ein.

Neben der Normalität isl von grosser Wichtigkeit die Parallelität. Parallel nennen wir zwei ν-fache Mannigfaltigkeiten, sobald die Coefficientensysteme ihrer in der kanonischen Form befindlichen Gleichungen einander gleich sind, ferner soll eine $\mathfrak{M}_\nu$ einer $\mathfrak{M}_{n+\varrho}$ ($\varrho > 0$) parallel heissen, wenn sie ihrer Projection auf dieselbe parallel ist.

Man sieht sofort, dass der Correlationsfactor zweier parallelen $\mathfrak{M}_\nu$ gleich 1 ist; umgekehrt zieht aber auch dieser Wert des Correlationsfactors die Parallelität der Mannigfaltigkeiten nach sich, wovon man sich durch Rechnung überzeugen kann.

§ 4.

Auf Grund der in den vorangehenden Paragraphen entwickelten Erklärungen und Beziehungen, gehen wir jetzt dazu über, einige geometrische Sätze, die sich mit harmonischen Punkten und Strahlen beschäftigen, auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern. Es soll in zweifacher Richtung eine Verallgemeinerung versucht werden: in Bezug auf die Lage und in Bezug auf die Grössenverhältnisse. Dieser Paragraph soll die bekannte Construction des vierten harmonischen Punktes mit alleiniger Benutzung des Lineals erweitern. Wir können den in dieser Construction enthaltenen Satz so aussprechen:

Es sind gegeben 2 Punkte x_0, x_1 und auf ihrer Verbindungsgeraden ein dritter Punkt ξ. Dann nehmen wir ausserhalb der Geraden einen beliebigen Punkt ξ', verbinden ihn mit den 3 ersten und ziehen ferner durch den auf der Geraden (ξ, ξ') beliebig gewählten Punkt ξ'' die beiden Geraden (x_0, ξ''), (x_1, ξ''), welche die Geraden (x_1, ξ'), (x_0, ξ'), bzhw. treffen mögen in x_0' und x_1'. Nun ziehen wir (x_0', x_1'), welche (x_0, x_1), die ursprüglich gegebene Gerade, im Punkte Φ schneide. Dieser Punkt Φ ist unabhängig von der Lage der Punkte ξ', ξ'', vorausgesetzt allerdings, dass die Punkte ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden liegen.

Auf die Ebene verallgemeinert lautet dieser Satz:

Vier in einer Ebene gelegene Punkte x_0, x_1, x_2, ξ verbinden wir mit einem beliebigen Punkt ausserhalb der Ebene ξ' und ziehen von dem auf der Geraden (ξ, ξ') beliebig gewählten Punkte ξ'' die drei Geraden (x_0, ξ''), (x_1, ξ''), (x_2, ξ''), welche die drei Ebenen (x_1, x_2, ξ'), (x_2, x_0, ξ'), (x_0, x_1, ξ') bzhw. treffen mögen in den Punkten x_0', x_1', x_2'. Die Ebene (x_0', x_1', x_2') schneidet dann die

ursprünglich angenommene Ebene (x_0, x_1, x_2) in einer Geraden Φ, die unabhängig ist von der Lage der Punkte ξ', ξ'', sofern diese beiden nur mit ξ in einer Geraden liegen.

Diese Gerade stimmt überein mit der Harmonikale [1]) des Punktes ξ in Bezug auf das Dreieck x_0, x_1, x_2.

Schliesslich liefert die Erweiterung auf die n-fache Mannigfaltigkeit den Satz:

Es seien $x_0, x_1, \ldots x_n, \xi$ $n+2$ Punkte einer in einer $\mathfrak{M}_{n+1}$ befindlichen $\mathfrak{M}_n$, ξ', ξ'' zwei beliebige Punkte ausserhalb derselben jedoch mit der Massgabe, dass ξ, ξ', ξ'' eine $\mathfrak{M}_1$ (Gerade) bilden; ferner seien $x_0' \ldots x_n'$ die Schnittpunkte der Geraden $(x_0, \xi''), \ldots (x_n, \xi'')$ bzhw. mit den $\mathfrak{M}_n$ $(x_1, x_2 \ldots x_n, \xi'), \ldots (x_0, x_1 \ldots x_{n-1}, \xi')$. Dann schneidet die $\mathfrak{M}_n$ $(x_0', x_1' \ldots x_n')$ die ursprünglich gegebene $\mathfrak{M}_n$ in einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ Φ, die unabhängig von der Lage der Punkte ξ', ξ'' ist, wofern nur ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden liegen.

Φ nennen wir die Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid $(x_0, x_1 \ldots x_n)$.

Der Beweis dieses Satzes gestaltet sich folgendermassen:

Ein bebiebiger Punkt der $\mathfrak{M}_{n+1}$ sei bestimmt durch die Coordinaten $\quad x_{pk} \quad (k = 1, 2 \ldots n+1)$

die Punkte $\quad x_f \quad (f = 0, 1 \ldots n)$ durch

$\quad x_{f1}, \ldots x_{fn}, 0$

ξ durch $\quad \ldots \xi_h \ldots, 0 \quad (h = 1, 2 \ldots n)$

ξ', ξ'' bzhw. durch $\quad \xi_k', \xi_k'' \quad (k = 1, 2 \ldots n+1)$

ferner sei im Folgenden stets

$$x_{po} = x_{fo} = \xi_o = \xi_o' = \xi_o'' = 1$$

Die $\mathfrak{M}_n$, welche durch die Punkte $\ldots x_{f'}, \ldots, \xi'$ $(f' = 0, 1 \ldots f-1, f+1 \ldots n)$ geht, hat dann die Gleichung:

$$| x_{pk}, x_{ok}, \ldots x_{f-1,k}, \xi_k', x_{f+1,k} \ldots x_{nk} | = 0$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1, \quad x_{gn+1} = 0, \quad g = 0, 1 \ldots n)$$

die $\mathfrak{M}_1$, welche durch die Punkte x_f, ξ'' geht, wird dargestellt durch

$$x_{pk} = x_{fk} + (\xi_k'' - x_{fk}) t_f \quad (k = 1, 2 \ldots n+1)$$

---

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Leipzig 1887. I. S. 105.

Da der Punkt x_f' auf dieser liegt, so giebt es einen Wert τ_f von t_f, welcher die Gleichungen

$$x_{fk}' = x_{fk} + (\xi_k'' - x_{fk})\tau_f$$

befriedigt; dieser Wert bestimmt sich dadurch, dass in der vorher angegebenen Gleichung der $\mathfrak{M}_n$ x_{pk} durch x_{fk}' ersetzt wird, denn x_{fk}' liegt ja auf dieser $\mathfrak{M}_n$. Darnach wird:

$$| x_{fk}(1-\tau_f) + \xi_k''\tau_f, x_{ok}, \ldots x_{f-1,k}, \xi_k', x_{f+1,k} \ldots x_{nk} | = 0$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{| \xi_k' \; x_{ok} \ldots x_{f-1,k}, x_{fk}, \; x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}{| \xi_k', x_{ok} \ldots x_{f-1,k}, \xi_k'', x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Nun liegen aber die Punkte ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden, also giebt es einen Wert τ, der den Gleichungen

$$\xi_k'' = \xi_k + (\xi_k' - \xi_k)\tau$$

genügt. Mit Hilfe hiervon ergiebt sich:

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{| \xi_k', x_{ok} \ldots x_{nk} |}{| \xi_k', x_{ok} \ldots x_{f-1,k}, \xi_k(1-\tau) + \xi_k'\tau, x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\xi_{n+1} = x_{gn+1} = 0 \quad (g = 0, 1 \ldots n)$$

so kommt:

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{| x_{gh} |}{| x_{oh} \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} |}$$
$$(g, h = 0, 1 \ldots n)$$

Mit Hilfe hiervon ist es leicht, die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_n$ aufzustellen, welche durch die Punkte x_f' $(f = 0, 1 \ldots n)$ geht. Diese ist nämlich:

$$| x_{pk}, \; x_{ok}', \ldots x_{nk}' | = 0 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots n+1)$$

oder:

$$| x_{pk}, \ldots, x_{fk}(1-\tau_f) + \xi_k''\tau_f \ldots | = 0 \quad (k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Da es nun aber nur auf die Schnitt-$\mathfrak{M}_{n-1}$ dieser $\mathfrak{M}_n$ mit der Grund-$\mathfrak{M}_n$ $\qquad x_{pn+1} = 0$

ankommt, so können wir $\qquad x_{pn+1} = 0$

setzen und erhalten als Gleichung der $\mathfrak{M}_{n-1}$ Φ

$$\begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots x_{fh}(1-\tau_f)+\xi_h''\tau_f \ldots \\ 0, \ldots \quad \xi_{n+1}''\tau_f \quad \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

oder

$$\xi_{n+1}'' \mathop{\Pi}_f (1-\tau_f) \begin{vmatrix} x_{ph} \ldots x_{fh} & \ldots \\ 0 \ldots \frac{\tau_f}{1-\tau_f} & \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

also mit Benutzung des oben für $\frac{\tau_f}{1-\tau_f}$ gefundenen Wertes:

$$\frac{|x_{gh}|\,\xi_{n+1}''}{1-\tau} \mathop{\Pi}_f (1-\tau_f) \begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots, x_{fh}, \ldots \\ 0, \ldots, \frac{1}{\Delta_f} \ldots \end{vmatrix} = 0$$

$$(g, f, h = 0, 1 \ldots n)$$

wobei

$$\Delta_f = |x_{oh}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh}| \text{ ist.}$$

Da $\tau \gtrless 1$, weil sonst ξ', ξ'' zusammenfallen würden, $\xi_{n+1} \gtrless 0$, weil sonst ξ'' nicht ausserhalb der ursprünglich angenommenen $\mathfrak{M}_n$ liegen würde und schliesslich $|x_{gh}| \gtrless 0$ $(g, h = 0, 1 \ldots n)$ ist, weil sonst die Punkte x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$ in einer niederen als n-fachen Mannigfaltigkeit liegen würden, erhalten wir endlich als die Gleichung der Harmonikale des Punktes ξ_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ in Bezug auf das Prismatoid (x_{fh}) $\begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$

$$\Phi = \begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots x_{fh} \ldots \\ 0, \ldots \frac{1}{\Delta_f} \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

Diese Gleichung nimmt eine sehr einfache Gestalt an, sobald man statt der orthogonalen Coordinaten x_{ph} $(h = 1, 2 \ldots n)$ eines Punktes die homogenen Coordinaten (vergl. § 1.)

$$u_{pk} = \sum_h x_{ph} \frac{D_{hk}}{D} \qquad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

einführt. Dabei ist D die Determinante des Systems

$$(x_{gh}) \qquad (g, h = 0, 1 \ldots n)$$

und D_{hg} die zum Element x_{gh} gehörige Subdeterminante.

Es gelten dann die Gleichungen:

$$x_{pg} = \sum_k x_{kg} u_{pk} \qquad (g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

die für $g = 0$ die Relation

$$\sum_{k=0}^{n} u_{pk} = 1$$

enthalten. Nun seien

$$\varphi_k \qquad (k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

die homogenen Coordinaten des Punktes ξ, dann ist

$$\xi_g = \sum_k x_{kg} \varphi_k \qquad (g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

Mit Hilfe dieser Einführung ergiebt sich:

$$\Delta_f = \left| x_{ok},\ .\ .\ .\ x_{f-1,k},\ \sum_g x_{gk}\varphi_g,\ x_{f+1,k},\ .\ .\ .\ x_{nk} \right| \qquad (f,\ g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$= \varphi_f \, | x_{gk} |$$

Ferner

$$\Phi = \begin{vmatrix} \sum_k x_{kh} u_{pk}, & .\ .\ .\ x_{fh} & .\ .\ . \\ 0, & .\ .\ .\ \frac{1}{\varphi_f \, | x_{gk} |} & .\ .\ . \end{vmatrix} \qquad (f, g, h, k = 0, 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$= \begin{vmatrix} 0, & .\ .\ .\ & x_{fh} & .\ .\ . \\ -\sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k \, | x_{gk} |}, & .\ .\ . & \frac{1}{\varphi_f \, | x_{gk} |} & .\ .\ . \end{vmatrix} = -\sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k}$$

Mithin ist

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{pk}}{\varphi_k} = 0$$

die Gleichung der Harmonikale des durch die homogenen Coordinaten φ_k ausgedrückten Punktes in Bezug auf das Prismatoid, auf welches sich die homogenen Coordinaten beziehen. u_{pk} sind die homogenen Coordinaten irgend eines Punktes der Harmonikale [1]).

Diese Form der Gleichung ist besonders geeignet zur Herleitung einiger Eigenschaften der Harmonikale. Um diese zu entwickeln stellen wir zuerst den verallgemeinerten Begriff der centralen Projection auf. Wir erklären:

Eine in einer $\mathfrak{M}_\nu$ befindliche $\mathfrak{M}_\mu'$ ($\mu < \nu$) heisst die Projection einer $\mathfrak{M}_\mu$ auf die $\mathfrak{M}_\nu$ von einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ aus, sobald $\mathfrak{M}_\mu'$ als Schnitt der

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Leipzig 1887. I. S. 115.

$\mathfrak{M}_\nu$ mit einer durch $\mathfrak{M}_\mu$ und $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ gelegten $\mathfrak{M}_{n-\nu-\mu}$ betrachtet werden kann; die $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ soll das Projectionscentrum heissen.

Auf diese Erklärung gestützt, beweisen wir folgenden Satz:

Die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$, in welcher die Harmonikale Φ die Grenz-$\mathfrak{M}_\nu$ des Prismatoides, die die Punkte $x_0 \ldots x_\nu$ bilden, schneidet, ist in Bezug auf das Prismatoid dieser Punkte die Harmonikale desjenigen Punktes η der $\mathfrak{M}_\nu$, welcher durch Projection von ξ von der $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, die die Punkte $x_{\nu+1} \ldots x_n$ bestimmen, aus entsteht.

Wir tun der Allgemeinheit keinen Abbruch, wenn wir annehmen, die $\mathfrak{M}_\nu$ sei zugleich die Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1, \ldots n)$$

Dann ist also

$$x_{fi} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ i = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

und

$$\eta_i = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

sobald η_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ die Coordinaten des Punktes η sind.

Es seien ferner v_{pf} $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes (x_{pg}') $(g = 1, 2 \ldots \nu)$ bezogen auf das Prismatoid der Punkte $x_0, \ldots x_\nu$; η habe die homogenen Coordinaten ψ_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$.

Wir wollen dann v_{pf} ausdrücken durch u_{ph} $(h = 0, 1 \ldots n)$, wenn v_{pf} die Projection des durch die Grössen u_{ph} bestimmten Punktes darstellt. Da x_p', x_p, x_i $(i = \nu+1 \ldots n)$ auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen sollen, was ja aus der Erklärung der Projection folgt, so giebt es ein Wertsystem t_k $(k = \nu+1 \ldots n)$, welches die Gleichungen

$$x_{ph}' - x_{ph} = \sum_k (x_{kh} - x_{ph}) t_k \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots n \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} x_{pf}' - x_{pf} \ldots x_{kf} - x_{pf} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} - x_{pi} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} (i, k = \nu+1 \ldots n) \\ (f = 1, 2 \ldots \nu) \end{matrix}$$

also

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} 1 \ldots 1 \\ \ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{pf} \ldots x_{kf} \\ \ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i, k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

oder

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} \sum_g u_{pg}, & \ldots 1 \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \sum_g x_{gi} u_{pg}, & \ldots x_{ki} \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_g x_{gf} u_{pg}, & \ldots 1 \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \sum_g x_{gi} u_{pg}, & \ldots x_{ki} \ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i, k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \\ g = 0, 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Mit Rücksicht auf

$$x_{fi} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ i = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

werden diese Gleichungen zu

$$x_{pf}' \sum_g u_{pg} \mid x_{ki} \mid = \sum_g x_{gf} u_{pg} \mid x_{ki} \mid$$

$$\begin{pmatrix} i, k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

und schliesslich zu

$$x_{pf}' = \frac{\sum_g x_{gf} u_{pg}}{\sum_g u_{pg}} \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

hierin kann f auch den Wert 0 annehmen. Nun ist aber auch

$$x_{pf}' = \sum_g x_{gf} v_{pg} \qquad (g, f = 0, \ldots \nu)$$

sodass sich ergiebt:

$$v_{pg} = \frac{u_{pg}}{\sum_f u_{pf}} \qquad (f, g = 0, 1 \ldots \nu)$$

also ist im besonderen

$$\psi_g = \frac{\varphi_g}{\sum_f \varphi_f} \qquad (f, g = 0, 1 \ldots \nu)$$

Die $\mathfrak{M}_{n-1}$, die durch den Schnitt von Φ mit der $\mathfrak{M}_\nu$ entsteht, wird darnach bestimmt durch das Gleichungssystem

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\Phi = \sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k} = 0 \qquad (k = 0, 1 \ldots n)$$

das durch

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\sum_g \frac{u_{pg}}{\varphi_g} = 0 \qquad (g = 0, 1 \ldots \nu)$$

ersetzt werden kann. Führen wir hierin

$$u_{pg} = v_{pg} \sum_f u_{pf}, \quad \varphi_g = \psi_g \sum_f \varphi_f \qquad (f, g = 0, 1 \ldots n)$$

so wird die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ innerhalb der $\mathfrak{M}_\nu$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\psi = \sum_f \frac{v_{pf}}{\psi_f} = 0 \qquad (f = 0, 1 \ldots \nu)$$

d. h aber die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ ψ ist die Harmonikale des Punktes η in Bezug auf das durch die Punkte $x_0, \ldots x_\nu$ gebildete Prismatoid.

Wir beweisen ferner diesen Satz:

Ist in einer $\mathfrak{M}_\nu$ eine $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ ψ Harmonikale eines Punktes η in Bezug auf ein Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$, so bleibt diese Beziehung erhalten, sobald man $\mathfrak{M}_\nu$ von einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ aus auf $\mathfrak{M}_\nu'$ projicirt.

Das Projectionscentrum, die $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, sei gegeben durch die Punkte x_k $(k = \nu+1 \ldots n)$, ferner mögen ψ', η', x_f' $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ die Projectionen von bzhw. ψ, η, x_f sein. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir $\mathfrak{M}_\nu$ als Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk} = 0 \qquad (k = \nu+1 \ldots n)$$

wählen, ferner können wir, was aus dem Vorhergehenden einleuchtet, η auffassen als Projection eines Punktes ξ der $\mathfrak{M}_n$, dessen Harmonikale Φ in Bezug auf das Prismatoid $\ldots, x_f \ldots (f = 0, 1 \ldots n)$ die $\mathfrak{M}_\nu$ in ψ schneidet, dann ist also η' die Projection von ξ auf $\mathfrak{M}_\nu'$. Es sei nun x_{ph} $(h = 1, 2 \ldots n)$ irgend ein Punkt der $\mathfrak{M}_n$, x_{pf}' $(f = 1, 2 \ldots \nu)$ seine Projection auf $\mathfrak{M}_\nu'$, dann ergiebt sich:

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{pi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{pf} & \ldots & x_{kf} \\ x_{pi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} k, i = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

Mithin folgt durch Specialisation des beliebigen Punktes:

$$x_{gf}' \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{gf} & \ldots & x_{kf} \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} i, k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{bmatrix}$$

Bezeichnet jetzt u_{ph} $(h = 0, 1 \ldots n)$ die homogenen Coordinaten des Punktes x_p bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f, \ldots (f = 0, 1 \ldots n)$, v_{pg}' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ dieselben Coordinaten des Punktes x_p' bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f' \ldots (f = 0, 1 \ldots \nu)$, so folgt aus der obigen Gleichung:

$$x_{pf}'\begin{vmatrix}\sum\limits_h u_{ph}\ \ldots\ ;\ 1\\ \sum\limits_h x_{hi}u_{ph}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_h x_{hf}u_{ph},\ \ldots\ x_{kf}\\ \sum\limits_h x_{hi}u_{ph},\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}i,\ k=\nu+1\ \ldots\ n\\ h=0,\ 1\ \ldots\ n\end{pmatrix}$$

$$x_{pf}'\begin{vmatrix}\sum\limits_g u_{pg},\ \ldots\ 1\\ \sum\limits_g x_{gi}u_{pg}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_g x_{gf}u_{pg},\ \ldots\ x_{pf}\\ \sum\limits_g x_{gi}u_{pg},\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}i,\ k=\nu+1\ \ldots\ n\\ g=0,\ 1\ \ldots\ \nu\end{pmatrix}$$

$$x_{pf}'\sum_g u_{pg}\begin{vmatrix}1\ \ldots\ 1\\ x_{gi}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}=\sum_g u_{pg}\begin{vmatrix}x_{gf}\ \ldots\ x_{kf}\\ x_{gi}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}\qquad\begin{pmatrix}i,\ k=\nu+1\ \ldots\ n\\ g=0,\ 1\ \ldots\ \nu\end{pmatrix}$$

$$=\sum_g u_{pg}x_{gf}'\begin{vmatrix}1\ \ldots\ 1\\ x_{gi}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}$$

und hieraus in Verbindung mit

$$x_{pf}'=\sum_g x_{gf}'v_{pg}'$$

kommt:

$$v_{pf}'=\frac{u_{pf}\begin{vmatrix}1\ \ldots\ 1\\ x_{fi}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}}{\sum\limits_g u_{pg}\begin{vmatrix}1\ \ldots\ 1\\ x_{gi}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}}\qquad\begin{pmatrix}f,\ g=0,\ 1\ \ldots\ \nu\\ i,\ k=\nu+1\ \ldots\ n\end{pmatrix}$$

also auch

$$\psi_f'=\frac{\varphi_f\begin{vmatrix}1\ \ldots\ 1\\ x_{fi}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}}{\sum\limits_g \varphi_g\begin{vmatrix}1\ \ldots\ 1\\ x_{gi}\ \ldots\ x_{ki}\end{vmatrix}}\qquad\begin{pmatrix}f,\ g=0,\ 1\ \ldots\ \nu\\ i,\ k=\nu+1\ \ldots\ a\end{pmatrix}$$

wenn φ_f bzhw. ψ_f' die homogenen Coordinaten der Punkte ξ, η' sind.

Es seien ferner u_f $(f=0,\ 1\ \ldots\ \nu)$ die homogenen Coordinaten irgend eines Punktes der $\mathfrak{M}_\nu$ bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f \ldots$ $(f=0,\ 1\ \ldots\ \nu)$, ψ_f die speciellen des Punktes η, dann wird ψ bestimmt durch die Gleichung:

$$\sum_{f=0}^{\nu}\frac{u_{pf}}{\psi_f}=0$$

wie in der Voraussetzung enthalten ist. Da wir nun ψ als Schnitt von Φ und $\mathfrak{M}_\nu$ auffassen wollen, so können wir diese Gleichung ersetzen durch

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu + 1 \ldots n)$$

$$\sum_f \frac{u_{pf}}{\varphi_f} = 0 \qquad (f = 0, 1 \ldots \nu)$$

daraus ergiebt sich aber, dass ψ' bestimmt ist durch

$$\sum_f \frac{v_{pf}'}{\psi_{pf}'} \cdot \frac{\sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{gi} & x_{ki} \end{vmatrix}}{\sum_g \psi_g \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{gi} & x_i \end{vmatrix}} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\psi' - \sum_{f=0}^{\nu} \frac{v_{pf}'}{\psi_f'} = 0 \quad .$$

d. h. aber ψ' ist Harmonikale des Punktes η' in Bezug auf das Prismatoid $\ldots x_f' \ldots (f = 0, 1 \ldots \nu)$. Das war zu beweisen.

Die Harmonikale Φ des Punktes ξ (es gelten die alten Bezeichnungen) schneidet die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$, welche durch die Punkte η, $x_{\nu+1} \ldots x_n$ bestimmt ist, in einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$. Man könnte nun vermuten — und diese Vermutung ist besonders leicht möglich nach Kenntniss einiger Ergebnisse, deren Ableitung der nächste Paragraph gewidmet sein soll —, dass diese $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, die wir abkürzungsweise X nennen wollen, Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das von den Punkten η, $x_{\nu+1} \ldots x_n$ gebildete Prismatoid ist. Das ist aber keineswegs der Fall; weil aber die Bestimmungsgleichung von X grosse Aehnlichkeit mit der Gleichung der erwähnten Harmonikale besitzt, soll sie hier abgeleitet werden.

Wir wählen wieder, der Einfachheit wegen, die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ zur Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pf} = 0 \qquad (f = 1 \ldots \nu)$$

Darnach ist

$$x_{kf} = \xi_f = \eta_f = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 1 \ldots \nu \\ k = \nu + 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

zu setzen. Ferner muss berücksichtigt werden, dass die Punkte η, $x_0, \ldots x_\nu$ in einer $\mathfrak{M}_\nu$ liegen, demnach giebt es ein Wertsystem τ_f, welches die Gleichungen:

$$x_{0h} - \eta_h = \sum_f (x^{fh} - \eta_h)\, \tau_f \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Es seien weiter $\chi_\nu, \chi_{\nu+1} \dots \chi_n$ die homogenen Coordinaten des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid: $\eta, x_{\nu+1} \dots x_n$, sodass also

$$\chi_\nu = \frac{| \xi_i, x_{\nu+1,i} \dots x_{ni} |}{| \eta_i, x_{\nu+1,i} \dots x_{ni} |}$$

$$\chi_k = \frac{| \eta_i, x_{\nu+1,i} \dots x_{k-1,i}, \xi_i, x_{k+1,i}, \dots x_{ni} |}{| \eta_i, x_{\nu+1,i} \dots x_{ni} |}$$
$$(i = 0, \nu+1 \dots n, \quad k = \nu+1 \dots n$$

ist.

Mit Benutzung alles des eben angeführten ergeben sich die in der Gleichung von Φ vorkommenden Grössen Δ folgendermassen:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1, & 1 & \dots 1 \\ 0 & x_{1g} & \dots x_{rg} & 0 & \dots 0 \\ \xi_k, & x_{1k} & \dots x_{rk}, & x_{\nu+1k} & \dots k_{nk} \end{vmatrix}$$

$$= | x_{fg} | \begin{vmatrix} 1, & 1 & \dots 1 \\ \xi_k, & x_{\nu+1k} & \dots x_{nk} \end{vmatrix} = | x_{fg} | | \eta_i, x_{\nu+1i} \dots x_{ni} | \chi_\nu = \Delta \chi_\nu$$
$$(f, g = 1, 2 \dots \nu; \quad k = \nu+1 \dots n; \quad i = 0, \nu+1 \dots n)$$

wobei die Bedeutung von Δ klar ist.

$$\begin{matrix}\Delta_f = \\ f < \nu+1)\end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & \dots 1, & 1, & 1 & \dots 1, & 1 & \dots 1 \\ x_{og} & \dots x_{f-1,g}, & 0, & x_{f+1,g} & \dots x_{rg}, & 0 & \dots 0 \\ x_{ok} & \dots x_{f-1,k}, & \xi_k, & x_{f+1,k} & \dots x_{\nu k}, & x_{\nu+1,k} & \dots x_{nk} \end{vmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} g = 1, 2 \dots \nu \\ k = \nu+1 \dots n \end{pmatrix}$$

Setzt man für x_{rk} den in der Vorbemerkung angegebenen Ausdruck und formt die Determinante etwas um, so erhält man:

$$\Delta_f = -\tau_f | x_{fg} | \; | \xi_i, x_{\nu+1,i} \dots x_{ni} | = -\tau_f \Delta \chi_\nu$$
$$(f = 1, 2 \dots \nu)$$

Weiter

$$\begin{matrix}\Delta_r = \\ (r > \nu)\end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & \dots 1, & 1 & \dots 1, & 1, & 1 & \dots 1 \\ x_{og} & \dots x_{rg}, & 0 & \dots 0, & 0, & 0 & \dots 0 \\ x_{ok} & \dots x_{rk}, & x_{r+1,k} & \dots x_{r-1,k}, & \xi_k, & x_{r+1,k} & \dots x_{nk} \end{vmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} g = 1, 2 \dots \nu \\ k = \nu+1 \dots n \end{pmatrix}$$

Wird hierin wieder x_{ok} fortgeschafft, so kommt nach einigen Umformungen:

$$\Delta_r = (1 - \sum_f \tau_f) \, | x_{fg} | \; | \eta_i, x_{\nu+1,i}, \dots x_{r-1,i}, \xi^i, x_{r+1,i} \dots x_{ni} |$$
$$= (1 - \sum_f \tau_f) \Delta \chi_r \qquad \begin{pmatrix} r = \nu+1 \dots n \\ f = 1, 2 \dots \nu \end{pmatrix}$$

Nun hatte Φ die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_{pk}, & x_{0k} & \ldots & x_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \frac{1}{\Delta_0} & \ldots & \frac{1}{\Delta_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (h = 0, 1 \ldots n)$$

setzen wir hierin

$$x_{pf} = 0 \qquad (f = 1, 2 \ldots \nu)$$

und entfernen zugleich x_{0k}, so geht die Gleichung über in die Bestimmungsgleichung von χ:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1-\sum_f \tau_f, & \ldots 1 & \ldots 1 & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots x_{fg} & \ldots 0 & \ldots \\ x_{pk}, & (1-\sum_f \tau_f)\eta_k & \ldots x_{fk} & \ldots x_{rk} & \ldots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_0} - \sum_f \frac{\tau_f}{\Delta_f} & \ldots \frac{1}{\Delta_f} & \ldots \frac{1}{\Delta_r} & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

$$(f, g = 1, 2 \ldots \nu; \quad k, r = \nu + 1 \ldots n)$$

oder:

$$| x_{fg} | \begin{vmatrix} 1. & 1-\sum_f \tau_f & \ldots 1 & \ldots \\ x_{pk}, & (1-\sum_f \tau_f)\eta_k & \ldots x_{rk} & \ldots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_0} - \sum_f \frac{\tau_f}{\Delta_f} & \ldots \frac{1}{\Delta_r} & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benutzung der für die Δ gefundenen Werte:

$$\frac{| x_{fg} |}{\Delta} \begin{vmatrix} 1, & 1 & \ldots 1 & \ldots \\ x_{pk}, & \eta_k & \ldots x_{rk} & \ldots \\ 0, & \frac{\nu+1}{\chi_\nu} & \ldots \frac{1}{\chi_\nu} & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir die homogenen Coordinaten des Punktes x_{ph} mit $w_\nu \ldots w_n$, — für den Punkt ξ heissen sie $\chi_\nu \ldots \chi_n$, — dann ist

$$x_{pk} = \eta_k w_k + \sum_r x_{rk} w_r \qquad (r, k = \nu + 1 \ldots n)$$

zu setzen, und wird obige Gleichung zu

$$\chi = (\nu+1) \frac{w_\nu}{\chi_\nu} + \sum_k \frac{w_k}{\chi_k} = 0 \quad (k = \nu + 1 \ldots n)$$

Das ist die gesuchte Gleichung von χ, man sieht sofort ihre Aehnlichkeit mit der Gleichung der Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid $\eta, \ldots x_r \ldots$, denn deren Gleichung ist ja, gemäss dem Früheren:

$$\frac{w_\nu}{\chi_\nu} + \sum_k \frac{w_k}{\chi_k} = 0 \qquad (k = \nu + 1 \ldots n)$$

Die Sätze, die den Gegenstand dieses Paragraphen gebildet haben, lassen sich nun auch ohne Schwierigkeit auf die sphärische Mannigfaltigkeit (vgl. § 2.) ausdehnen. An die Stelle einer ebenen ν-fachen Mannigfaltigkeit ($\mathfrak{M}_\nu$) ist dann nur diejenige krumme (M_ν) zu setzen, welche sich als Schnitt der sphärischen und einer ebenen $\nu+1$-fachen Mannigfaltigkeit ergiebt. Da die Betrachtung sachlich sich an das Obige eng anlehnt, so übergehen wir sie hier.

Ehe wir uns nun im andern Paragraphen zu der zweiten Verallgemeinerung harmonischer Punkte in einer Geraden wenden, wollen wir über die oben erklärte und angewandte Art der Projection, von der wir auch fernerhin Gebrauch machen werden, noch einige Worte sagen. Für die Ebene liefert unsre Erklärung als alleinige Möglichkeit die Projection von einem Punkt aus durch Gerade auf eine Gerade; für den Raum erweisen sich aber zwei Fälle als möglich, nämlich die Projection von einem Punkt aus durch Gerade auf eine Ebene und die Projection von einer Geraden aus durch Ebenen auf eine Gerade.

§ 5.

Wir schreiten jetzt zu der andern Verallgemeinerung der harmonischen Punkte einer Geraden.

Sind in einer Geraden drei Punkte x_0, x_1, ξ gegeben, so bezeichnet man die Strecken $x_0\xi_1$ und ξx_1 als Teile der Strecke $x_0 x_1$. Entsprechend erklären wir in der Ebene als Teile eines Dreiecks $x_0 x_1 x_2$ die 3 Dreiecke, welche ein fernerer Punkt ξ mit je zweien der drei Punkte x_0, x_1, x_2 bildet, und in der n-fachen Mannigfaltigkeit sollen die Prismatoide, deren Eckpunkte

$$x_0, \ldots x_{f-1}, \xi, x_{f+1}, \ldots x_n \quad (f = 0, 1 \ \ldots n)$$

sind, als **Teile** des Prismatoids $x_\nu, \ldots x_n$ bezeichnet werden.

Die Berechtigung dieser Bezeichnung liegt, wie bei der Geraden, darin, dass die Summe der Inhalte der Teilprismatoide, jeder allerdings mit einem bestimmten Vorzeichen versehen, dem Inhalt des Grundprismatoids gleich ist.

Sind nämlich die Coordinaten

$$\begin{array}{llll} \text{von} & x_f & x_{fh} & (h = 1, 2 \ldots n) \\ \text{und von} & \xi & \xi_h & (h = 1, 2 \ldots n) \end{array}$$

so ist der $n!$-fache Inhalt des Prismatoides $x_0, \ldots x_{f-1}, \xi, x_{f+1}, \ldots x_n$:

$$V_f = \| x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} \| \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

setzen wir

$$\operatorname{sgn} | x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} | = \varepsilon_f$$

so kommt:

$$| x_{0h}. \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h}, \ldots x_{nh} | = \varepsilon_f V_f \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

oder

$$\sum_h \xi_h D_{hf} = \varepsilon_f V_f$$

Daraus folgt

$$\sum_f \varepsilon_f V_f = \sum_{f,h} \xi_h D_{hf} = \sum_{f,h} \xi_h D_{hf} x_{f0} = \sum_h \xi_h \delta_{h0} D = D$$

$$(f, h = 0, 1 \ldots n)$$

Nun ist

$$D \operatorname{sgn} D = V$$

dem $n!$-fachen Inhalt des Prismatoides $x_0 \ldots x_n$, also kommt,

$$\operatorname{sgn} D = \varepsilon \quad \text{gesetzt}$$

$$\Sigma \varepsilon_f V_f = \varepsilon V \quad (f = 0, 1 \ldots n)$$

woraus die Berechtigung der Bezeichnung „Teilprismatoid" erhellt.

Man sagt: Eine Strecke $x_0 x_1$ wird von zwei Punkten ξ, ξ' harmonisch geteilt, sobald die Strecken $x_0 \xi$ und ξx_1 dasselbe Verhältniss haben, wie die Strecken $x_0 \xi'$ und $\xi' x_1$. Entsprechend erklären wir in der n-fachen Mannigfaltigkeit:

Die Punkte $\xi, \xi', \xi'' \ldots$ teilen das Prismatoid $x_0, \ldots x_n$ harmonisch, sobald

$$V_0 : V_1 : \ldots : V_n = V_0' : V_1' ; \ldots : V_n' = V_0'' : V_1'' : \ldots : V_n'' = \ldots$$

ist; dabei haben V_f', V_f'' dieselbe Bedeutung für ξ', ξ'' bezüglich, wie V_f für ξ. Wir wollen die Punkte $\xi, \xi', \xi'' \ldots$ harmonisch in Bezug auf das Prismatoid nennen.

Wir stellen uns nun zuvörderst die Aufgabe:

Es sollen sämtliche Punkte bestimmt werden, welche ein gegebenes Prismatoid nach dem Verhältniss $m_0 : m_1 \dots : m_n$ teilen.

Einer von diesen Teilpunkten sei ξ, so muss also bei Beibehaltung obiger Bezeichnung sein,

$$V_0 : V_1 : \dots : V_n = m_0 : \dots : m_n$$

Diese Proportion lässt sich durch das Gleichungssystem

$$V_f = D\lambda m_f \qquad (f = 0, 1 \dots n)$$

wobei λ ein Proportionalitätsfactor ist, ersetzen.

Daraus folgt

$$| x_{oh}, \dots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1}, \dots x_{nh} | = \lambda \varepsilon_f m_f | x_{gh} |$$
$$(f, g, h = 0, 1 \dots n)$$

oder

$$\sum_h \xi_h D_{hf} = \varepsilon_f m_f D\lambda$$

daraus

$$\sum_{h,f} \xi_h D_{hf} x_{fk} = \sum_f \varepsilon_f m_f D\lambda x_f \qquad (f, h, k = 0, 1 \dots n)$$
$$\sum_h \xi_h \delta_{hk} D = D\lambda \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk}$$

$$\xi_k = \lambda \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \qquad (f, k = 0, 1 \dots n)$$

also kommt, da

$$\xi_0 = \lambda \sum_f \varepsilon_f m_f = 1 \quad \text{ist,}$$

$$\xi_h = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \dots n \\ h = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

Auf diese Art sind die Coordinaten jedes Punktes bestimmt, welcher das Prismatoid in dem gegebenen Verhältniss teilt.

Da die Grössen $\varepsilon_f (f = 0, 1 \dots n)$ den Wert ± 1 annehmen können, und es im ganzen 2^{n+1} solcher Zeichencombinationen giebt, so erhält man ebensoviel Werte von ξ_h, die aber nicht alle von einander verschieden sind. Es fragt sich nun, wieviel Punkte ξ sich aus obiger Gleichung ergeben. Es werde ξ bestimmt durch $\varepsilon_f (f = 0, 1 \dots n)$, ξ' durch $\varepsilon_f' (f = 0, 1 \dots n)$, so erfordert die Uebereinstimmung von ξ mit ξ' das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} = \frac{\sum_f \varepsilon_f' m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f' m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \dots n \\ h = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

Hierin kann h auch den Wert 0 annehmen. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\sum_f x_{fh} \left\{ \frac{\varepsilon_f}{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_f'}{\sum\limits_f \varepsilon_f' m_f} \right\} m_f = 0 \quad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

$$\sum_{f,h} m_f x_{fh} D_{hk} \left\{ \frac{\varepsilon_f}{\sum \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_f'}{\sum\limits_f \varepsilon_f' m_f} \right\} = 0 \quad (f, h, k = 0, 1 \ldots n)$$

daraus

$$m_k \left\{ \frac{\varepsilon_k}{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_k'}{\sum\limits_f \varepsilon_f' m_f} \right\} = 0 \quad (k, f = 0, 1 \ldots n)$$

also kommt

$$\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_h'}{\varepsilon_0'} \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Nun können aber ε_0 und ε_0' stets gleich 1 angenommen werden, wie man aus dem Wert von ξ_h ohneweiters sieht, sodass folgt

$$\varepsilon_h = \varepsilon_h' \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

d. h. es giebt soviel Punkte ξ als es Zeichencombinationen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ giebt, nämlich 2^n. Wir haben also den Satz:

Es giebt im ganzen 2^n Punkte, welche ein gegebenes Prismatoid in n Teile von gegebenem Verhältniss teilen. Ihre Coordinaten sind dargestellt durch

$$\xi_k = \frac{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f} \quad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Man überzeugt sich auch sofort von der Richtigkeit der Umkehrung, dass ein Punkt, welcher derartige Coordinaten hat, das Prismatoid nach dem Verhältniss $m_0 : m_1 : \ldots : m_n$ teilt.

In der $\mathfrak{M}_n$ sei nun ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung gegeben durch die Punkte x_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ mit den Coordinaten x_{fh} $\begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$. Welches sind die Coordinaten ξ_h eines Punktes ξ, welcher das Prismatoid im Verhältniss $m_0 : m_1 : \ldots : m_\nu$ teilt?

Wir verlegen das Axensystem so, dass die $\mathfrak{M}_\nu$, der das Prismatoid angehört, zur Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk}' = 0 \quad (k = \nu + 1, \ldots n)$$

wird, benutzen die eben abgeleitete Formel und kehren zu dem alten Coordinatensystem zurück, so ergiebt eine leichte Rechnung:

$$\xi_h = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das sind also die Coordinaten eines Punktes ξ, der das Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$ im gegebenen Verhältniss teilt und es ist diese Art der Darstellung notwendig und hinreichend für einen solchen Punkt, wie man leicht sieht.

Wir projiciren jetzt den Punkt ξ, der in der $\mathfrak{M}_n$ das Prismatoid $x_0, \ldots x_n$ nach dem Verhältniss $m_0 : \ldots : m_n$ teilt und durch das Vorzeichensystem $\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_n$ bestimmt ist, von der durch die Punkte x_k $(k = \nu + 1 \ldots n)$ gebildeten $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ aus auf die durch x_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ bestimmte $\mathfrak{M}_\nu$. Dadurch entstehe der Punkt η; dessen Coordinaten sollen nun ermittelt werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die $\mathfrak{M}_\nu$ sei die Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk} = 0 \qquad (k = \nu + 1, \ldots n)$$

dann ist also

$$\eta_k = x_{fk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ k = \nu+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

zu setzen. Die projicirende $\mathfrak{M}_{n-r}$, welche durch x_k $(k = \nu + 1, \ldots n)$ und ξ geht, hat das Gleichungssystem:

$$x_{ph} - \xi_h = \sum_k (x_{kh} - \xi_h) t_k \qquad \begin{pmatrix} k = \nu + 1, \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

und da η auf dieser Mannigfaltigkeit liegt, so giebt es ein Wertsystem τ_k, welches die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta_g - \xi_g &= \sum_r (x_{rg} - \xi_g) \tau_r \\ - \xi_k &= \sum (x_{rk} - \xi_k) \tau_r \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k, r = \nu + 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Hieraus folgt

$$\eta_g \begin{vmatrix} 1 & \ldots & \xi_k & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ 1 & \ldots & x_{rk} & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_g & \ldots & \xi_k & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{rg} & \ldots & x_{rk} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k, r = \nu + 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

oder

$$\eta_g \begin{vmatrix} \sum\limits_f \varepsilon_f m_f, & \ldots, & \sum\limits_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \\ 1, & & x_{rk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_f \varepsilon_f m_f x_{fg}, & \ldots, & \sum\limits_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \\ x_{rg}, & \ldots, & x_{rk} \end{vmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ g = 1, 2 \ldots \nu \\ k, r = \nu + 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

daraus nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung von

$$x_{fk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ k = \nu+1, \ldots n \end{pmatrix}:$$

$$\eta_g \sum_f \varepsilon_f m_f \mid x_{rk} \mid = \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fg} \mid x_{rk} \mid \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots \nu \\ k, r = \nu+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

also schliesslich:

$$\eta_g = \frac{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f x_{fg}}{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

d. h. aber: der Punkt η teilt das Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$ im Verhältniss $m_0 : m_1 : \ldots m_\nu$.

Nehmen wir das Coordinatensystem wieder ganz allgemein an, so erhält η die Coordinaten:

$$\eta_k = \frac{\sum\limits_g \varepsilon_g m_g x_{gk}}{\sum\limits_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ k = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

An diesem Ausdruck sieht man, dass jeder Punkt ξ, welcher sich von dem, der uns als Ausgang diente, nur durch eine Verschiedenheit in den ε_k $(k > \nu)$ auszeichnet, dieselbe Projection liefert; daraus folgt aber, dass alle Punkte ξ, die in den Zeichen $\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_\nu$ übereinstimmen und deren es im Ganzen $2^{n-\nu}$ giebt, auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen, welche die Grenz-$\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ des Prismatoides $x_0, \ldots x_n$, die die Punkte x_k $(k = \nu+1 \ldots n)$ bestimmen, enthält.

Bei Aenderung der Bezeichnung, haben wir demnach folgenden Satz:

2^ν von den harmonischen Punkten, die in den Vorzeichen ε_{i_t} $(t = \nu+1, \ldots n)$ übereinstimmen, liegen auf einer $\mathfrak{M}_\nu$, die die durch die Punkte x_{i_s} $(s = 0, 1 \ldots \nu-1)$ dargestellte $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ enthält. Dabei bedeutet $\underset{(h=0, 1 \ldots n)}{(\ldots i_h \ldots)}$ irgend eine Permutation der Zahlen $0, 1 \ldots n$.

Es sei jetzt ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung gegeben, bestimmt durch die Punkte x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ mit den Coordinaten x_{gh} $(h = 1, 2 \ldots n)$; dasselbe sei im Verhältniss $m_0 : \ldots : m_\nu$ harmonisch geteilt, dann sind die Teilpunkte dargestellt durch die Coordinaten

$$\xi_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Alle Punkte dieser $\mathfrak{M}_\nu$ projiciren wir jetzt von einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, gegeben durch die Punkte x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$, aus auf $\mathfrak{M}_\nu'$. x_g' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$, ξ' seien die Projectionen von x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ bzhw. ξ. Dann teilen die Punkte ξ' das Prismatoid x_g' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ harmonisch. Das giebt den Satz:

Teilen Punkte ein Prismatoid harmonisch, so bleibt diese Eigenschaft durch Projection ungeändert.

Da dieser Satz nach denselben Principien bewiesen wird, wie der entsprechende des vorg. §, so übergehen wir den Beweis. Setzen wir

$$m_g \mid x_{ki} - x_{gi} \mid = m_g' \qquad \begin{pmatrix} i, k = \nu+1, \ldots n \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

so ergiebt sich:

$$\xi_f' = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g' x_{gf}'}{\sum_g \varepsilon_g m_g'} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ f = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das neue Teilungsverhältniss stimmt allerdings mit dem ursprünglichen nicht überein.

Wir betrachten nun wieder in der $\mathfrak{M}_n$ das Prismatoid x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$, das durch die Punkte ξ harmonisch geteilt ist. Halten wir die Zeichen $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_\nu$ fest und lassen $\varepsilon_{\nu+1} \ldots \varepsilon_n$ sich verändern, so werden dadurch 2^{n-r} Punkte ξ bestimmt, welche, wie wir gesehen haben, mit den Punkten x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$ auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen. Letztere schneidet die durch die Punkte x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ gebildete $\mathfrak{M}_\nu$ in einem Punkte η, dessen Coordinaten wir als

$$\eta_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

gefunden haben. In der $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ bilden die Punkte η, $x_{\nu+1}, \ldots x_n$ ein Prismatoid. Wir wollen beweisen, dass dieses durch die oben ausgewählten Punkte ξ harmonisch geteilt wird.

Es war

$$\xi_h \sum_f \varepsilon_f m_f = \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\xi_h \sum_{f=0}^{n} \varepsilon_f m_f = \eta_h \sum_{g=0}^{\nu} \varepsilon_g m_g + \sum_{k=\nu+1}^{n} \varepsilon_k m_k x_{kh} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Setzen wir

$$\operatorname{sgn} \sum_{g=0}^{n} \varepsilon_g m_g = \bar{\varepsilon}$$

$$\sum_{g=0}^{\nu} \varepsilon_g m_g = \bar{\varepsilon}\, \bar{m}$$

so kommt:

$$\xi_h = \frac{\bar{\varepsilon}\, \bar{m}\, \eta_h + \sum_k \varepsilon_k m_k x_{kh}}{\bar{\varepsilon}\, \bar{m} + \sum_k \varepsilon_k m_k} \qquad \begin{pmatrix} k = \nu+1, \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

damit ist die Behauptung erwiesen; das Teilungsverhältniss ist $\bar{m} : m_{\nu+1} : \ldots m_n$, wenn das Prismatoid in der Reihenfolge η, $x_{\nu+1}, \ldots x_n$ genannt wird.

§ 6.

Die im vorigen § entwickelten Sätze führen durch die Annahme besonderer Werte für das Teilungsverhältniss des Prismatoides zu den Verallgemeinerungen einiger bekannter Sätze der Elementargeometrie.

Z. B. liefert die Annahme

$$m_0 = m_1 = \ldots = m_n$$

einen als Schwerpunkt des Prismatoides zu bezeichnenden Punkt, die Annahme

$$m_f = J_f \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

wenn J_f den Inhalt des durch die Punkte $x_{f'}$ $(f' = 0, 1 \ldots (f) \ldots n)$ gebildeten Prismatoides $n-1$-facher Ausdehnung bezeichnet, die Mittelpunkte derjenigen sphärischen Mannigfaltigkeiten,

welche sämtliche $n+1$ Grenz-$\mathfrak{M}_{n-1}$ berühren. Unschwer ergeben sich ferner die Verallgemeinerungen des für das Dreieck geltenden Cevaschen Satzes von den Wechselabschnitten und des Satzes, dass die Halbirungslinie eines Winkels im Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der beiden andern Seiten teilt.

Hierauf besonders einzugehen, unterlassen wir aber, um nicht den Rahmen dieser Arbeit zu sehr zu erweitern.

Ebenso wollen wir auch nur ganz kurz bemerken, dass der Satz: Eine zu einem von vier harmonischen Strahlen parallele Strecke, welche die beiden andern zugeordneten Strahlen begrenzen, wird durch den dem ersten zugeordneten Strahl halbirt, — eine ganz interessante Erweiterung zulässt. An die Stelle der Strecke und deren Halbirungspunktes tritt ein Gebilde und dessen Mittelpunkt, das als die Verallgemeinerung eines Parallelepipedons im Raume bezeichnet werden muss. Da wir die Absicht haben an einer andern Stelle hierauf genauer einzugehen, begnügen wir uns mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 7.

Zum Schlusse der vorliegenden Arbeit soll nun noch die Frage nach der conformen Abbildung einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit auf eine andre ihre Erledigung finden. Die Ergebnisse dieses Paragraphen sind im wesentlichen Verallgemeinerungen des von Liouville in den Anmerkungen zu Monge's Applications . . . bewiesenen Satzes, dass für den dreidimensionalen Raum es nur eine conforme Abbildung giebt und dass diese, abgesehen von Verschiebungen und Drehungen, durch Transformation vermittest reciproker Radien entstanden gedacht werden kann.

Zunächst erklären wir zwei $\mathfrak{M}_n$ als ähnlich, sobald die Entfernungen je zweier entsprechenden Punkte dasselbe Verhältniss zeigen; eine $\mathfrak{M}_n$ soll dann ein conformes Abbild einer andern heissen, wenn die Umgebungen entsprechender Punkte ähnlich sind. Die Punkte der einen Mannigfaltigkeit mögen durch die Coordinaten x_h $(h = 1, 2 \ldots n)$, die der andern durch ξ_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ dargestellt sein, $x_h + dx_h$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ bezüglich $x_h + \delta x_h$ sollen zwei benachbarte Punkte von (x_h) bezeichen, ihre entsprechenden seien $(\xi_h + d\xi_h)$ und $(\xi_h + \delta\xi_h)$ $(h = 1, 2 \ldots n)$. Dann erfordert die Definition der conformen Abbildung, dass

$$(1 \quad \sum_h (d\xi_h - \delta\xi_h)^2 = m^2 \sum_h (dx_h - \delta x_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

für jedes beliebige dx_h und δx_h ist. Nun ist

$$d\xi_h = \sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \xi_{hi} dx_i \quad (h, i = 1, 2 \ldots n)$$

wobei

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} = \xi_{hi}$$

gesetzt ist; ebenso

$$\delta\xi_h = \sum_i \xi_{hi} \delta x_i \qquad (h, i = 1, 2 \ldots n)$$

Mit Benutzung hiervon nimmt Gleichung 1) die Gestalt an:

$$\sum_{h,i,k} \xi_{hi}\xi_{hk}(dx_i - \delta x_i)(dx_k - \delta x_k) = m^2 \sum_h (dx_h - \delta x_h)^2$$
$$(h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Diese Gleichung kann, weil dx_h und δx_h vollständig willkürlich sind, nur bestehen, wenn

2) $$\sum_i \xi_{hi}\xi_{hk} = m^2 \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

ist. Das sind also die Bedingungsgleichungen, die die Functionen ξ_h der Grössen x_k $(h = 1, 2 \ldots n)$ zu erfüllen haben, damit die Abbildung eine conforme sei. Den Gleichungen 2) können wir noch eine andre Form geben; multipliciren wir nämlich mit ξ_{fi} und summiren, so kommt:

$$\sum_{h,i} \xi_{fi}\xi_{hi}\xi_{hk} = \sum_i m^2 \delta_{ik}\xi_{fi} = m^2\xi_{fk} = m^2 \sum_h \delta_{fh}\xi_{hk}$$

oder

$$\sum_h \xi_{hk}(\sum \xi_{fi}\xi_{hi} - \delta_{fh} m^2) = 0 \quad (f, h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Da nun die Determinante $|\xi_{hk}|$ $(h, k = 1, 2 \ldots n)$ nicht verschwindet, wie man durch Bilden von

$$|\xi_{hk}|^2 = |\xi_{hi}| \, |\xi_{hk}| = |\sum_h \xi_{hi}\xi_{hk}| = |\delta_{ik} m^2| = m^{2n}$$
$$(h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

sieht, so folgt

$$\sum_i \xi_{fi}\xi_{hi} - \delta_{fh} m^2 = 0$$

oder mit Buchstabenänderung:

2a) $$\sum_h \xi_{ih}\xi_{kh} = \delta_{ik} m^2 \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den Gleichungen 2).

Nun ist:

$$d\xi_h = \sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,k} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

daraus folgt, da die $d\xi_h$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ von einander unabhängig sind,

$$\Sigma \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \delta_{hk} \quad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

oder, wenn wir

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = x_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

setzen,

$$\sum_i \xi_{hi} x_{ik} = \delta_{hk}$$

Hieraus findet man wieder:

$$\sum_{h, i} \xi_{hf} \xi_{hi} x_{ik} = \sum_k \xi_{hf} \delta_{hk}$$

oder in Verbindung mit 2)

$$\sum_i x_{ik} \delta_{if} m^2 = \sum_h \xi_{hf} \delta_{hk}$$

also schliesslich:

3) $$x_{fk} m^2 = \xi_{kf} \quad (f, k = 1, 2 \ldots n)$$

Aus 2a) ergiebt sich durch Differentiation nach x_f:

$$\sum_h \left(\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x_f} \xi_{kh} + \frac{\partial \xi_{kh}}{\partial x_f} \xi_{ih} \right) = 0 \quad (i \gtrless k)$$

oder mit Hilfe von 3)

$$\sum_h \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_f \partial x_h} x_{hk} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_f \partial x_h} x_{hi} \right) = 0$$

$$\sum_h \left(\frac{\partial \xi_{if}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \xi_i} \right) = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial \xi_{if}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial \xi_i} = 0$$

oder

4) $$\frac{\partial \xi_{if}}{\partial \xi_k} = - \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial \xi_i} \quad (f, i, k = 1, 2 \ldots n; \; i \gtrless k)$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_h} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_h} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right)$$

daraus folgt

$$\frac{\partial x_{ih}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_{ik}}{\partial \xi_h} \quad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

also

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\xi_{hi}}{m^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_h} \left(\frac{\xi_{ki}}{m^2} \right)$$

$$\frac{1}{m^2}\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} - \frac{2}{m^3}\xi_{hi}\frac{\partial m}{\partial \xi_k} = \frac{1}{m^2}\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h} - \frac{2}{m^3}\xi_{ki}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$$

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h} = 2\left(\xi \quad \frac{\partial \log m}{\partial \xi_k} - \xi_{ki}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_h}\right)$$

daraus in Rücksicht auf 4)

$$5) \qquad \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \xi_{hi}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_k} - \xi_{ki}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_h} \qquad \begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ h \gtrless k \end{pmatrix}$$

oder auch, wenn $\log m = M$ gesetzt und die Differentiation durch Zeiger ausgedrückt wird:

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \xi_{hi} M_k - \xi_{ki} M_h$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_h} = \sum_k \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_k} x_{kh} = \frac{1}{m^2}\sum_k \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_k}\xi_{hk} = \frac{1}{m^2}\sum_k \xi_{hk}\frac{\partial \xi_{hk}}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{2m^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \xi_{hk}^2\right) = \frac{1}{2m^2}\frac{\partial (m^2)}{\partial x_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial M}{\partial \xi_k}\xi_{ki}$$

$$(h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

also haben wir:

$$6) \qquad \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_h} = \sum_k M_k \xi_{ki} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Aus der Gleichung 5), in der wir g statt k schreiben wollen, folgt durch Differentiation nach ξ_f (f nicht $= g$)

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_f \partial \xi_g} = \xi_{hi} M_{fg} - \xi_{gi} M_{fh} + M_g \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_f} - M_h \frac{\partial \xi_{gi}}{\partial \xi_f} \quad \text{oder infolge 5)}$$

$$= \xi_{hi}(M_{fg} + M_f M_g) - \xi_{gi}(M_{fh} + M_f M_h)$$

$$\begin{pmatrix} f,\ g,\ h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f\ .\ g,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Eine Vertauschung von f und g lässt die linke Seite ungeändert, verwandelt dagegen die rechte in

$$\xi_{hi}(M_{fg} + M_f M_g) - \xi_{fi}(M_{gh} + M_h M_g)$$

demnach muss

$$\xi_{fi}(M_{gh} + M_g M_h) = \xi_{gi}(M_{fh} + M_f M_h) \qquad \begin{pmatrix} f,\ g.\ h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f,\ g,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

sein. Hieraus folgt:

$$\sum_i \xi_{ki}\xi_{fi}(M_{gh}+M_g M_h) = \sum_i \xi_{ki}\xi_{gi}(M_{fh}+M_f M_h)$$

oder in Rücksicht auf 2a)

$$\delta_{fk}(M_{gh}+M_g M_h) = \delta_{gk}(M_{fh}+M_f M_h) \qquad \begin{pmatrix} f,\ g,\ h,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f,\ g,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

d. h. es ist überhaupt

7) $\quad M_{gh}+M_g M_h = 0 \qquad (g,\ h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n;\quad g,\ h \text{ ungleich})$

Weiter ist

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_h}\{\xi_{hi}M_k - \xi_{ki}M_h\} \quad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n;\ h, k \text{ ungleich})$$

$$= \xi_{hi}M_{hk} - \xi_{ki}M_{hh} + M_k \sum_f M_f \xi_{fi} - M_h(\xi_{ki}M_h - \xi_{hi}M_k)$$

$$= \xi_{hi}(M_{hk}+2M_h M_k) - \xi_{ki}(M_{hh} - M_k^2 + M_h^2) + \sum_\mu \xi_{\mu i} M_\mu M_k$$

$(h,\ i,\ k,\ f = 1.\ 2\ .\ .\ .\ n;\ h, k \text{ ungleich } \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h)(k)\ .\ .\ .\ n)$

Ebenso ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}(\sum_f M_f \xi_{fi}) = \sum_\lambda \left(M_{\lambda k}\xi_{\lambda i} + M_\lambda \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial \xi_k} \right)$$

$$+ M_{kk}\xi_{ki} + M_k \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_k}$$

$$= \sum_\lambda \{M_{\lambda k}\xi_{\lambda i} + M_\lambda M_k \xi_{\lambda i} - M_\lambda^2 \xi_{ki}\} + M_{kk}\xi_{ki} + M_k \sum_f M_f \xi_{fi}$$

$f.\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n,\quad \lambda = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (k)\ .\ .\ .\ n;\quad h,\quad \text{ungleich})$

oder

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \xi_{hi}(M_{hk}+2M_h M_k) + \xi_{ki}(M_{kk}+M_k^2 - \sum_\lambda M_\lambda^2)$$

$$+ \sum_\mu \xi_{\mu i}(M_{\mu k}+2M_\mu M_k)$$

$$\begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ \lambda = 1,\ 2 \ldots (k) \ldots n;\ h,\ k \text{ ungleich} \\ \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h)\ (k)\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Die Vergleichung der beiden Werte von $\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k}$ liefert:

$$\xi_{ki}(M_{kk}+M_{hh} - \sum_\mu M_\mu^2) + \sum_\mu \xi_{\mu i}(M_{\mu k}+M_\mu M_k) = 0$$

In Verbindung mit 7) folgt hieraus schliesslich

8) $\quad M_{hh}+M_{kk} = \sum_\mu M_\mu^2 \quad \begin{pmatrix} \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h, k)\ .\ .\ .\ n \\ h, k = 1, 2 \ldots n;\ h,\ k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$

Berücksichtigt man noch, dass

$$M_h = \frac{\partial \log m}{\partial \xi_h} = \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$$

$$M_{hk} = \frac{\partial^2 \log m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} - \frac{1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}\frac{\partial m}{\partial \xi_k} \quad (h, k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, so gehen die Gleichungen 7) und 8) über in:

9)
$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = 0$$

10)
$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_k^2} = \sum_i \frac{1}{m}\left(\frac{\partial m}{\partial \xi_i}\right)^2 \quad \begin{pmatrix} h, i, k = 1, 2 \ldots n \\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Aus 9) folgt, dass $\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$ unabhängig von ξ_k $(k = 1, 2 \ldots (h) \ldots n)$ d. h. es ist eine Function von ξ_h allein. Wir können also setzen

$$\frac{\partial m}{\partial \xi_h} = f_h'(\xi_h)$$

mithin:

$$m = f_h(\xi_h) + \Phi(\xi_1 \ldots \xi_{h-1}, \xi_{h+1} \ldots \xi_n)$$

Diese Ueberlegung gilt aber für jedes h, mithin muss m die Form haben

11)
$$m = \sum_h f_h(\xi_h) \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Mit Hilfe hiervon folgt aus 10) dann weiter:

$$f_h''(\xi_h) + f_k''(\xi_k) = \frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i (f_i(\xi_i)} \quad \begin{pmatrix} h, i, k = 1, 2 \ldots n \\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck rechter Hand ist eine symmetrische Function aller ξ_h, er ist aber infolge der linken Seite unabhängig von allen ξ mit Ausschluss von ξ_h und ξ_k, mithin ist er überhaupt constant, also

$$f_h''(\xi_h) + f_k''(\xi_k) = C \quad (h, k = 1, 2 \ldots n;\ h, k \text{ ungleich})$$

$$f_g''(\xi_h) + f_i''(\xi_i) = C$$

daraus folgt

$$f_i'(\xi_i) + f_k''(\xi_k) = C \quad (h, i, k \text{ ungleich})$$

Diese Gleichungen liefern

$$f_h''(\xi_h) = \frac{C}{2} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass C nicht verschwindet, und setzen

$$C = \frac{4}{\varrho}$$

dann kommt:

$$f_h''(\xi_h) = \frac{2}{\varrho} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

woraus

$$f_h(\xi_h) = \frac{(\xi_h - \alpha_h)^2}{\varrho} + \beta_h \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

bei geeigneter Wahl der willkürlichen Constanten sich ergiebt.

Mit dieser Bestimmung wird:

$$\frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i f_i(\xi_i)} = \frac{\left(\frac{2}{\varrho}\right)^2 \sum_i (\xi_i - \alpha_i)^2}{\frac{1}{\varrho} \sum_i (\xi_i - \alpha_i)^2 + \sum_i \beta_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

damit dieser Ausdruck constant werde, ist notwendig und hinreichend, dass $\sum_i \beta_i$ verschwinde. Darnach wird also

$$m = \frac{1}{\varrho} \sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\sum_h x_{hi} x_{hk} = \delta_{ik} \frac{1}{m^2} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

das aus 2a) mit Hilfe von 3) folgt, ergiebt sich in Rücksicht auf die gewonnenen Ergebnisse ohneweiteres

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{r} \sum_h (x_h - a_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Bemerken wir noch, dass in den vorstehenden Betrachtungen davon Gebrauch gemacht wurde, dass n mindestens $= 3$, so können wir das Resultat, das wir soeben erlangt haben, so aussprechen:

Abgesehen von dem noch zu erledigenden Fall $C = 0$ ist eine conforme Abbildung zweier ebenen n-fachen Mannigfaltigkeiten ($n > 2$) nur dann möglich, wenn die Function m den Bedingungen genügt

12) $$m = \frac{1}{\varrho} \sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2; \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{r} \sum_h (x_h - a_h)^2 \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$13)\qquad \sum_h (x_h - a_h)^2 \,.\, \sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2 = r\varrho$$

woraus man schon erkennen kann, dass, abgesehen von Verschiebung und Drehung, die conforme Abbildung identisch ist mit der Transformation nach reciproken Radien. Um dies noch genauer einzusehen und formelmässig darzustellen, verfahren wir folgendermassen: Es seien ξ_h und $\overline{\xi_h}$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ zwei Lösungen der Differentialgleichungen 2), zu demselben m, dessen Form wir ja für alle Fälle festgestellt haben, gehörig, dann folgt aus

$$\sum \overline{\xi_{hf}}\,\overline{\xi_{hg}} = \delta_{fg}\, m^2 \qquad (h, f, g = 1, 2 \ldots n)$$

mit Hilfe von

$$\overline{\xi_{hf}} = \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial x_f} = \sum_i \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_f} = \sum_i \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i}\,\xi_{if} \qquad (h, i, f = 1, 2 \ldots n)$$

das Gleichungssystem:

$$\sum_{h,i,j} \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_j}\,\xi_{if}\,\xi_{jg} = \delta_{fg}\, m^2 \quad (f, g, h, i, j = 1, 2 \ldots n)$$

Multiplicirt man mit ξ_{kg} und summirt, so kommt:

$$\sum_{h,i,j} \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_j}\,\xi_{if} \sum_g \xi_{jg}\,\xi_{kg} = \sum_g \delta_{fg}\, m^2\, \xi_{kg}$$

oder in Rücksicht auf 2a):

$$\sum_i \xi_{if}\left(\sum_h \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_k} - \delta_{ik}\right) = 0 \qquad (f, h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

also, da

$$|\,\xi_{if}\,| \text{ nicht} = 0 \qquad (i, f = 1, 2 \ldots n)$$

$$14)\qquad \sum_h \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_k} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Dieses Differentialgleichungssystem stimmt überein mit dem System 2), wenn in diesem

$$m = 1, \quad \xi_h = \overline{\xi_h}, \quad x_h = \xi_h$$

gesetzt werden; mit der Auflösung der Gleichungen

$$15)\qquad \sum \xi_{hi}\,\xi_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

haben wir also zugleich die des Systems 14). Die Gleichungen 5) und 6) werden für den speciellen Fall $m = 1$ zu

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = 0 \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \sum_f \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_f} \frac{\partial x_f}{\partial \xi_k} = \frac{1}{m^2} \sum_f \xi_{kf} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i}$$

also kommt:

$$\sum_f \xi_{kf} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = 0 \qquad (f,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

daraus

$$\sum_{k,f} \xi_{kg} \xi_{kf} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = \sum_f \delta_{fg} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_g \partial x_i} = 0$$

$$(f,\ g,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

d. h. aber, es ist

16) $$\xi_h = c_h + \sum_i \alpha_{hi} x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

und da

$$\xi_{hi} = \alpha_{hi}$$

ist, so müssen die Constanten α_{hi} den Bedingungen

$$\sum_h \alpha_{hi} \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

genügen. Demnach folgt aus dem Gleichungssystem 14):

$$\bar{\xi}_h = c_h + \sum_k \alpha_{hk} \xi_k$$

mit der Massgabe:

$$\Sigma \alpha_{hi} \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Jede zu demselben m gehörige Lösung der Differentialgleichungen 2) lässt sich mithin aus einer einzigen auf diese Weise herleiten. Um nun eine solche aufzustellen, beweisen wir zunächst, dass die Constanten r und ϱ einander gleich sind; das geschieht so:

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{m}\right)}{\partial x_h^2} = \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_i \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{m}\right)}{\partial \xi_i} \xi_{ih} \right) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left(- \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} x_{hi} \right)$$

$$(i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

$$= - \sum_k \xi_{kh} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} x_{hi} \qquad (i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

$$= - m^2 \sum_{i,k} x_{hk} \left(\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i \partial \xi_k} x_{hi} + \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_{hi}}{\partial \xi_k} \right)$$

$$= -m^2 \sum_{i,k} x_{hi} x_{kr} \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{m^2}{2} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\sum_k x_{hk}^2)$$

$$= -\frac{1}{m^2} \sum_{i,k} \xi_{ik} \xi_{kk} \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{m^2}{2} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{m^2}\right) .$$

Mit Benutzung von 2) und 12) folgt hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{\varrho} .$$

d. h.

17) $$r = \varrho$$

Setzt man nun

$$\xi_h = \frac{r(x_h - a_h)}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h, k = 1, 2 \ldots n)$$

so werden — man überzeugt sich davon leicht — die Gleichungen 2) befriedigt für den allgemeinsten Wert, den m haben kann,

$$m = \frac{r}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

Daraus folgt in Verbindung mit 15), dass die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems überhaupt enthalten ist in der Form

18) $$\xi_h = c_h + r \sum_i \alpha_{hi} \frac{x_i - a_i}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

mit der Massgabe:

$$\sum_h \alpha_{hi} \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Nun ist noch der Fall zu erledigen, dass die Constante C verschwindet; hierfür wird:

$$f_h''(\xi_h) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i f_i(\xi_i)} = 0$$

$$(h, i = 1, 2 \ldots n)$$

d. h.

$$f_h''(\xi_h) = 0 \quad \text{und} \quad f_h'(\xi_h) = 0 \quad (h, i = 1, 2 \ldots n)$$

mithin kommt

$$f_h(\xi_h) = \text{const}$$

also ist m selbst constant. Für diesen Fall können die Differentialgleichungen 2) in der Form geschrieben werden:

$$\sum_h \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\xi_h}{m}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\xi_h}{m}\right) = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Dieses Gleichungssystem stimmt überein mit dem System 15), mithin folgt hieraus:

$$\frac{\xi_h}{m} = c_h' + \sum_i \alpha_{hi} x_i$$

oder auch

$$\xi_h = c_h + m \sum_i \alpha_{hi} x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

die α_{hi} müssen dabei den Bedingungen genügen:

$$\sum_h \alpha_{hi} \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Die hierdurch bestimmte Abbildung drückt die Aehnlichkeit und für den Fall $m = 1$ die Congruenz der beiden Mannigfaltigkeiten aus.

Demnach haben wir das Endergebniss:

„Eine ebene n-fache Mannigfaltigkeit ($n > 2$) lässt sich auf „eine andre ebene n-fache Mannigfaltigkeit nur auf zwei Arten conform abbilden, entweder so, dass beide ähnlich sind — diese Ab„bildung wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$\xi_h = c_h + m \sum_i \alpha_{hi} x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

„oder so, dass die eine n-fache Mannigfaltigkeit sich aus der andern „mit Hilfe der Transformation durch reciproke Radien und eine „Coordinatentransformation herleiten lässt — diese Abbildung wird „durch die Gleichungen

$$\xi_h = c_h + r \sum_i \alpha_{hi} \frac{x_h - a_h}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

„vermittelt; in beiden Fällen genügen die α_{hi} den Bedingungen

$$\sum_h \alpha_{hi}\,\alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Zum Schluss dieser Betrachtungen wollen wir noch auf einen merkwürdigen Unterschied zwischen der conformen Abbildung zweier n-fachen ebenen Mannigfaltigkeiten ($n > 2$) und der zweier Ebenen aufmerksam machen und eine Gleichung herleiten, die diesen Unterschied recht erkennen lässt. Es ist

$$\sum_i \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_i} = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k}\,\xi_{ki} + \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h}\,\xi_{hi} \right)$$

$$\begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ k,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \Big(\sum_k \xi_{ki} (\xi_{hi} M_k - \xi_{ki} M_h) + \xi_{hi} \sum_f M_f\,\xi_{fi} \Big)$$

$$\begin{pmatrix} f,\ h,\ i.\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ a \\ k,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_k \Big(M_k \sum_i \xi_{ki}\,\xi_{hi} - M_h \sum_i \xi_{ki}^2 \Big) + \sum_f M_f \sum_i \xi_{fi}\,\xi_{hi}$$

$$= \sum_k (M_k\,\delta_{hk}\,m^2 - M_h\,m^2) + \sum_f M_f\,\delta_{fh}\,m^2$$

$$= -(n-1)\,M_h m^2 + M_h m^2 = -(n-2)\,M_h m^2$$

Für $n = 2$ folgt hieraus die bekannte Beziehung

$$\Delta \xi_h = \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (h = 1,\ 2)$$

die also nur für diesen speciellen Fall gilt.

XIX.

Dreiteilung jedes Winkels mittelst fester Kegelschnitte.

(Vierter Artikel.)

Von

Wilhelm Panzerbieter.

Während in den früheren Mitteilungen diejenigen Kegelschnitte angegeben worden sind, welche sich in dem Scheitel C des rechten Winkels ACB und den Trisectionspunkten P_1, P_2 und P_3 der zu den Centriwinkeln $BMC (2\alpha)$, $AMC (180^0 - 2\alpha$ oder $2\beta)$, $360^0 \mp 2\alpha$ und $360^0 \mp 2\beta$ gehörigen Bogen schneiden, soll nunmehr die Lage der Schnittpunkte derjenigen Kegelschnitte bestimmt werden, welche den vorigen congruent sind und von denen die eine Gruppe (I) durch B und die Trisectionspunkte P_1', P_2' und P_3', die andere Gruppe (II) durch A und die Trisectionspunkte P_1'', P_2'' und P_3'' derselben Bogen gelegt sind.

Verlängert man den Radius CM durch M, bis der Kreis in D geschnitten wird, teilt MD in zwölf gleiche Teile und bezeichnet den (von M aus zu zählenden) zweiten Teilpunkt mit T, den dritten mit U, den vierten mit V und den sechsten mit W, so ist der Schnittpunkt der durch T zur Sehne BC (a) und der durch W zur Sehne AC (b) gelegten Parallelen der Mittelpunkt O'' der Trisectionsellipse (II); ihre halbe kleine Achse b_1'' ist gleich $\sqrt{\frac{25 b^2}{144} + \frac{3 a^2}{16}}$, ihre halbe grosse Achse a_1'' gleich $b_1'' . \sqrt{3}$ und ihre Mittelpunktsgleichung lautet:

$$x^2 + 3y^2 = \frac{25 b^2}{48} + \frac{9 a^2}{16}$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von O'' nach U, so erhält diese Gleichung, da $x - \frac{a}{8}$ für x und $y - \frac{b}{24}$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$x^2 - \frac{a}{4}x + 3y^2 - \frac{b}{4}y = \frac{33b^2 + 35a^2}{64} \quad (1)$$

Der Schnittpunkt der durch T zu AC und der durch W zu BC gelegten Parallelen ist der Mittelpunkt O' der Trisectionsellipse (I); ihre halbe kleine Achse b_1' ist gleich $\sqrt{\frac{25\,a^2}{144} + \frac{3b^2}{16}}$; ihre halbe grosse Achse a_1' gleich $b_1' \cdot \sqrt{3}$ und ihre auf dasselbe durch U gelegte Achsensystem bezogene Gleichung lautet:

$$y^2 + \frac{b}{4}y + 3x^2 + \frac{a}{4}x = \frac{33a^2 + 35b^2}{64} \quad (2)$$

Durch Addition der Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich:

$$x^2 + y^2 = \frac{17(a^2 + b^2)}{64}$$

und da $a^2 + b^2 = 4r^2$ ist:

$$x^2 + y^2 = r^2 + \left(\frac{r}{4}\right)^2 \quad (3)$$

durch Subtraction derselben Gleichungen:

$$\left(y^2 - \frac{b}{4}y + \frac{b^2}{64}\right) - \left(x^2 + \frac{a}{4}x + \frac{a^2}{64}\right) = 0$$

oder:

$$\left(y - \frac{b}{8}\right)^2 - \left(x + \frac{a}{8}\right)^2 = 0 \quad (4)$$

Ist daher $C'D'$ der auf CD senkrechte Durchmesser, so stellt die Gleichung (3) den Kreis um U mit dem Radius UC' und die Gleichung (4) zwei in M sich schneidende gerade Linien dar, welche mit den Halbirungslinien der Winkel 2α und $180^0 - 2\alpha$ Winkel von 45^0 bilden. Da nun die Coordinaten der Schnittpunkte der Trisectionsellipsen (I) und (II) auch den Gleichungen (3) und (4) genügen müssen, so fallen diese Schnittpunkte mit denen des Kreises (3) und der durch (4) dargestellten Geraden zusammen. —

Die durch U zu BC parallel gelegte Gerade ist die Achse der Trisectionsparabel (II)[1]. Ihr Parameter ist gleich $\frac{a}{4}$; ihr Scheitel J'' ist um $\frac{(\frac{1}{4}b)^2}{a}$ von AC (nach links) entfernt und ihre Scheitelgleichung lautet:

$$y^2 = \frac{a}{4}x$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von J'' nach W, so erhält

1) cf. meine Abhandlung zum Programm des Falkrealgymn. zu Berlin. Ostern 1892.

diese Gleichung, da $x+\frac{(\frac{3}{4}b)^2}{a}+\frac{3a}{4}$ für x und $y-\frac{b}{8}$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$y^2-\frac{b}{4}y+\frac{b^2}{64}=\frac{a}{4}x+\frac{9b^2}{64}+\frac{3a^2}{16}$$

oder:

$$y^2-\frac{b}{4}y-\frac{a}{4}x=\frac{b^2}{8}+\frac{3a^2}{16} \tag{5}$$

Die durch U zu AC parallel gelegte Gerade ist die Achse der Trisectionsparabel (I). Ihr Parameter ist gleich $\frac{b}{4}$; ihr Scheitel J' ist um $\frac{(\frac{3}{4}a)^2}{b}$ von BC (nach oben) entfernt und ihre auf dasselbe durch W gelegte Achsensystem bezogene Gleichung lautet:

$$x^2+\frac{a}{4}x+\frac{b}{4}y=\frac{a^2}{8}+\frac{3b^2}{16} \tag{6}$$

Durch Addition der Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich:

$$^2+y^2=\frac{5(a^2+b^2)}{16}.$$

oder:

$$x^2+y^2=r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2 \tag{7}$$

durch Subtraction derselben Gleichungen:

$$y^2-\frac{b}{2}y+\frac{b^2}{16}-\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{16}\right)=0$$

oder:

$$\left(y-\frac{b}{4}\right)^2-\left(x+\frac{a}{4}\right)^2=0 \tag{8}$$

Die Schnittpunkte der Trisectionsparabeln (I) und (II) fallen daher mit denen des Kreises um W mit dem Radius WC' und der durch (4) dargestellten Geraden zusammen. —

Der Schnittpunkt der durch V zu AC parallel gelegten Geraden mit der Sehne BC ist der Mittelpunkt N' der Trisectionshyperbel (I) ($\varepsilon=2$); ihre halbe Hauptachse ist gleich $\frac{a}{3}$, ihre halbe Nebenachse ist gleich $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ und ihre Mittelpunktsgleichung lautet:

$$x^2-\frac{1}{3}y^2=\frac{a^2}{9}$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von N' nach D, so erhält diese Gleichung, da $x+\frac{a}{3}$ für x und $y-b$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$x^2+\frac{2a}{3}x-\tfrac{1}{3}y^2+\frac{2b}{3}y=\frac{b^2}{3} \tag{9}$$

Der Schnittpunkt der durch V zu BC parallel gelegten Geraden mit der Sehne AC ist der Mittelpunkt N'' der Trisectionshyperbel (II); ihre halbe Hauptachse ist gleich $\frac{b}{3}$; ihre halbe Nebenachse gleich $\frac{b}{3}\sqrt{3}$ und ihre auf dasselbe durch D gelegte Achsensystem bezogene Gleichung lautet:

$$y^2-\frac{2b}{3}y-\tfrac{1}{3}x^2-\frac{2a}{3}x=\frac{a^2}{3} \tag{10}$$

Durch Addition der Gleichungen (9) und (10) ergiebt sich:

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

oder:

$$x^2+y^2=2r^2 \tag{11}$$

durch Subtraction derselben Gleichungen:

$$y^2-bx+\frac{b^2}{4}-\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)=0$$

oder:

$$\left(y-\frac{b}{2}\right)^2-\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=0 \tag{22}$$

Die Schnittpunkte der Trisectionshyperbeln (I) und (II) fallen daher mit denen des Kreises um D mit dem Radius DC' und der durch (4) dargestellten Geraden zusammen. —

Die gewonnenen Resultate ergeben daher folgenden **Lehrsatz**:

Sind CD und $C'D'$ zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser eines Kreises M; $MU=\frac{1}{4}MD$ und $MW=\frac{1}{2}MD$; schlägt man um U, W und D die Kreise mit den entsprechenden Radien UC', WC' und DC' und legt man durch M einen beliebigen dritten Durchmesser AB, welcher mit CD die Winkel 2α und $180^0-2\alpha$ bilde, so schneiden die Halbirungslinien der Winkel $BMD'(90^0-2\alpha)$ und $BMC'(90^0+2\alpha)$ und ihre Verlängerungen durch M

1) den Kreis um U in den vier Punkten e_1, e_2, e_3 und e_4, durch welche zwei Trisectionsellipsen ($\varepsilon=\sqrt{\frac{2}{3}}$),

2) den Kreis um W in den vier Punkten p_1, p_2, p_3 und p_4, durch welche zwei Trisectionsparabeln,

3) den Kreis um D in den vier Punkten h_1, h_2, h_3 und h_4, durche welche zwei Trisectionshyperbeln ($\varepsilon=2$)

der Winkel 2α und $180^0-2\alpha$ bestimmt sind. Die eine Gruppe (I) der genannten Kegelschnitte geht durch B und die Trisectionspunkte P_1', P_2' und P_3'; die andere (II) durch A und die Trisectionspunkte P_1'', P_2'' und P_3''.

XX.

Ueber die Reihe der reciproken Binomial-Coefficienten.

Von

Franz Rogel.

Werden zu Coefficienten einer Potenzreihe die reciproken Coefficienten der Entwicklung

$$(1-x)^{-m}$$

genommen, so entsteht die Reihe

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\binom{m+n}{n}} \tag{1}$$

deren Summe gesucht werden soll.

Sie lässt sich auch schreiben

$$\frac{1}{n!} f(x)\, x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+n)!} x^{m+n} \tag{2}$$

dann ist

$$\left\{D^{m+n} \frac{1}{n!} f(x)\, x^n\right\}_0 = m! \tag{3}$$

da ferner

$$m! = \left\{D^m \frac{1}{1-x}\right\}_0$$

so folgt für jedes ganze m

$$\left\{D^{m+n} \frac{1}{n!} f(x)\, x_n\right\}_0 = \left\{D^m \frac{1}{1-x}\right\}_0$$

was nur möglich ist, wenn

$$D^{m+n}\frac{1}{n!}f(x)x^n = D^m\frac{1}{1-x}$$

woraus sich ergiebt

$$f(x) = \frac{n!}{x^n}\int\limits_0^{\overset{n}{x}}\frac{\partial x^n}{1-x} \tag{4}$$

Dass die oberen Grenzen dieser n Integrationen $= x$ sein müssen, ist an und für sich einleuchtend. Das Verschwinden der sämtlichen unteren Grenzen hat seinen Grund in dem Umstande, dass die $n-1$ ersten Ableitungen von $\frac{1}{n!}f(x)x^n$ zufolge der Gleichung (2) mit x zugleich null werden, während der $n$te Differentialquotient für $x=0$ der Einheit gleich wird.

Bei successiven Integrationen zwischen 0 und x findet sich

$$\int\limits_0^x\frac{dx}{1-x} = -\lg(1-x)$$

$$\int\limits_0^{\overset{2}{x}}\frac{\partial x^2}{1-x} = \frac{1}{1!}(1-x)[\lg(1-x)-s_1]+1$$

$$\int\limits_0^{\overset{3}{x}}\frac{dx^3}{1-x} = -\frac{1}{2!}[\lg(1-x)-s_2]-\frac{s_2}{1!}+\frac{1}{1!}s_1x$$

. . . .

$$\int\limits_0^{\overset{r}{x}}\frac{dx^r}{1-x} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}(1-x)^{r-1}[\lg(1-x)-s_{r-1}]$$
$$+\sum_{p=1}^{p=r-1}(-1)^{p+1}\frac{s_p\,x^{r-p-1}}{p!\,(r-p-1)!}$$

worin

$$s_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \quad s_0 = 0 \tag{5}$$

ein Ergebniss, das sich durch den Schluss von r auf $r+1$ beweisen lässt.

Die gleich hohen, nicht in den $\lg(1-x)$ multiplicirten Potenzen von x vereinigt und geordnet entsteht

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1}-s_r}{x^{r+1}} + \frac{(-1)^n}{x^n}(1-x)^{n-1}\lg(1-x)\right] \qquad (6)$$

Für $x = 0$ geht aus dem linksseitigen Ausdrucke die Einheit hervor, während jener rechter Hand die Form

$\infty - \infty + \infty \; . \; . \; .$ annimmt.

Die Auswertung dieser unbestimmten Form löst den scheinbaren Widerspruch, es findet sich

$$\left\{(-1)^n \frac{1}{x^n}(1-x)^{n-1}\lg(1-x) + \sum_{r=0}^{r=n-2}(-1)^r \binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\frac{1}{x^{r+1}}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n} \qquad (7)$$

In der Formel (6) $-x$ statt $+x$ geschrieben giebt

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^m}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\frac{1}{x^n}(1+x)^{n-1}\lg(1+x) - \sum_{r=r}^{n-2}\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\frac{1}{x^{r+1}}\right] \qquad (8)$$

woraus für $x = 1$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{\binom{m+n}{m}} = n\left[2^{n-1}\lg 2 - \sum_{r=0}^{n-2}\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\right] \qquad (9)$$

und für $n = 2$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{\binom{m+2}{m}} = 4\lg 2 - 1 \qquad (10)$$

hervorgeht.

Der Formel (6) kann übrigens noch die folgende Form gegeben werden:

$$(-1)^n \frac{1}{x^n}(1-x)^{n-1}\lg(1-x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{\binom{m+n}{m}} - \sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\frac{1}{x^{r+1}} \qquad (11)$$

Die Ersetzung des Logarithmus durch die gleichwertige Potenzreihe muss notwendig zu einer Identität führen, woraus noch folgt, dass die vorgelegte Reihe (1), indem sie aus der Logarithmus-Reihe entstanden gedacht werden kann, mit ihrer Summe denselben Giltigkeitsbereich besitzt, wobei der Grenzwert $x = 1$ inbegriffen ist, da hiefür auch die Formel

$$-\lg(1-x) = \Sigma \frac{x^n}{n}$$

widerspruchsfrei bleibt.

Die Betrachtung des alternirenden Summen-Ausdruckes in (6) regt die Frage nach jenen Werten von x an, für welche der algebraische Teil verschwindet. Die hiebei zu lösende Gleichung hat nicht für jedes n reelle Wurzeln, so z. B. bei $n = 4$.

Der Fall $n = 3$ erfordert die Lösung der Gleichung

$$\binom{2}{0} s_2 x - \binom{2}{1} \tfrac{1}{2} = 0$$

daher

$$x = \tfrac{2}{3}$$

folglich

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{3^m \binom{m+3}{m}} = \frac{3^2}{2^3} \lg 3 \tag{12}$$

Bei $n = 5$ existirt ebenfalls ein echter positiver Bruch, für welchen der algebraische Teil verschwindet.

Von der Reihe (1) lassen sich noch weitere summirbare ableiten.

1. In (6)

$$x = k e^v$$

gesetzt, p mal bezüglich v differentiirt und $v = 0$ genommen führt zur Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m m^p}{\binom{m+n}{m}}$$

convergent für

$$|k| \leqq 1$$

deren Summirung vor allem die Kenntniss eines independenten Ausdruckes für den Nullwert der $p$ten Ableitung von

$$z = \frac{1}{k e^v} (1 - k e^v)^{n-1} \lg (1 - k e^v)$$

erfordert.

Setzt man

$$1 - k e^v = (1-k)\left[1 - \frac{k}{1-k}(e^v - 1)\right]\cdot$$

so ist

$$\lg(1-ke^v) = \lg(1-k) - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{k}{1-k}\right)^r (e^v-1)^r$$

ferner

$$\left\{ D^h \lg(1-ke^v)\right\}_0 = -\sum_{r=1}^{h}\frac{1}{r}\left(\frac{k}{1-k}\right)^r E_h^r = L_h \tag{13}$$

wo

$$L_0 = \lg(1-k)$$

und

$$E_h^r = \{D^h(e^v-1)^r\}_0 =$$

$$r^h - \binom{r}{1}(r-1)^h + \binom{r}{2}(r-2)^h \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1} 1^h$$

Ferner ist

$$\left\{D^q \frac{1}{k^n e^{nv}}(1-ke^v)^{n-1}\right\}_0 =$$

$$\frac{1}{k^n}\left\{D^q \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s} k^s e^{-(n-s)v}\right\}_0$$

$$= \frac{(-1)^q}{k^n}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s \binom{n-1}{s} k^s (n-s)^q \tag{14}$$

$$\equiv \frac{A_q}{k^n}, \quad A_0 = (1-k)^{n-1}$$

Es ist daher

$$\left\{D^p z\right\}_0 = \frac{1}{k^n}\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r} A_r L_{p-r}$$

somit

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^m m^p}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\frac{(-1)^n}{k^n}\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}A_r L_{p-r}\right.$$

$$\left. + (-1)^p \sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{n-1}{r}(s_{n-1} - s_r)\frac{(r+1)^p}{k^{r+1}}\right] \tag{15}$$

giltig für positive ganze m, n und p und für der Bedingung

$$-1 \leqq k < 1$$

genügende k.

Für $k = -1$ wird

$$A_q = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} (n-s)^q, \quad A_0 = 2^{n-1}$$

$$L_h = -\sum_{r=1}^{h} \frac{(-1)^r}{r \cdot 2^r} E_h{}^r, \quad L_0 = \lg 2$$

daher

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m^p}{\binom{m+n}{m}} = n \left[\sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} A_r L_{p-r} \right.$$

$$\left. + (-1)^{p+1} \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r)(r+1)^p \right] \quad (16)$$

woraus für $n = 2$ folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m^p}{\binom{m+2}{m}} = 2\sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} A_r L_{p-r} + (-1)^{p+1} 2$$

2. Die Substitution

$$x = \varrho e^{i\varphi}$$

in (6) ergiebt wegen

$$\lg(1-x) = \tfrac{1}{2}\lg \varDelta - i\Theta$$

$$(1-x)^{n-1} = \varDelta^{\frac{n-1}{2}} e^{-in\Theta}$$

$$\frac{1}{x^n}(1-x)^{n-1}\lg(1-x) = A + iB \quad \text{wo}$$

$$A = \varrho^{-n} \varDelta^{\frac{n-1}{2}} [\tfrac{1}{2}\cos n(\varphi+\Theta) \,.\, \lg \varDelta - \Theta \sin n(\varphi+\Theta)]$$

$$B = \varrho^{-n} \varDelta^{\frac{n-1}{2}} [-\tfrac{1}{2}\sin n(\varphi+\Theta) \,.\, \lg \varDelta - \Theta \cos n(\varphi+\Theta)]$$

und

$$\varDelta = 1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2$$

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\varrho \sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}$$

die Relation

$$f(\varrho e^{i\varphi}) = n \left[\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \varrho^{-r-1} e^{-i(r-1)\varphi} \right.$$

$$\left. + (-1)^n (A + iB) \right] \ldots (\Theta)$$

woraus durch Trennnng des Imaginären vom Reellen die neuen Summenformeln entstehen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho^m \cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n \left[\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1} - s_r}{\varrho^{r+1}} \cos(r+1)\varphi \right.$$
$$\left. + (-1)^n A \right] \qquad (17)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^m \sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n \left[\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^{r+1} \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1} - s_r}{\varrho^{r+1}} \sin(r+1)\varphi \right.$$
$$\left. + (-1)^n B \right] \qquad (18)$$

$$|\varrho| \leqq 1$$

Für $\varrho = 2\cos\varphi$

ist $\Delta = 1, \quad \lg \Delta = 0, \quad \Theta = -2\varphi$

daher

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m \cos^m\varphi \,.\, \cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1} - s_r}{2^{r+1}} \,.$$
$$. \frac{\cos(r+1)\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} + (-1)^n \frac{\varphi}{2^{n-1}} \frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi} \Big] \qquad (19)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m \cos^m\varphi \,.\, \sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n \left[\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^{r+1} \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1} - s_r}{2^{r+1}} \,. \right.$$
$$\left. . \frac{\sin \overline{r+1}\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi}{2^{n-1}} \frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi} \right] \qquad (20)$$

Die Differentiation der Gleichungen (19) und (20) ergiebt, da

$$D\cos^m\varphi \cdot \cos m\varphi = -m\cos^{m+1}\varphi \,.\, \sin \overline{m+1}\varphi \,.\, \sec^2\varphi$$

$$D\cos^m\varphi \,.\, \sin m\varphi = m\cos^{m+1}\varphi \,.\, \cos \overline{m+1}\varphi \,.\, \sec^2\varphi$$

ferner

$$D \frac{\cos \overline{r+1}\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} = -\overline{r+1} \frac{\sin r\varphi}{\cos^r\varphi} \sec^2\varphi$$

$$D \frac{\sin \overline{r+1}\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} = \overline{r+1} \frac{\cos r\varphi}{\cos^r\varphi} \sec^2\varphi$$

nach Division durch $\sec^2\varphi$ und n noch

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} \frac{m-1}{m} \frac{\cos^m\varphi \, . \cos m\varphi}{\binom{m+n-1}{m}} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\varphi \frac{\cos \overline{n-1}\, \varphi}{\cos^{n-1}\varphi} + \frac{1}{n} \frac{\sin n\varphi}{\cos^{n-2}\varphi} \right)$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \frac{r+1}{2^r+1} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \frac{\sin r\varphi}{\cos^r\varphi} \tag{19'}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} 2^{m-1} \frac{m-1}{m} \frac{\cos^m\varphi \, . \sin m p}{\binom{m+n-1}{m}} =$$

$$\frac{(-1^{n}}{2^{n-1}} \left(\varphi \frac{\sin \overline{n-1}\, \varphi}{\cos^{n-1}\varphi} - \frac{1}{n} \frac{\cos n\varphi}{\cos^{n-2}\varphi} \right)$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \frac{r+1}{2^r+1} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \frac{\cos r\varphi}{\cos^r\varphi} \tag{20'}$$

Weitere Differentiationen führen zu Formeln, welche von (19) und (20) nicht wesentlich verschieden sind.

Aus

$$| \varrho | = | 2 \cos\varphi | \leqq 1$$

folgt

$$| \cos\varphi | \leqq \tfrac{1}{2}$$

als Convergenzbedingung.

Die Annahme

$$\varphi + \Theta = \frac{k\pi}{n}$$

wo k eine durch n nicht teilbare Zahl vorstellt, hat das Verschwinden des zweiten Teiles von Δ zur Folge; es ist hiefür

$$\varrho = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}}$$

und

$$\Delta = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}$$

mithin

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}} \right]^m =$$

$$= n \left\{ \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \left[\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)} \right]^{r+1} \cos(r+1)\varphi \right.$$

$$\left. + (-1)^{k+n} \sin \frac{k\pi}{n} \frac{\sin^{n-1}\varphi}{\sin^n\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)} \lg \frac{\sin\varphi}{\sin \frac{k\pi}{n}} \right\} \tag{21}$$

Hieraus ergiebt sich die neue Entwicklung

$$\lg \frac{\sin\varphi}{\sin\frac{k\pi}{n}} = (-1)^{k+n} \frac{\sin^n\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{n} \sin^{n-1}\varphi} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_0^{\infty}{}' \frac{\cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} \left[\frac{\sin\left(\frac{h\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}} \right]^m \right.$$

$$\left. - \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \left[\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)} \right]^{r+1} \cos(r+1)\varphi \right\} \tag{22}$$

convergent für

$$\left| \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right) \right| < \left| \sin\frac{k\pi}{n} \right|$$

wobei die ganzen Zalen k und n so zu wählen sind, dass $\sin\frac{k\pi}{n}$ das gleiche Zeichen wie $\sin\varphi$ erhält.

In gleicher Weise kann durch die Annahme

$$\varphi + \Theta = \frac{k\pi}{2n}$$

wo k relativ prim zu $2n$ ist, der vom Logarithmus freie Teil von (B) in (16) zum Verschwinden gebracht werden.

Hiefür ist

$$\varrho = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{2n}}$$

und

$$\varDelta = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}$$

somit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{2n}}\right]^m =$$

$$n\left\{\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{r+1}\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}-\varphi\right)}\right]^{r+1}\sin(r+1)\varphi\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+\frac{k+1}{2}}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\sin^{n-1}\varphi}{\sin^n\left(\frac{k\pi}{2n}-\varphi\right)}\lg\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{k\pi}{2n}}\right\} \tag{23}$$

woraus wieder folgt

$$\lg\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = (-1)^{n+\frac{k+1}{2}}\frac{\sin^n\left(\frac{k\pi}{2n}-\varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{2n}\,.\,\sin^{n-1}\varphi}\times$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}-\varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{2n}}\right]^m\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}-\varphi\right)}\right]^{r+1}\sin(r+1)\varphi\right\} \tag{24}$$

$$\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2n}-\varphi\right)\right| < \left|\sin\frac{k\pi}{2n}\right|$$

$\sin\frac{k\pi}{2n}$ mit $\sin\varphi$ gleich bezeichnet.

Diese neuen Entwicklungen (23) und (24) werden um so rascher convergiren, je weniger φ von $\frac{k\pi}{n}$ resp. $\frac{k\pi}{2n}$ verschieden ist, und je grösser n gewählt wird.

Für $n=2$ reducirt sich die rechtsstehende endliche Reihe in (22) auf ein einziges Glied; wird noch $k=1$ genommen, so ist

$$\log\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\left[3+\sum_1^{\infty}\frac{1}{\binom{m+2}{m}}\cos m\varphi\,.\,\cos^m\varphi\right] \tag{25}$$

Für dieselben Werte ergiebt sich aus (24)

$$\lg \operatorname{cosec} \varphi = \tfrac{1}{2}\lg 2 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$$

$$+ \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\sqrt{2}\sin\varphi} \sum_0^\infty \frac{2^{\frac{m}{2}}}{\binom{m+2}{m}} \sin m\varphi \,.\, \sin^m\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) \tag{26}$$

3. Wenn

$$\alpha^h = e^{i\frac{2h\pi}{p}}$$

also eine Einheitswurzel ist, so hat man

$$\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p} f(x\alpha^h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{mp}}{\binom{mp+n}{mp}}$$

Zur Auswertung ersterer Summe dient die Formel (Θ) und zwar ist

$$\varrho = x, \quad \varphi = \frac{2h\pi}{p}$$

zu setzen; das Ergebniss ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mp}}{\binom{mp+n}{mp}} = \frac{n}{p}\left[(-1)^p\binom{n-1}{p}\frac{s_{n-1}-s_p}{x^{p+1}}\right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{2p}\frac{s_{n-1}-s_{2p}}{x^{2p+1}} \ldots + (-1)^n \sum_{h=1}^{p} A\right] \tag{27}$$

In dem Falle als $p > n-2$ ist, bleibt rechter Hand nur die Summe ΣA stehen, es ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mp+n}}{\binom{mp+n}{mp}} = (-1)^n \frac{n}{p}\sum_{h=1}^{p} \Delta^{\frac{n-1}{2}} [\tfrac{1}{2}\cos n(\varphi+\Theta) \,.\, \lg\Delta$$

$$- \Theta \sin n(\varphi+\Theta)] \tag{28}$$

$$\varphi = \frac{2h\pi}{p}$$

Für $p = n$ ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\left(\frac{mn}{(m-1)n}\right)} = (-1)^n \sum_{h-1}^{n} \Delta^{\frac{n-1}{2}} [\tfrac{1}{2}\cos\Theta \,.\, \lg\Delta - \Theta \,.\, \sin\Theta]$$

ferner

$$\cos\Theta = \cos \operatorname{arctg} \frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi} = \frac{1-x\cos\varphi}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\sin\Theta = \sin \operatorname{arctg} \frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi} = \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{\Delta}}$$

daher

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\binom{mn}{(m-1)n}} = (-1)^n \sum_{h=}^{n} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left[\tfrac{1}{2}(1-x\cos\varphi)\lg\Delta - x\Theta\sin\varphi\right]$$

nun ist

$$\cos 2\frac{n-h}{n}\pi = \cos\frac{2h\pi}{n}$$

$$\sin 2\frac{n-h}{n}\pi = -\sin\frac{2h\pi}{n}$$

somit bei **geradem** n

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\binom{mn}{(m-1)n}} = (-1)^n \left\{ \sum_{h=1}^{\frac{n-2}{2}} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left[\left(1-x\cos\frac{2h\pi}{n}\right)\log\Delta \right.\right.$$

$$\left.\left. -2x\Theta\sin\frac{2h\pi}{n}\right] + (1-x)^{n-1}\lg(1-x) + (1+x)^{n-1}\lg(1+x)\right\} \qquad (29)$$

und bei **ungeradem** n

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\binom{(m-1)n}{mn}} = (-1)^n \left\{ \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left[\left(1-x\cos\frac{2h\pi}{n}\right)\lg\Delta \right.\right.$$

$$\left.\left. -2x\Theta\sin\frac{2h\pi}{n}\right] + (1-x)^{n-1}\log(1-x)\right\} \qquad (29')$$

$$-1 \leqq x < 1$$

Bezeichnet $f(x, n)$ die Function $f(x)$ mit der Constanten n, so lassen sich Beziehungen zwischen den Functionen, welche $n = 1, 2, \ldots n$ entsprechen, ableiten.

Eine Relation ergiebt sich sofort mit Benutzung einer Eigenschaft höherer Integrale.

Bekanntlich lässt sich das n-fache Integral

$$\iint \ldots (f(x)\,dx \text{ abkürzungsweise } \int^{n} f(x)\,dx$$

geschrieben, mit Hilfe wiederholter Anwendung der „teilweisen Integration" durch einfache Integrale von der Form

$$\int x^m f(x)\,dx, \quad m = 0, 1, 2 \ldots n-1$$

ausdrücken, und zwar ist

$$n! \int^{n} = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} x^{n-m-1} \int x^m f(x)\,dx \tag{30}$$

was sich leicht mittelst Specialisirung von $f(x)$ prüfen lässt.

Umgekehrt lässt sich jedes einfache Integral der Form

$$\int x^n f(x)\,dx$$

durch höhere Integrale darstellen; man findet

$$\int x f dx = x \int - \int^{2}$$

$$\int x^2 f dx = x^2 \int - 2x \int^{2} + 2! \int^{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int x^n f dx = x^n \int + a_1 x^{n-1} \int^{2} + a_2 x^{n-2} \int^{3} + \ldots + a^n \int^{n+1}$$

Beiderseits differentiirt ergiebt

$$x^n f = x^n f + (a_1 + n) x^{n-1} \int + (\overline{n-1}\, a_1 + a_2) x^{n-2} \int^{2} + \ldots$$

$$\ldots + (a_{n-1} + n_n) \int^{n}$$

was nur möglich ist, wenn jedes Glied verschwindet, welcher Umstand zur Kenntniss der Coefficienten führt: es ist

$$a_1 = -n$$

$$a_2 = -\overline{n-1}\, a_1 = n\, \overline{n-1}$$

$$a_3 = -\overline{n-2}\, a_2 = -n\, \overline{n-1}\; \overline{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_r = (-1)^r n\, \overline{n-1} \ldots \overline{n-r+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = -a_{n-1} = (-1)^n n!$$

folglich

$$\int x^n f\,dx = \sum_{r=0} (-1)^r r! \binom{n}{r} x^{n-r} \int^{r+1} \tag{31}$$

eine Formel, welche sich mittelst des bekannten Ausdruckes für

$$\int x^n e^x\,dx$$

leicht prüfen lässt.

Nun ist nach (4)

$$\int_0^{x} {}^{n} \frac{\partial x^n}{1-x} = \frac{x^n}{n!} f(x, n)$$

daher das allgemeine Glied obiger Summe

$$= (-1)^r \frac{1}{r+1} \binom{n}{r} x^{n+1} f(x, r+1)$$

Für das linksseitige Integral in (31) erhält man, wenn 0 und x als Grenzen gewählt und

$$f = \frac{1}{1-x}$$

gesetzt wird:

$$\lg \frac{1}{1-x} - \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)$$

Die verlangte Beziehung ist daher

$$x^{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} f(x, r) = \lg \frac{1}{1-x} - \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right) \tag{32}$$

welcher man auch die Form geben kann

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} f(x, r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{n+s+1} \tag{32'}$$

$$-1 \leqq x < 1$$

Für $x = -1$ ist

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} f(-1, r) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - \lg 2 \tag{33}$$

Bildet man die Gleichung (22) für $n-1$, zieht sie von (22) ab und dividirt durch x^n, so kommt

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\left[\binom{n}{r-1}x-\binom{n-1}{r-1}\right]f(x,r)$$
$$+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}xf(x,n+1)=-\frac{1}{n}$$

oder

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\left(x+\frac{r-1}{n}-1\right)f(x,r)$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{x}{n+1}f(x,n+1)=\frac{1}{n} \tag{34}$$

Bringt man in der Gl. (32) x^{n+1} auf die rechte Seite, ersetzt x wieder durch $\varrho e^{i\varphi}$, so geht hervor:

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varrho^m\cos m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$\frac{1}{\varrho^{n+1}}(\Theta\sin\overline{n+1}\,\varphi-\lg\varDelta\,.\,\cos\overline{n+1}\,\varphi)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\cos r\varphi}{(n-r+1)\varrho^r} \tag{35}$$

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varrho^m\sin m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$\frac{1}{\varrho^{n+1}}(\Theta\cos\overline{n+1}\,\varphi+\lg\varDelta\,.\,\sin\overline{n+1}\,\varphi)+\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin r\varphi}{(n-r+1)\varrho^r} \tag{36}$$

$$|\varrho|<1$$

Die Substitution

$$\varrho=2\cos\varphi$$

ergiebt wegen $\varDelta=1$, $\Theta=-2\varphi$

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{0}^{\infty}\frac{2^m\cos^m\varphi\,.\,\cos m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$-\frac{\varphi\sin(n+1)\varphi}{2^n\cos^{n+1}\varphi}-\sum_{r=1}^{n}\frac{\cos r\varphi}{(n-r+1)\,2^r\cos^r\varphi} \tag{37}$$

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{0}^{\infty}\frac{2^m\cos^m\varphi\,.\,\sin m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$-\frac{\varphi\cos(n+1)\varphi}{2^n\cos^{n+1}\varphi}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin r\varphi}{(n-r+1)\,2^r\cos r\varphi} \tag{38}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergiebt noch

$$\sum_{r=1}^{n+1}\frac{(-1)^r}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=0}^{\infty} m\,2^m \frac{\cos^{m+1}\varphi\,.\,\sin\overline{m+1}\,\varphi}{\binom{m+r}{m}} =$$

$$-\frac{n+1}{2^n}\,\varphi\,\frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}-\frac{\sin\overline{n+1}\,\varphi}{2^n\cos^{n-1}\varphi}+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{r+1}{n-r}\,\frac{\sin r\varphi}{\cos^r\varphi} \qquad (37')$$

$$\sum_{r=1}^{n+1}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=0}^{\infty} m\,2^m \frac{\cos^{m+1}\varphi\,.\,\cos\overline{m+1}\,\varphi}{\binom{m+r}{m}} =$$

$$\frac{n+1}{2^n}\,\varphi\,\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi}-\frac{\cos\overline{n+1}\,\varphi}{2^n\cos^{n-1}\varphi}+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{r+1}{n-r}\,\frac{\cos r\varphi}{\cos^r\varphi} \qquad (38')$$

Eine nochmalige Differentiation führt zu Formeln, welche von (37) und (38) nur formell verschieden sind.

Die Annahme

$$\varrho\sin\varphi = 1-\varrho\cos\varphi$$

ergiebt

$$\varrho=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}$$

$$\Theta=\frac{\pi}{4},\qquad \varDelta=\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}\right]^2$$

Aus (35) und (36) entsteht demzufolge

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos m\varphi}{2^{\frac{m}{2}}\binom{m+r}{m}\sin^m\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}=$$

$$2^{\frac{n+1}{2}}\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\left[\frac{\pi}{4}\sin(n+1)\varphi-2\lg\frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}\,.\right.$$

$$\left.\,.\cos(n+1)\varphi\right]-\sum_{r=1}^{n}\frac{2^{\frac{r}{2}}\sin^r\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{n-r+1}\cos r\varphi \qquad (39)$$

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{2^{\frac{m}{2}} \binom{m+r}{m} \sin^m \left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)} =$$

$$= 2^{\frac{n+1}{2}} \sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) \left[\frac{\pi}{4} \sin(n+1)\varphi + 2 \lg \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)} \right.\,.$$

$$\left. .\, \sin(n+1)\varphi\right] + \sum_{r=1}^{n} \frac{2^{\frac{r}{2}} \sin^r\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{(n-r+1)} \sin^r \varphi \tag{40}$$

Aus obiger Annahme fliesst die Convergenzbedingung

$$|\sin\varphi + \cos\varphi| > 1 \quad \text{oder} \quad \sin\frac{\pi}{4} < \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$$

die für

$$0 < \varphi < \tfrac{3}{8}\pi,$$

allgemein für

$$2k\pi < \varphi < (2k + \tfrac{3}{8})\pi$$

erfüllt wird.

Der Logarithmus kann hier daher nicht zum Verschwinden gebracht werden, weil die Werte

$$\varphi = (2k + \tfrac{3}{8})\pi$$

unzulässig sind.

Setzt man in derselben Gleichung (32)

$$x = ke^v$$

differentiirt p mal und lässt v verschwinden, so entsteht wegen

$$D_v^p \frac{1}{x^{n+1}} \lg \frac{1}{1-x} = -D_v^p \left[\frac{1}{k^{n+1}} \lg(1-k) e^{-(n+1)v}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^{n+1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \left(\frac{k}{1-k}\right)^r (1-e^v)^r e^{-(n+1)v}\right]_{v=0}$$

$$= (-1)^{p+1} \frac{(n+1)^p}{k^{n+1}} \log(1-k) + \frac{1}{k^{n+1}} \sum_{r=1}^{p} \frac{(-1)^r}{r} \left(\frac{k}{1-k}\right)^r M_p^r$$

wo

$$M_p^r = D_v^p (1-e^v)^r e^{-(n+1)v} = (-1)^p \sum_{s=1}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} (n-s+1)^p$$

ist, die Relation

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m m^p}{\binom{m+r}{m}} =$$

$$(-1)^{p+1} \left[\frac{(n+1)^p}{k^{n+1}} \lg(1-k) + \sum_{s=1}^{n} \frac{s^p}{(n-s+1) k^s}\right]$$

$$+ \frac{1}{k^{n+1}} \sum_{r=1}^{p} \frac{(-1)^r}{r} \left(\frac{k}{1-k}\right)^r M_p^r \tag{41}$$

Geht man von der Gleichung (32') aus, so führt dasselbe Verfahren zu

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m m^p}{\binom{m+r}{m}} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k^s s^p}{n+s+1} \tag{41}$$

$$-1 \leqq k < 1$$

Bezüglich der in (19), (20), (37), (38) und den davon abgeleiteten Formeln summirten unendlichen Reihen muss schliesslich noch bemerkt werden, dass derartige Entwickelungen von Herrn Dr. O. Schlömilch in dem Aufsatze „Ueber eine besondere Gattung von Reihen" (Zeitschrift f. Math. u. Phys. I. Jahrg.) untersucht und die Bedingungen angegeben wurden, unter welchen eine gegebene Function auf diese Weise entwickelt werden, nicht aber ob, falls dies wirklich möglich ist, es nur auf eine einzige oder auf mehrere Arten geschehen kann.

Diese Frage wird durch die Erbringung des Nachweises der Existenz resp. Nicht-Existenz linearer Relationen zwischen den Functionen, nach welchen entwickelt werden soll, gelöst.

Für die Functionen

$$\cos^n \varphi \,.\, \cos n\varphi \quad \text{bzhw.} \quad \cos^n \varphi \,.\, \sin n\varphi$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.}$$

lassen sich nun Systeme **unendlich** vieler linearer Verknüpfungen angeben.

Es ist

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{r-n} x^r, \quad x^2 < 1$$

woraus für $x = \varrho e^{i\varphi}$

$$\left(\frac{\varrho e^{i\varphi}}{1-\varrho e^{i\varphi}}\right)^n = \sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}\varrho^r \cos r\varphi + i\sum_{r=r}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}\varrho^r \sin r\varphi$$

aber auch

$$= \left(\varrho\frac{\cos\varphi-\varrho}{\varDelta} + i\frac{\varrho\sin\varphi}{\varDelta}\right)^n, \qquad \varDelta = 1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2$$

Nach Ausführung dieser Operation zeigt es sich, dass bei **geradem** n im **reellen**, und bei **ungeradem** n im **imaginären** Teile kein von $\cos\varphi - \varrho$ freies Glied vorkommt.

Wird nun $\varrho = \cos(\varphi > m\pi)(m = 0, 1, 2 \ldots)$ genommen, so ergiebt sich:

$$\sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}\cos^r\varphi \,.\, \sin r\varphi = 0 \qquad n = 0, 2, 4, 6 \ldots \tag{42}$$

$$\sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}\cos^r\varphi \,.\, \cos r\varphi = 0 \qquad n = 1, 3, 5 \ldots \tag{43}$$

Ein zweites System findet sich aus

$$[\lg(1-\varrho e^{i\varphi})]^n = (-1)^n n!\left[\sum_{r=n}^{\infty}\frac{1}{r!}\overset{r}{C}_{r-n}\varrho^r\cos r\varphi\right.$$

$$\left.+ i\sum_{r=n}^{\infty}\frac{1}{r!}\overset{r}{C}_{r-n}\varrho^r\sin r\varphi\right] = (\tfrac{1}{2}\lg\varDelta - i\Theta)^n; \quad \Theta = \frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}$$

Nach der Entwicklung stellt es sich heraus, dass bei **geradem** n im **reellen**, und bei **ungeradem** im **imaginären** Teile kein von $\lg\varDelta$ freies Glied auftritt;

$\varrho = 2\cos\varphi$ gesetzt ergiebt $\lg\varDelta = 0$

daher gilt

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{2^{r-n}}{r!} \overset{r}{C}_{r-n} \cos^r\varphi \,.\, \sin r\varphi = 0, \qquad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{44}$$

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{2^{r-n}}{r!} \overset{r}{C}_{r-n} \cos^r\varphi \,.\, \cos r\varphi = 0, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{45}$$

$$(\varphi > m\pi)$$

Beliebig viele weitere Systeme entstehen noch in analoger Weise aus den höheren Integralen von $(1-x)^{-1}$; dieselben sind jedoch nicht unabhängig von einander, lassen sich vielmehr alle aus dem erst gefundenen Systeme ableiten.

Jede der unendlich vielen Gleichungen desselben kann mit einer ganz willkürlichen Zal multiplicirt und zu den gefundenen Entwicklungen addirt werden.

Es lässt sich daher der Satz aussprechen:

„Wenn eine Entwicklung einer gegebenen Function nach

$$\cos^r\varphi \,.\, \cos r\varphi$$

„oder nach

$$\cos^r\varphi \,.\, \sin r\varphi (r = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

„besteht, so giebt es unendlich viele derartige von einander verschiedene aber gleichwertige Entwicklungen."

Eine Anwendung des „Satzes der unbestimmten Coefficienten" ist hiemit ausgeschlossen.

Während zwischen diesen Functionen in endlicher Anzal keinerlei lineare Beziehungen bestehen, gelten für die in den rechtsstehenden Ausdrücken in (19), (20) etc. vorkommenden Functionen

$$P_n = \frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi}, \quad Q_n = \frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}$$

die Relationen

$$P_n - \binom{n}{1} P_{n-1} + \binom{n}{2} P_{n-2} \ldots - \binom{n}{n-1} P_1 = 0, \quad n \text{ gerade} \tag{46}$$

$$Q_n - \binom{n}{1} Q_{n-1} + \binom{n}{2} Q_{n-2} \ldots - 1 = 0, \quad n \text{ ungerade} \tag{47}$$

welche, wenn sie für n, $n-2$, $n-1$ . . . gebildet werden, zu zwei Systemen von $\frac{n}{2}$, resp. $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen führen. Hieraus folgt, dass $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n+1}{2}$ Coeff. der P resp. Q in obgenannten Ausdrücken jedmöglicher Wert beigelegt werden kann. Diese Wandelbarkeit entfällt, wenn der die Grössen $s_{n-1}-s_r$ enthaltende Teil der Ausdrücke mit Hilfe der Systeme so transformirt wird, dass in denselben entweder nur gerade oder nur ungerade P resp. Q erscheinen. Wegen der sehr complicirten Beschaffenheit der sich hiebei ergebenden Coefficienten dürften jedoch die ursprünglichen Formen in (19), (20) etc. bei numerischen Berechnungen vorzuziehen sein.

XXI.

Miscellen.

1.

Zur Durchdringung der Kugel mit dem geraden Kreiskegel, Satz über das Kegelschnittbüschel und die Parabel.

Herr Wiener führt in seinem grossen Werke: „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" Leipzig 1887, 2. Band. Seite 256 den Satz an, dass wenn zwei Flächen zweiter Ordnung eine Hauptebene gemeinschaftlich haben, die orthogonale Projection ihrer Schnittcurve auf diese ein Kegelschnitt ist. Auf die Natur des Kegelschnittes, insbesondere in für das technische Zeichnen wichtigen Fällen, wird weiter nicht eingegangen, und so soll im Folgenden dieser Kegelschnitt für die Kugel und den geraden Kreiskegel betrachtet und daraus einige Folgerungen gezogen werden.

Die diesen beiden Flächen gemeinschaftliche Hauptebene ist offenbar jene Ebene, welche man durch den Mittelpunkt M der Kugel Fig. 1. und die Achse SN des Kegels legen kann. Diese Ebene schneidet den Kegel in den Erzeugenden SA und SB, deren Winkel ASB durch SN halbirt wird, und die Kugel in dem Kreise K. Sollen sich die beiden Flächen in einer reellen Curve schneiden, so muss wenigstens eine dieser Erzeugenden von dem Kreise K geschnitten werden, und die orthogonale Projection dieser Curve auf die Hauptebene ist eine Parabel, deren Scheiteltangente die Chordale des grössten Kugelkreises K mit jenem Kreise ist, der die beiden Erzeugenden berührt und dessen Mittelpunkt der Fusspunkt O des vom Kugelmittelpunkte auf die Achse des Kegels gefällten Perpendikels ist.

Beweis. Um irgend einen Punkt P' der Projection der obigen Curve zu erhalten, lege man eine Ebene senkrecht zu SN, welche

in der Figur 1. als die Gerade CD erscheint. Diese schneidet die Kugel nach einem Kreise K', welcher in der Figur umgelegt als Halbkreis gezeichnet wurde. Ebenso wurde der Kreis k, nach welchem die Ebene den Kegel schneidet, behandelt. Die beiden Halbkreise K' und k schneiden sich in P, und zieht man durch P eine Senkrechte auf MO, so schneidet diese CD in P'.

Wählt man nun OS zur Ordinaten-, OE zur Abscissenachse, bezeichnet man OQ mit x, QP' mit y, den Kugelhalbmesser mit R, MO mit a, den des Kegelkreises vom Mittelpunkt O mit r, OS mit h, verbindet man ferner O' mit P, so ist im rechtwinkeligen Dreieck $O'PP'$

$$x^2 + \overline{PP'}^2 = \overline{O'P}^2 \qquad 1)$$

Weil aber $O'C \parallel OE$ und $O'C = O'P$, so findet die Projection statt

$$(h - y) : h = O'P : r$$

und daraus

$$O'P = \frac{r(h-y)}{h}$$

und endlich mittelst 1)

$$x^2 + \overline{PP_1}^2 = \frac{r^2(h-y)^2}{h^2} \qquad 2)$$

Verbindet man M' mit P, so ist im rechtwinkeligen Dreieck $M'PP'$

$$\overline{PP'}^2 = \overline{M'P}^2 - (x+a)^2$$

daher mittelst 2)

$$\overline{M'P}^2 - 2ax - a^2 = \frac{r^2(h-y)^2}{h^2} \qquad 3)$$

Endlich ist im $\triangle DMM'$

$$\overline{M'D}^2 = \overline{M'P}^2 = R^2 - y^2$$

daher mittelst 3)

$$R^2 - y^2 - 2ax - a^2 = \frac{r^2(h-y)^2}{h^2}$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, in ihr x^2 und xy fehlen, so ist die durch dieselbe dargestellte Curve eine Parabel, deren Achse parallel zur Abscissenachse liegt. Will man aus der Gleichung die Abscisse m, die Ordinate n des Scheitels und den Parameter $2p$ erkennen, so muss man sie auf die Form bringen:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$

worauf sie lautet

$$\left(y-\frac{hr^2}{h^2+r^2}\right)^2=-\frac{2ah^2}{h^2+r^2}\left[x-\frac{R^2(h^2+r^2)-a^2(h^2+r^2)-h^2r^2}{2a(h^2+r^2)}\right]$$

Die Abscisse des Scheitels kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{R^2-a^2-\frac{h^2r^2}{h^2+r^2}}{2a} \qquad 4)$$

Zieht man von O auf SB die Senkrechte OF, so ist $\triangle OFS \backsim OSC$ daher

$$OF:r=h:\sqrt{h^2+r^2}$$

$$OF=\frac{rh}{\sqrt{h^2+r^2}},$$

weshalb 4) auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{R^2-a^2-\overline{OF}^2}{2a}$$

woraus zu ersehen ist, dass die Scheiteltangente die Chordale zweier Kreise von der Centrallinie a und den Halbmessern R und OF ist, w. z. b. w.

Sind 1, 2, 3 und 4 die Schnittpunkte der Kegelerzeugenden mit dem grössten Kugelkreise K, und schneiden sich die Verbindungslinien 12 und 34 in S', so kann man auch S_1' und S_4' als Erzeugende eines zweiten Kegels betrachten, und es tritt demnach noch eine zweite Parabel auf, die durch die nämlichen vier Punkte hindurchgeht, und deren Scheiteltangente wieder die Chordale von K und jenem Kreise ist, der die Geraden S_1' und S_4' berührt, und dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des von M auf die Halbirungslinie des Winkels $1S_4'$ gefällten Perpendikels ist. Da ferner bekanntlich im Sehnenvierecke die Halbirungslinien der Winkel der Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, so ergibt sich der Satz:

„Lässt sich durch die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels ein Kreis (Basiskreis) legen, so stehen die Scheiteltangenten der beiden Parabeln des Büschels auf einander senkrecht und sind die Chordalen des Basiskreises mit jenen zwei Kreisen, die die Gegenseiten des Kreisviereckes berühren, und deren Mittelpunkte in den durch den Mittelpunkt des Basiskreises zu den Halbirungslinien der Winkel der Gegenseiten gezogenen Parallelen gelegen sind."

Besonders einfach gestaltet sich das Gezeigte für den geraden Kreiscylinder, welcher entsteht, wenn h unendlich gross wird. Dann ist

$$n = \frac{hr^2}{h^2 + r^2} = \frac{r^2}{h + \frac{r^2}{h}} = 0$$

d. h. die vom Mittelpunkt der Kugel auf die Achse des Cylinders gefällte Senkrechte ist die Achse der Parabel.

$$m = \frac{R^2 - a^2 - \frac{r^2}{1 + \frac{r^2}{h^2}}}{2a} = \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2a}$$

d. h. die Scheiteltangente der Parabel ist die Chordale jener zwei Kreise, nach welchen beide Flächen durch eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende zur Achse des Cylinders senkrechte Ebene geschnitten werden, wenn hierauf diese Ebene in die Hauptebene umgelegt wird.

Ferner ist

$$2p = -\frac{2ah^2}{h^2 + r^2} = -\frac{2a}{1 + \frac{r^2}{h^2}} = -2a$$

d. h. der Brennpunkt der Parabel ist von der Leitlinie ebenso weit entfernt, als der Mittelpunkt der Kugel von der Cylinderachse.

Da die Halbirungslinie der Sehne 12 durch den Mittelpunkt M der Kugel gehen muss, so folgt sofort der Parabelsatz:

„Die Halbirungslinie einer Parabelsehne und die vom Mittelpunkt der letzteren auf die Achse gefällte Senkrechte bestimmen auf der Achse eine Strecke, welche gleich ist der Entfernung (p) des Brennpunktes von der Leitlinie“.

Anmerkung 1). Dieser Satz lässt sich leicht analytisch beweisen Die Gerade $y = ax + b$ schneidet die Parabel $y^2 = 2px$ in den Punkten

$$\frac{p - ab - \sqrt{p(p - 2ab)}}{a^2}, \quad \frac{p - \sqrt{p(p - 2ab)}}{a}$$

$$\frac{p - ab + \sqrt{p(p - 2ab)}}{a^2}, \quad \frac{p + \sqrt{p(p - 2ab)}}{a}$$

Der Mittelpunkt der durch die Schnittpunkte bestimmten Sehne hat daher die Abscisse $\frac{p - ab}{a^2}$ und die Ordinate $\frac{p}{a}$. Die Gleichung der Halbirungslinie der Sehne lautet demnach:

$$y - \frac{p}{a} = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{p - ab}{a^2}\right)$$

und ihr Abschnitt auf der Abscissenachse beträgt

$$\frac{p - ab}{a^2} + p$$

daher die Strecke zwischen ihrem Schnittpunkt und dem Fusspunkt der Ordinate des Mittelpunktes p, w. z. b. w.

Anmerkung 2). Der Satz von der constanten Subnormale der Parabel ist nur ein besonderer Fall dieses Satzes.

Nun ergibt sich eine sehr einfache Construction der Parabel, wenn die Achse und zwei Punkte derselben gegeben sind.

Man halbire die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 bestimmte Parabelsehne, fälle vom Mittelpunkte M derselben eine Senkrechte auf die Parabelachse, deren Fusspunkt N sei. Errichtet man ferner in M eine Senkrechte auf die Sehne, so schneidet diese die Achse in O, und es ist hierauf $ON = p$ und der Parameter der Parabel $2ON$.

Hierauf fälle man von P_1 eine Senkrechte auf die Achse, deren Fusspunkt Q_1 sei, und trage von Q_1 auf der Achse in der Richtung NO letztere Strecke zweimal auf, wodurch man den Punkt R erhält. Verbindet man R mit P_1 und errichtet auf diesen Verbindungslinie in P_1 eine Senkrechte, so schneidet diese die Achse im Scheitel A der Parabel, denn die Ordinate ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Abscisse AQ und dem Parameter QR. Trägt man hierauf die Hälfte von NO beiderseits von A auf der Achse auf, so erhält man den Brennpunkt und die Leitlinie der Parabel.

Auch ergibt sich eine einfache directe Construction der Achse der Parabel, wenn die Richtung R der Achse derselben (Fig. 2) und drei Punkte P_1, P_2 und P_3 gegeben sind.

Man bestimme die Mitten M_1 und M_2 der Parabelsehnen P_1P_2 und P_2P_3. Von diesen Punkten aus fälle man die Senkrechten 1 und 2 auf R. Ferner errichte man in denselben die Senkrechten 3 und 4 auf die Parabelsehnen.

Die Achse der Parabel x muss hierauf so gefunden werden, dass wenn dieselbe 1 in g, 3 in f, 2 in e und 4 in d schneidet, $gf = ed$ ist. Um dies zu erreichen ziehe man durch M_1 die Parallele 5 zu 4, ferner eine Senkrechte zu R, die 3 in a und 5 in b schneidet, ferner durch a eine Parallele zu R und durch b eine Parallele zu

$M_1 M_2$. Die zuletzt gezogenen Geraden schneiden sich im Punkte c, dessen Verbindungslinie mit M_1 die Gerade 4 in d trifft, durch welchen Punkt die Achse der Parabel hindurchgehen muss, was man bewiesen haben wird, wenn man zeigt, dass $gf = ed$.

Zieht man durch f eine Senkrechte auf R, so schneidet diese 5 in h, und es ist $hd \parallel bc$, denn hfd und bac sind zwei perspectivische Dreiecke mit zwei Paar parallelen Seiten (hf und ab, fd und ac) daher muss auch das dritte Paar Seiten (hd und bc) parallel sein. Dann ist aber auch hd parallel $M_1 M_2$, demnach Viereck $M_1 M_2 d h$ ein Parallelogramm, daher

$$M_1 h = M_2 d \quad \text{und} \quad \triangle M_1 kh \cong M_2 ed$$

Daraus folgt, dass $ed = hk$, wenn k der Fusspunkt des von h auf 1 gefällten Perpendikels ist. Im Rechtecke $khfg$ ist aber

$$kh = gf, \quad \text{daher auch} \quad gf = ed \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wien, im Januar 1892.

Wilhelm Rulf.

2.

Geometrische Bestimmung der Tangente der Cassinischen Linie.

Die Cassinische Linie, die mitunter auch Cassinische Ellipse genannt wird, zeigt auch in Bezug auf die Tangentenconstruction eine gewisse Aehnlichkeit mit der Ellipse. Errichtet man nämlich in dem einen Brennpunkte der Ellipse auf dem zugehörigen Leitstrahl eine Senkrechte, verlängert man ferner den anderen Leitstrahl um den ersten und errichtet man in dem Endpunkte der Verlängerung auf diese eine Senkrechte, so schneiden sich beide Senkrechten in einem neuen Punkte der Tangente, deren Berührungspunkte die beiden Leitstrahlen angehören. Dieselbe Construction gilt auch, wie im folgenden recht einfach gezeigt werden soll, für die Cassinische Linie, nur darf der zweite Leitstrahl nicht um den ersten, sondern muss um sich selbst verlängert werden.

Beweis. Es sei Fig. 1. P ein Punkt der Cassinischen Linie, F_1 und F_2 die Brennpunkte derselben. Die Leitstrahlen dieses Punktes mögen mit r_1 und r_2 bezeichnet werden. Ist P' ein unendlich nahe an P gelegener Punkt der Curve, so ist die durch PP' gelegte Gerade die Tangente T in P. Denkt man sich von F_1 aus mit r_1 den Kreisbogen PA beschrieben, so ist $AP' = m$ die unendlich kleine

Zunahme des Leitstrahles r_1 beim Uebergang von P nach P'. Denkt man sich ferner von F_2 aus mit r_2 den Kreisbogen PB beschrieben, so ist $BP' = n$ die unendlich kleine Abnahme von r_2 beim Uebergang von P nach P'. Da aber P, P' Punkte derselben Cassinischen Linie sind, so muss

$$r_1 r_2 = (r_1 + m)(r_2 - n)$$

sein, woraus folgt

$$0 = m r_2 - n r_1 - m n$$

und wenn man mn als unendlich klein höherer Ordnung vernachlässigt,

$$n r_1 = m r_2$$

und endlich

$$r_1 : r_2 = m : n \qquad 1)$$

Die unendlich kleinen Kreisbögen PA und PB kann man aber als gerad und als senkrechtstehend auf den Leitstrahlen des Berührungspunktes P betrachten. Aber auch die Winkel PAP' und PBP' kann man als Rechte ansehen. Der unendlich nahe Punkt P' der Tangente hat also von den Senkrechten im Berührungspunkte P auf die Leitstrahlen Entfernungen, die sich nach 1) wie die Leitstrahlen verhalten. Was aber bezüglich des Verhältnisses der Entfernungen des unendlich nahen Tangentenpunktes gilt, gilt von einem jedem Punkte derselben, man wird daher einen Punkt D der Tangente gefunden haben, wenn man $F_1 P$ um $PC = r_1$ verlängert, und die Senkrechte in C auf $F_1 C$ zum Schnitt mit jener Senkrechten bringt, die man in F_2 auf $F_2 P$ errichtet, denn der Punkt D hat dann von PA die Entfernung r_1, von PB jene r_2.

Wien, im April 1892.

Wilhelm Rulf.

3.

Zur Zahlentheorie.

Die natürliche Zahlenreihe lässt sich in 2, 3, ... n arithmetische Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz n besteht, zerlegen. Diese Zerlegung ist dadurch leicht zu bewerkstelligen, dass man zunächst eine Verticalreihe mit den Zahlen 1 bis n bildet und dann eine zweite, dritte u. s. w. Verticalreihe mit den Zahlen $n+1$ bis $2n$, $2n+1$ bis $3n$ u. s. w. daneben stellt. Zwischen den Gliedern der Horizontalreihen besteht dann die Differenz n. — Beispielsweise gestaltet sich die Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe in 6 Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz 6 besteht, wie folgt:

1,	7,	13,	19,	25	
2,	8,	14,	20,	26	
3,	9,	15,	21,	27	
4,	10,	16,	22,	28	u. s. w.
5,	11,	17,	23,	29	
6,	12,	18,	24,	30	

Von diesen 6 Reihen enthält die 2., 4. und 6. nur gerade Zahlen, weil das Anfangsglied diesen Reihen ebenso wie die beständige Differenz eine gerade Zahl ist. Die 3. Reihe enthält nur Zahlen, die die durch 3 teilbar sind, weil das Anfangsglied dieser Reihe $= 3$ ist und weil die beständige Differenz 6 eine durch 3 teilbare Zahl ist. — In diesen 4 Reihen kann also keine einzige Primzahl vorkommen und es müssen deshalb notwendig alle Primzahlen in der 1. und 5. Reihe mit enthalten sein. Es muss aber auch notwendig jede Primzahl $> 3 \equiv \mp 1 \pmod 6$ sein, weil die beiden Reihen 1 und 5 nach Streichung der Zahl 1 nur Zahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten.

Will man nun alle Primzahlen > 3 in ununterbrochener Reihenfolge ermitteln, so braucht man nur die oben angegebenen Reihen 1 und 5, d. i. die Doppelreihe $6n \mp 1$ zu bilden und von den entstehenden Zahlen die durch die Primzahlen 7, 11 u. s. w und deren Potenzen teilbaren Zahlen zu streichen. Die dann zurückbleibenden Zahlen sind die Primzahlen > 3. Hierbei ist daran zu erinnern, dass man, um zu untersuchen, ob eine Zahl n eine Primzahl ist oder nicht, dieselbe nur mit den Primzahlen $< \sqrt{n}$ zu dividiren braucht. — Um festzustellen, welche Zahlen zu streichen sind, kann man also jede Zahl n der Doppelreihe $6n \mp 1$ auf die Teilbarkeit durch die Primzahlen $< \sqrt{n}$ prüfen. Man hat es aber leichter, wenn man die zu streichenden Zahlen durch Multiplication der schon bekannten und successive bekannt werdenden Primzahlen feststellt. Es kommen dabei dann immer nur diejenigen Vielfachen von $p = 7, 11$ u. s. w. und deren Potenzen in Betracht, deren Primzahlmultiplicatoren $\geqq p$ sind, da die niedriger liegenden Vielfachen des jeweiligen p immer schon als Vielfache der niedrigeren Primzahlen gestrichen sind. Die Berechnung der Vielfachen von $p = 7, 11$ u. s. w. und p^n wird nun sehr bequem, wenn man das Resultat einer vorhergehenden Rechnung stets bei der nachfolgenden mitbenutzt. So ist z. B. für

$p = 7$:		$p = 11$:	
$7 \cdot 7 =$	49	$11 \cdot 11 =$	121
$7 \cdot 11 = 49+28 =$	77	$11 \cdot 13 = 121+22 =$	143
$7 \cdot 13 = 77+14 =$	91	$11 \cdot 17 = 143+44 =$	187
u. s. w.		u. s. w.	

u. s. w.

Die Primzahlen 2, 3 und 5 kommen deshalb als Teiler nicht in Betracht, weil

1) die Zahl 2 eine gerade Zahl ist, und in der Reihe $6n \mp 1$ nur ungerade Zahlen vorkommen,

2) die Reihe $6n \mp 1$ keine durch 3 teilbaren Zahlen enthält,

3) die mit dem Teiler 5 behafteten Zahlen als mit 5 endigend bei der Bildung der Reihe $6n \mp 1$ gleich übersprungen werden können.

Für das Gebiet der Zahlen 1 bis 100 mag die Reihe $6n \mp 1$ hier folgen.

$$6n \mp 1 = \begin{matrix} 5, 11, 17, 23, 29, \;.\;, 41, 47, 53, 59, \;.\;, 71, 77, 83, 89, \;. \\ 7, 13, 19, \;.\;, 31, 37, 43, 49, \;.\;, 61, 67, 73, 79, \;.\;, 91, 97 \end{matrix}$$

Wo ein Punkt steht, ist eine mit 5 endigende Zahl ausgefallen. Zu streichen sind nur die mit dem Teiler 7 behafteten Zahlen 49, 77 und 91.

Oldenburg i. G.

G. Speckmann.

4.

Zur Cassinischen Linie.

Von einem Punkte der Cassinischen Linie ziehen wir zwei Fokallinien nach den Brennpunkten $\pm c$ und bezeichnen die Winkel, welche sie mit dem Radiusvector vom Mittelpunkt aus bilden, mit $\gamma_1 \gamma_2$.

Man findet leicht folgende Beziehung zwischen den genannten Grössen und dem Polarwinkel φ:

$$\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{R^2 - c^2 \cos 2\varphi}{\sqrt{R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4}}$$

Da aber die Gleichung der Curve

$$R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4 = q^4$$

ist, so gewinnt man einfacher

$$q^2\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = R^2 - c^2\cos 2\varphi$$

und ferner

$$\sin(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{c^2}{q^2}\sin 2\varphi$$

Es ist aber, wenn β den Winkel zwischen der Normale und R bezeichnet,

$$\sin\beta = \frac{c^2}{q^2}\sin 2\varphi$$

demnach

$$\beta = \gamma_1 - \gamma_2$$

Um also die Normale in einem Punkte der Curve zu construiren, trage man etwa γ_2 auf γ_1 ab, und man erhält damit in dem entsprechenden Schenkel des Winkels die gesuchte Normale. Damit ist die Tangentenconstruction ebenfalls gelöst.

Ferner: Legt man ein rechtwinkeliges Achsenkreuz durch den Mittelpunkt einer geschlossenen Cassinischen Curve, und durch deren Schnittpunkt Tangenten, so sind die Winkel derselben mit den Achsenteilen einander gleich.

Für Ovale existirt ein analoger Satz.

Dass die algebraische Summe der 4 Peripheriewinkel eines Bogens der Cassinischen Linie nach den Schnittpunkten des genannten Achsenkreuzes gleich null ist, haben wir schon früher bewiesen.

Emil Oekinghaus.

5.

Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien.

Die Tangente, Hauptnormale und Binormale der Raumcurven bilden ein bewegtes, den erzeugenden Punkt begleitendes orthogonales Axensystem, welches von französischen Mathematikern ganz passend das fundamentale genannt wird. Die Erweiterung seines Begriffs und seiner Darstellung auf mehrfach gekrümmte Linien in mehr als dreifacher Mannigfaltigkeit wird man schwerlich umgehen können, wenn man überhaupt solche Curven analytisch untersuchen will; sie sei unsere gegenwärtige Aufgabe.

Den Weg der Erweiterung des Begriffs zeigt die Hauptnormale, aufgefasst als das in der Schwingungsebene errichtete Lot auf der Tangente, während die Analogie der Binormale durch die Specialität verhüllt ist, dass der Schmiegungsraum mit der festen alles umfassenden Mannigfaltigkeit zusammenfällt. Analog der Tangente und Schmiegungsebene als in 1. und 2. Ordnung osculirende Gerade und Ebene definiren wir zuerst die osculirende m dehnung als finale lineare m dehnung der durch $m+1$ einander unendlich nahe Curvenpunkte bestimmten linearen m dehnung.

„Die $m$te Fundamentalaxe der Curve ist dann das innerhalb der osculirenden m dehnung im laufenden Curvenpunkte errichtete Lot auf der osculirenden $(m-1)$ dehnung. Die erste ist die Tangente."

Da hiernach das Lot auf allen in letzterer enthaltenen Geraden, somit auf allen vorhergehenden Fundamentalaxen senkrecht steht, so folgt, dass überhaupt alle Fundamentalaxen zu einander rechtwinklig sind.

Der laufende Curvenpunkt T sei nun Anfang der Coordinaten $\overset{k}{x}(k = 1, 2, \ldots n)$, wofür wir gewöhnlich kurz x schreiben, bezüglich auf ein Axensystem von fester Stellung. Ferner seien $\overset{k}{a_h}(h = 1, 2, \ldots n)$ (oder kurz a_h) die Richtungscosinus der Fundamentalaxen gegen die x. Um sie auf Invarianten der Curve zurückzuführen, setzen wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_g a_h{}' = P_{gh} \quad (g = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

wo der Strich die Differentiation nach dem Bogen der Curve s bezeichnet. Dann folgt aus der Orthogonalität der beiden Axensysteme.

$$a_m{}' = \sum_{g=1}^{n} a_g P_{gm} \tag{2}$$

Es soll nun bewiesen werden, dass unter den n Grössen P nur zwei von 0 verschieden sind.

Seien $x_h (h = 1, 2, \ldots m)$ die Coordinaten von m Curvenpunkten $T_1, T_2, \ldots T_m$ in unendlich kleinen Bogenabständen u_h von T: Die Punkte $T, T_1, \ldots T_m$ liegen auf einer durch sie bestimmten linearen m dehnung erzeugt vom Punkte

$$z_m = \sum_{h=1}^{m} x_h (v_h) \tag{3}$$

bei unabhängiger Variation der Parameter (v_h). Nach taylor'scher Reihenentwickelung wird

$$x_h = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{u_h^{\lambda}}{\lambda!} x^{(\lambda)}$$

Führt man diesen Ausdruck ein und ersetzt die m Unabhängigen (v_h) durch ebensoviel neue Unabhängige v_h gemäss der Substitution

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{u_h^{\lambda}(v_h)}{\lambda!} = v_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

so wird

$$z_m = \sum_{\lambda=1}^{m} x^{(\lambda)} v_\lambda + R$$

wo der Rest

$$R = \sum_{h=1}^{m} (v_h) \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} \frac{u_h^{\lambda}}{\lambda!} x^{(\lambda)}$$

wenn sämtliche u_h in 1. Ordnung gleichzeitig verschwinden, für endliche v_λ, wo auch $(v_h) u_h^m$ endlich bleibt, unendlich klein ist. Daher ist die genaue Gleichung der osculirenden m dehnung:

$$z_m = \sum_{\lambda=1}^{m} x^{(\lambda)} v_\lambda \tag{4}$$

Diese zunächst muss ein Punkt V_m der $m$ten Fundamentalaxe mit der Coordinate z_m erfüllen. Ausserdem muss die Gerade $T V_m$ auf der osculirenden $(m-1)$ dehnung, d. i. auf

$$z_{m-1} = \sum_{\mu=1}^{m-1} x^{(\mu)} v_\mu$$

senkrecht stehen, d. h. es muss für jedes v_μ

$$\sum_{k=1}^{n} z_m z_{m-1} = 0$$

also auch einzeln

$$\sum_{k=1}^{n} z_m x^{(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots m-1) \quad \text{oder}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{m} v_\lambda \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots m-1) \tag{5}$$

sein. Durch diese $m-1$ homogenen Gleichungen sind die m Grössen v_λ bis auf einen gemeinsamen Factor Q bestimmt. Setzt man zur Abkürzung

$$A_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu)} \tag{6}$$

so wird

$$v_\nu = Q b_{\nu m} \quad \text{wo} \tag{7}$$

$$b_{\nu m} = (-1)^{m-\nu} \mid A_{\lambda\mu} \mid \begin{Bmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots m \\ \mu = 1, 2, \ldots m-1 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Ist nun

$$Q r_m = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_m^2} \tag{9}$$

der Radiusvector von V_m, also

$$\frac{z_m}{Q r_m} = a_m$$

so erhält man nach Einführung des Wertes (7) in Gl. (4):

$$r_m a_m = \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu m} x^{(\nu)} \tag{10}$$

und nach Auflösung dieser Gleichung angewandt auf $m = 1, 2, \ldots m, m+1$:

$$x^{(\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} c_{\varkappa\nu} a_\varkappa \tag{11}$$

Gl. (10) differentiirt gibt:

$$r_m a_m' + r_m' a_m = \sum_{\nu=1}^{m} \{b_{\nu m} x^{(\nu+1)} + b_{\nu m}' x^{(\nu)}\}$$

nach Gl (11)

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \{b_{\nu m} \sum_{\varkappa=1}^{\nu+1} c_{\varkappa\nu+1} a_\varkappa + b_{\nu m}' \sum_{\varkappa=1}^{\nu} c_{\varkappa\nu} a_\varkappa\} \tag{12}$$

Multiplicirt man mit a_g und summirt von $k = 1$ bis $k = n$, so verschwinden zur Rechten alle Terme für $k \gtrless g$, folglich überhaupt alle für $g > m+1$, und man hat:

$$P_{gm} = 0 \quad \text{für} \quad g > m+1$$

Da aber

$$P_{gm} + P_{mg} = \sum_{k=1}^{n} (a_g a_m)' = 0$$

so ist auch

$$P_{gm} = 0 \quad \text{für} \quad m > g+1 \quad \text{oder} \quad g < m-1$$

Endlich ist auch für $g = m$

$$P_{gm} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_m^2)' = 0$$

folglich sind in Gl. (2) zur Rechten nur die 2 Terme $g = h-1$ und $g = h+1$ nicht null. Setzt man

$$P_{h+1,h} = -P_{h\,h+1} = p_h$$

so lautet sie:

$$a_h' = a_{h+1} p_h - a_{h-1} p_{h-1} \tag{13}$$

$$p_h = \sum_{k=1}^{n} a_{h+1} a_h' \tag{14}$$

Diese für $h = 1, 2, \ldots n$ gültigen Gleichungen, in denen natürlich für $h = 1$ das zweite, für $h = n$ das erste Glied der Rechten als null zu betrachten ist, sind zunächst als Differentialformeln die Verallgemeinerung derjenigen, welche von französischen Mathematikern die Fundamentalformeln der Curventheorie genannt werden. Die allgemeinere Aufstellung zeigt nun deutlich, dass die jetzt in Frankreich ausschliesslich angewandten, Herrn A. Serret als Autor zugeschriebenen Differentialformeln mit Unrecht von Monge's Vorzeichenbestimmung des zweiten Gliedes abweichen. Man sieht, dass zwar sämtliche p_h nach Definition ein willkürliches gemeinsames Doppelzeichen haben, dass aber, sofern p_h und a_h überhaupt Functionen von h sind, die zwei Glieder nicht beide positiv sein können. Die Unregelmässigkeit der Serret'schen Formeln erklärt sich aus dem Wunsche die Vertauschbarkeit von Tangente und Binormale nicht durch Vorzeichenwechsel complicirt zu machen. Dabei wird aber nicht beachtet, dass die Orthogonalcoefficientendeterminante $= 1$ durch jene Vertauschung in -1 übergeht.

Die Gl. (13) kann ferner in der Form

$$a_{h+1} = \frac{a_h' + a_{h-1} p_{h-1}}{p_h}$$

zur recurrenten Bestimmung von a_h dienen, wenn zuvor die p_h bekannt sind. Multiplicirt man, um ihre Werte zu finden, Gl. (12) mit a_{m+1} und summirt über alle Werte von k, so bleibt zur Rechten nur ein Term nicht null, und man findet:

$$r_m p_m = b_{mm} c_{m+1,\,m+1} \tag{15}$$

Nach Gl. (10) und (11) ist aber

$$r_m a_m = b_{mm} x^{(m)} + \sum_{r=1}^{m-1} b_{rm} x^{(r)}$$

$$= b_{mm} \left(c_{mm} a_m + \sum_{x=1}^{m-1} c_{xm} a_x \right) + \sum_{v=1}^{m-1} b_{vm} \sum_{x=1}^{v} c_{xv} a_x$$

Da alle $\varkappa < m$ sind, so muss der Coefficient jedes $a_\varkappa$ null sein, und es bleibt nur:

$$r_m = b_{mm}\, c_{mm}$$

Gl. (15) wird also

$$p_m = \frac{r_{m+1}}{r_m} \frac{b_{mm}}{b_{m+1,\, m+1}} \tag{16}$$

Nach Gl. (8) ist

$$b_{mm} = | A_{\lambda\mu} | \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots m-1)$$

wofür wir abkürzend schreiben b_m. Dann lautet Gl. (13):

$$a_m' = a_{m+1} \frac{r_{m+1}}{r_m} \frac{b_m}{b_{m+1}} - a_{m-1} \frac{r_m}{r_{m-1}} \frac{b_{m-1}}{b_m} \tag{17}$$

Es bleiben noch die Grössen r_m in den $x^{(\mu)}$ darzustellen. Der Punkt V_m war anfangs ein willkürlicher auf der $m$ten Fundamentalaxe Er wird ein bestimmter, wenn wir in Gl. (7) $Q = 1$ setzen; denn dann wird nach Gl. (4) (9)

$$z_m = \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)} b_{\nu m}; \quad r_m = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \{ \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)} b_{\nu m} \}^2}$$

Führt man in Gl. (17) $z_m = r_m a_m$ ein, so lautet sie:

$$z_m' - \frac{r_m r_m'}{r_m^2} z_m = z_{m+1} \frac{b_m}{b_{m+1}} - z_{m-1} \frac{r_m^2}{r_{m-1}^2} \frac{b_{m-1}}{b_m} \tag{18}$$

Alle Terme dieser Gleichung sind rational. Wir sehen ihre Zähler und Nenner als ganze Functionen der Differentialquotienten von x an und beobachten nur diejenigen $A_{\lambda\mu}$, in denen $\lambda + \mu$ seinen grössten Wert hat. In den beiden Nennern r_m^2 und b_{m+1} ist dies A_{mm}, und zwar findet man:

$$r_m^2 = \sum_{k=1}^{n} x^{(m)} x^{(m)} b_{mm}^2 + \ldots = A_{mm} b_m^2 + \ldots$$

$$b_{m+1} = A_{mm} b_m + \ldots$$

Gl. (18) ist unerfüllbar, wenn nicht diese 2 polynomischen Nenner gemeinsame polynomische Factoren haben. Da nun A_{mm} in keinem andern Term vorkommt, so müssen alle Terme beider Grössen einander entsprechen und den ausgeschriebenen Termen proportionirt sein. Folglich haben sie selbst das gleiche Verhältniss, d. h. es ist

$$r_m^2 = b_m b_{m+1}$$

und nach Gl. (16)

$$p_m = \frac{\sqrt{b_m b_{m+2}}}{b_{m+1}}$$

explicite in Differentialquotienten der x dargestellt. p_m bedeutet die $m$te Krümmung der Curve., zunächst für $m = 1$ und 2; denn

$$p_1 = \Sigma a_1' a_2 \quad \text{und} \quad p_2 = \Sigma a_2' a_3$$

sind in der Tat gleich der Krümmung und Torsion einer Raumcurve. Diese Ausdrücke definiren die Krümmung als cos. des Winkels zwischen der Hauptnormale und consecutiven Tangente, die Torsion als cos. des Winkels zwischen der Binormale und consecutiven Hauptnormale, beide dividirt durch das Curvenelement ∂s. Analog kann man nun definiren:

„Die $m$te Krümmug ist der Grenzwert des cos. des Winkels „zwischen der $(m+1)$ten Fundamentalaxe und der consecutiven „$m$ten Fundamentalaxe, dividirt durch das Curvenelement."

Nach Gl. (14) ist sie ausgedrückt durch

$$p_m = \sum_{k=1}^{n} a_{m+1} a_m'$$

Ohne Hülfe der recurrenten Gl. (13), also independent, gibt schon Gl. (4) den Wert jedes a_m, wenn man v_k nach Gl. (7) (8) und r_m nach Gl. (9) ausdrückt, nämlich

$$r_m a_m = \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)} \left| \sum_{k-1}^{n} v^{(\lambda)} x^{(\mu)} \right| \begin{Bmatrix} \lambda = 1, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots m \\ \mu = 1, \ldots m-1 \end{Bmatrix}$$

doch ist jedenfalls die Relation (13) zwischen den a für die Theorie wichtiger.

R. Hoppe.

Litterarischer Bericht

XLIII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Beiträge zur Zahlentheorie, insbesondere zur Kreis- und Kugelteilung mit einem Nachtrage zur Theorie der Gleichungen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1891. Friedrich Foerster. 285 + 133 S.

Die von Gauss gegründete, von Richelot, Serret und Kummer geförderte und erweiterte, von Bachmann nach erreichtem Standpunkt zusammengestellte Theorie der Kreisteilung ist nach Erklärung des Verfassers hiermit nicht abgeschlossen, sondern lässt noch manche Mängel bestehen und wird im Gegenwärtigen in wol verständlichem Vortrage mit Untersuchung der noch offenen Fragen entwickelt. Die Reihenfolge der behandelten Gegenstände ist folgende: Die construirbare Kreisteilung; die cyklisch geordneten Functionen; die allgemeine Kreisteilung; die Teilbarkeit der Zahlen von der Form 2^r+1; zur allgemeinen Zahlentheorie, nämlich: die polyplexen Wurzeln und die polyplexe Zahl überhaupt; die ideale Zahl, die algebraische Zahl, die Quaternionen, d. i. die vom Verfasser als ganz verfehlt dargetane Speculation Hamilton's; endlich die Kugelteilung. Dann folgt im Anhang: das Lösbarkeitsmerkmal und die Herstellung lösbarer Gleichungen. H.

Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von Dr. M. Paul Mansion, Professor an der Universität Gent, Mitglied der königl. belgischen Akademie. Vom Verfasser durchgesehene und vermehrte deutsche Ausgabe. Mit Anhängen von

S. von Kowalevsky, Imschenetsky und Darboux. Herausgegeben von H. Maser. Berlin 1892. Julius Springer. 489 S.

Die hervorragende Stelle des Originalwerkes, welches jetzt nach langer Unterbrechung wieder zugänglich gemacht wird, in der mathematischen Litteratur wird vom Herausgeber in den Worten ausgesprochen: „das Mansion'sche Buch ist bisher das einzige geblieben, welches in so eingehender Weise die verschiedenen Methoden, welche zur Integration der partiellen Differentialgleichungen vorgeschlagen wurden, historisch-kritisch beleuchtet, ihre Beziehungen zu einander klarlegt, ihre Vorzüge und Mängel gegenseitig abwägt und jedem der Begründer das Verdienst lässt, welches ihm zukommt. Es ist das einzige Werk dieser Art geblieben, einfach aus dem Grunde, weil es seine Aufgabe gleich in vollkommener und unübertrefflicher Weise löste". Letztere Aussage kommt jeder Kritik zuvor. Wir wollen nur die Hauptabschnitte aufführen: Entstehung der partiellen Differentialgleichungen. I. Buch: Methode von Lagrange und Pfaff. Lineare partielle Differentialgleichungen; Methode von Lagrange zur Integration der part. Diffgl. mit 3 Veränderlichen und einiger Gleichungen mit einer grösseren Zahl von Veränderlichen; Ausdehnung der Lagrange'schen Methode auf part. Diffgl. mit beliebig vielen Variabeln; die Pfaff'sche Methode. II. Buch: Methode von Jacobi. Grundlagen; Integration einer part. Diffgl. 1. Ordnung; Integration der simultanen part. Diffgl. 1. Ordnung; Methode von Clebsch für die Integration der linearen part. Diffgl., zu denen die Jacobi'sche Methode führt; Methode von Korkine und Boole; Mayer's Methode zur Integration der linearen part. Diffgl., zu welchen die Jacobi'sche Methode führt. III. Buch: Methode von Cauchy und Lie. Allgemeine Auseinandersetzung, Arbeiten von Cauchy; Untersuchungen von Serret; Lie's Methode betrachtet als eine Erweiterung der Cauchy'schen; die Lie'sche Methode als Zusammenfassung der früheren Methoden. Anhänge: Zur Theorie der part. Diffgl. Von Frau Sophie von Kowalevsky. Untersuchung der Methoden zur Integration der part. Diffgl. 2. Ordnung mit 1 abhängigen und 2 unabhängigen Veränderlichen. Von V. G. Imschenetsky. Ueber die part. Diffgl. 2. Ordnung. Von G. Darboux. H.

Cours de la Faculté des sciences de Paris. Traité d'analyse. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des sciences. Tome I. Intégrales simples et multiples. L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries. Applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris 1891. Gauthier-Villars et fils. 457 S.

Der umfassende Titel „Lehrbuch der Analysis" bezeichnet das Gesamtwerk nicht und ist auch, wie aus dem Vorwort zu ersehen, nicht zu diesem Zwecke vom Verfasser gewählt. Der eigentliche Gegenstand ist vielmehr die Theorie der Differentialgleichungen, und der jetzt erschienene erste Band hat die vorbereitende Bestimmung, gewisse Lehren von den bestimmten Integralen, welche der Verfasser zugunsten seiner Zuhörer für gut fand, zu entwickeln. Die 4 Themata sind auf dem Specialtitel genannt. Das erste betrifft die allgemeine Lehre von den Integralen der Functionen, den einfachen, auch krummlinigen, den doppelten und mehrfachen; das zweite die Laplace'sche Gleichung, Anziehung und Potential, die gleichförmig convergenten Reihen, das Dirichlet'sche Integral, die Fourier'sche Reihe; das dritte Enveloppen', Regelflächen, Congruenzen von Geraden und Complexe', Berührung, Krümmung, Torsion, Curven auf Flächen, abwickelbare Flächen, Abbildung. H.

Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. Von Ulisse Dini, ordentlichem Professor an der Universität Pisa. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Jacob Lüroth, Professor zu Freiburg i. B., und Adolf Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Leipzig 1892. B. G. Teubner. 554 S.

In der Bearbeitung ist der Gesichtspunkt unverkennbar, ein italienisches Werk, dass nach dem Urteil der Herausgeber bisher einziges und durch kein andres ersetztes Hülfsmittel des Studiums der Functionentheorie gewesen ist, nicht nur nach Deutschland zu verpflanzen, sondern es auch für Deutschland und die neueste Zeit durch Berücksichtigung der methodischen Fortschritte auf der Höhe seiner Stellung zu erhalten. Dies Verfahren war indes vom Verfasser selbst an die Hand gegeben; denn auch die Entstehung des Originalwerks zeigt durch successive Aufnahme neuerer und fremder Erzeugnisse, dass es für weitere Vervollkommnung bestimmt war. Die Lehrmethode charakterisirt sich durch Bevorzugung der formellen Begriffsbestimmung vor der materiellen. Dies hat auf den Entwickelungsgang des Ganzen keinen merklichen Einfluss geübt. Es werden nach einander die Begriffe der Irrationalzahl, des Grenzwerts und der unendlichen Grössen, der Functionen, ihrer Stetigkeit, ihre Derivation, die unendlichen Reihen, dann die Integration behandelt, mithin dem Plane nach die Theorie aufgebaut. Im Einzelnen aber macht die Begriffsbestimmung die grösste erreichte Allgemeinheit zum Ausgangspunkte und begnügt sich mit Aufstellung der notwendigen Bedingungen, ohne den Anschluss der Lösungen

an vorher bekannte Gebiete ans Licht kommen zu lassen. Der Deutlichkeit förderlich ist diese didaktische Inconsequenz gewiss nicht; eher möchte das letztere Verfahren dahin wirken scheinbare principielle Schwierigkeiten zu schaffen, wo von Natur keine vorhanden sind. Hoppe.

Curso de analyse infinitesimal. Por F. Gomes Teixeira, Director da Academia Polytechnica do Porto, professor na mesma Academia, antigo professor na Universidade de Coimbra, socio correspondente das Academias Reaes das Sciencias de Lisboa e Madrid e das Sociedades Reaes das Sciencias de Liège, Praga, etc. Calculo differencial (premiado pela Academia Real des Sciencias de Lisboa com o premio instituido por El-Rei D. Luiz I) 2.ª ediçao. 1890. — Calculo integral (segunda parte) 1892. Porto. Typographia Occidental.

Die erste Ausgabe der Differentialrechnung, erschienen 1887, ist im 23. litt. Bericht S. 27, der erste Teil der Integralrechnung, erschienen 1889, im 33. litt. Bericht S. 4 besprochen. Der jetzt erschienene 2. Teil der Integralrechnung behandelt die Integration der Functionen imaginärer Variabeln, die Euler'schen Integrale, die elliptischen Functionen mit Anwendungen, vielförmige Functionen, die Lagrange'sche Reihe, die Variationsrechnung, geometrische Anwendung, Minimalflächen. H.

Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Akademische Vorlesungen von H. Weber, Professor der Mathematik an der Universität Marburg. Braunschweig 1891. Vieweg u. Sohn. 504 S.

Das Buch ist in 3 Teile geteilt, überschrieben analytischer, algebraischer, zahlentheoretischer Teil. Im ersten findet man die Lösung der Probleme, welche aus der Einführung der elliptischen Functionen natürlich hervorgiengen, wiewol erst vollendet in einem Abschnitt des zweiten. Die beiden letzten teilen die durch die Theorie der elliptischen Functionen veranlassten weitergehenden Untersuchungen mit, und zwar der zweite solche, die schon länger bekannt sind, der dritte solche, die lange nur Wenigen bekannt, erst in neuester Zeit durch Halphen, aber auch hier nur unvollendet, an die Oeffentlichkeit gelangt sind. Die Abschnitte des 1. Teils sind: die elliptischen Integrale; die Thetafunctionen; die Transformationen derselben; die elliptischen Functionen; die Modulfunctionen; einige Anwendungen; Die Abschnitte des 2. Teils: Hülfssätze aus der Algebra; Multiplication und Teilung der elliptischen Functionen; Theorie der Trans-

formationsgleichungen und die Gleichung 5. Grades. Die Abschnitte des 3. Teils: complexe Multiplication; Berechnung von Classeninvarianten; die Multiplicatorgleichung in der complexen Multiplication und die Zerfällung der Classengleichung in Factoren; Galois'sche Gruppe der Classengleichung, die Normen der Classeninvarianten $f(\omega)$; Teilung der elliptischen Functionen mit singularen Moduln. Anhang: Verzeichniss von Classeninvarianten. H.

Theorie der Quaternionen. Von Dr. P. Molenbroek. Leiden 1891. E. J. Brill. 284 S.

Zum grössten Teile ist der Verfasser Hamilton gefolgt, in einigen Stücken selbständig bessernd vorgegangen Die einzelnen Abschnitte behandeln: Summen und Differenzen von Vectoren; Quotienten von Vectoren, Quaternionen; Producte von Vectoren; einige geometrische Oerter; Differentiale von Quaternionen; Auflösung von Quaternionengleichungen 1. Grades; Quaternionengleichungen 2. und höhern Grades. Anhang: Potenzen mit Quaternionenexponenten; Logarithmus und trigonometrische Functionen eines Quaternions. H.

Die sieben Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen. Auf Grundlage der Anschauung und unter Anwendung verallgemeinerter Definitionen nach einheitlichem Plane dargestellt von Dr. Franz Divič, königl. Gymnasial-Professor. Mit 35 Holzschnitten. Wien und Leipzig 1891. A. Pichler's Wittwe u. Sohn. 165 S.

Da keine Aeusserung des Verfassers darüber vorliegt, so kann man in Zweifel sein, ob das Buch für wissenschaftlichen oder für Schulzweck bestimmt ist. Jedenfalls gibt es keinen Anlass, pädagogische Gesichtspunkte darin zu suchen. Ist es aber unabhängig vom Schulgebrauche bearbeitet, so kann man wol einen, wenn auch nicht sachlichen, doch formellen theoretischen Fortschritt erwarten. In dieser Beziehung behauptet der Verfasser, dass seine Darstellungsweise viele Vorzüge habe, und nennt als Hauptvorzug, dass seine Definitionen der Operationen für alle Zahlarten (weder von Zahlarten noch von Erweiterung des Zahlbegriffs kommt etwas vor) einen verständlichen Sinn geben. Dies trifft jedoch nicht zu; z. B. die Definition der Multiplication ist nur für natürliche Zahlen verständlich. Ueberhaupt möchte es wol schwer sein Definitionen oder Sätze in dem Buche zu finden, die sich anders als durch ungewöhnliche Ausdrücke und Umschreibungen von den gewöhnlichen unterschieden. Die Auffassung steht, mit den gewöhnlichen Lehrbüchern verglichen, auf niederer Stufe. Unklare Redeweisen kommen nicht wenige vor,

z. B. „Mit einer Grösse sind zwar alle ihre Teile insgesamt gegeben etc." — „eine andere Zahl, welche mit der erwähnten gleichwertig ist." — Factoren werden Teile des Products genannt. — Eigentümlich möchte vielleicht die Erklärung des Zählens sein; was aber dadurch gewonnen wird, ist nicht wol abzusehen. Hoppe.

Neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung. Von Dr. Julius Bergbohm. Wien 1892. Selbstverlag des Verfassers. 58 S.

Vor nicht langer Zeit trat der Verfasser mit einer Schrift: „Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik" — auf, worin er zwecklose, nichts unbekanntes darbietende Rechnungen unter Einführung neuer Namen für neue Entdeckungen ausgab. Was im 40. litterarischen Bericht S. 41 hierüber gesagt ist, lässt die gegenwärtige Schrift ohne Beachtung und fährt auf dem Wege vorausgeschickter Anpreisung und unerfüllter Versprechungen fort. Zum Belege die Aussage S. 56: „Fast alle Methoden, welche nötig sind, um selbst die verwickeltsten Integrale zu ermitteln, sind schon in der vorliegenden Abhandlung angedeutet." In der Tat wird aber in den zur Darlegung der angeblichen Methode ausgeführten Rechnungen kein einziges Integral ermittelt, vielmehr stets erst durch eine überflüssig vermehrte Reihe von Operationen die Differentiation einer speciellen Function vollzogen, dann durch den umgekehrten Gang das bereits bekannte Integral wiedererhalten.

Hoppe.

Synopsis der höheren Mathematik. Von Johann G. Hagen, S. J., Director der Sternwarte des Georgetown-College Washington D. C. Erster Band. Arithmetische und algebraische Analyse. Berlin 1891. Felix L. Dames.

Dass bei dem grossen Umfang und der vielfachen Verzweigung der höhern Mathematik eine Synopsis, welche die Ergebnisse der Forschung übersichtlich zusammenstellt, den erreichten Standpunkt in jeder Richtung erkennen lässt und die betreffenden Arbeiten nachweist, ein Bedürfniss Aller, die die Wissenschaft treiben, geworden ist, werden dieselben wol zugestehen. Zur Erschaffung eines solchen Werkes ist indes viel Umsicht und Verständniss erforderlich. Auch der Verfasser hat gefunden, dass die Aufnahme des Stoffes begrenzt werden muss, und dazu den Gesichtspunkt gewählt, dass die vorhandenen Lehrbücher alle diejenigen Sätze enthalten möchten, welche abgeschlossenen Theorien zugehören. Nur

deren Lehrstoff ist also aufgenommen, jedoch stets auf die Originalarbeiten zurückgeführt. Das Ganze ist sachlich geordnet, die Zweige der Wissenschaft sind so geschieden, wie sie sich der Litteratur zufolge actuell gestaltet haben. Ein alphabetisches Sachregister erleichtert die Auffindung. Den einzelnen Sätzen (natürlich ohne Beweis) sind historische Angaben und andre Bemerkungen beigefügt. Obgleich nun das Urteil eines Einzelnen nicht darüber zu entscheiden vermag, ob die vorliegende Synopsis dem Bedürfnisse nach allen Seiten hin genügt, so kann man doch soviel sagen, dass die Behandlungsweise eine vortreffliche Befähigung zu einem solchen Werke kund gibt. H.

Erd- und Himmelskunde.

Mitteilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik. Redigiert von Prof. Dr. W. Foerster zu Berlin. I. Jahrgang. Heft 1. Berlin 1891. Ferd. Dümmler.

Die Vereinigung ist gegründet am 19. Mai 1891, mit dem Zwecke das Zusammenwirken der Forschung zu organisiren. Der Verkehr besteht in freien Mitteilungen von Seiten der Mitglieder an die leitenden Stellen der Vereinigung und von diesen aus in Publication von Ratschlägen und von Ergebnissen der Bearbeitung der eingesandten Beobahtungen in der gegenwärtigen Zeitschrift, ihrem einzigen Organ. Die neue Vereinigung soll als regionale gleich den in England, Frankreich, Russland und Nordamerika bereits bestehenden nationalen Vereinigungen von Astronomen und Freunden der Astronomie die internationale „Astronomische Gesellschaft" als umfastendere und übergeordnete ansehen. Sie hat 6 Arbeitsgruppen gebildet und jede für sich organisirt, nämlich: für Sonnenbeobachtungen, für Beobachtungen des Mondes und der Planetenoberflächen, der Intensität und Färbung des Sternlichtes und des Milchstrassenzuges, für Zodiakallicht und Meteore, für Polarlicht, Erdmagnetismus, Erdströme und Luftelektricität, für Wolken-, Halo-, und Gewitter-Beobachtungen. Das erste Heft enthält zuerst Ratschläge für die Beteiligung an der Erforschung der sogenannten leuchtenden Wolken, dann Ankündigung in Betreff der Meteorbeobachtungen nebst Nachricht über zwei solche, dann eine Zusammenstellung der vorhandenen Sternkarten. H.

Astronomische Abende. Allgemein verständliche Unterhaltungen über Geschichte und Ergebnisse der Himmels-Erforschung. Von Dr. Hermann J. Klein. Dritte, vielfach umgearbeitete und vermehrte Auflage. Leipzig (1892). Eduard Heinrich Mayer. 392 S.

Der Verfasser beabsichtigt in diesem Buche, fern von systematischer. Darstellung, in einer freien und unterhaltenden Form dem Leser die hauptsächlichen Errungenschaften der heutigen Sternkunde vorzuführen. Hierzu hat er als geeignetsten Anknüpfungspunkt die historische Entwickelung. insbesondere die Lebensgeschichten der hervorragendsten Astronomen gewählt, welche die Gelegenheit bietet die notwendigsten Erklärungen einzuflechten, um so unmerklich eine Grundlage zu gewinnen, die für den Leser ohne grosse Vorkenntnisse zum Verständniss der spätern Darstellung ausreicht. Dass in der Tat Interesse für Belehrung über die Himmelserscheinungen reichlich vorgefunden wird, wie es der Verfasser voraussetzt, kann man oft bemerken und ist durch den so häufig dargebotenen Anblick des Sternhimmels leicht erklärlich. Auch muss man bei Durchlesung des Buches dem Verfasser viel Befähigung und Geschick zur Durchführung des genannten Planes zuerkennen; ganz besonders ist es hochzuschätzen, dass er es, ohne den Lesern viel Fleiss und Nachdenken aufzubürden, doch vermieden hat, ein eingebildetes Wissen durch Mitteilung unverstandener Gelehrsamkeit zu erzeugen. Gerade darum aber dürfen wir über eine Ausnahme, die sich dennoch an einer Stelle findet, nicht stillschweigen. Das Auftreten des Coppernicus bezeichnet eine entschiedene Wendung der wissenschaftlichen Forschungsweise, (von der freilich Klein kein Wort sagt). Indem C. mit klarem Bewusstsein die Basis seiner Lehre eine Annahme nannte und in seinem ganzen Werke sowie in der Widmungsschrift als solche charakterisirte, errang die „Hypothese" vermöge ihrer ausserordentlichen Erfolge ihren glänzenden Sieg über die bornirte Meinung (die sich jederzeit für absolutes Wissen, Wahrheit, Forderung des Geistes u. s. w. hält und ausgibt) und behauptete ihn durch durch die racshe Entwickelung der neuern Wissenschaft. Hätten C. und seine Nachfolger ihre Lehren als Wahrheiten hingestellt, so hätte sich statt einer fortschreitenden Wissenschaft nur eine Reihe von Meinungen ergeben. Die Hypothese des C. war es, die von Kepler präcisirt, von Newton zur Vollendung gebracht ward. Dies Verhältniss der Hypothese zur angeblichen Wahrheit verdreht nun Klein gänzlich auf S. 24, wo er von Osiander's Vorrede zu C.'s Werke spricht und sich empört darüber zeigt, dass dieser die neue Lehre als Hypothese bezeichne, die weder wahr noch wahrscheinlich zu sein brauche. Der Beisatz versteht sich natürlich für jeden Forscher von selbst, die Bezeichnung als Hypothese steht

sogar mit dem von Klein citirten eigenen Ausspruch des C. in voller Uebereinstimmung. Es ist daher nicht die Aussage von Os., sondern die von Klein unverständlich. Sofern nun die vorgesehenen Leser keine Forscher sind, durfte freilich Klein jene bedeutungsvolle Wendung mit Stillschweigen übergehen. Dann aber war auch kein Anlass von der genannten Vorrede ein Wort zu sagen. Sprach er einmal davon, so war es ganz den sonst treu gehaltenen Grundsätzen zuwider, den Sachverhalt so im Dunkeln zu lassen wie es hier geschieht. Doch ist nicht bloss die fehlende Erklärung, sondern eine wirkliche Entstellung des Sachverhalts zu rügen. Was die Erhabenheit von C.'s Geiste offenbart, und worin der Kundige eine Anbahnung des spätern Wiederauflebens der Wissenschaften sieht, das lässt Klein — denn anders lässt sich seine Aeusserung nicht wol deuten — in Os.'s Munde als Herabwürdigung von C.'s Lehre erscheinen. Hoppe.

Astronomy and astro-physics. Editors W M., W. Payne, Director of the Goodsell Observatory, Northfield, Minn, George E. Hale, Director of the Kenwood Astro-Physical Observatory, Chicago. 101. 102. 103. 1892.

Das dem Ref. in 3 Heften Vorliegende ist eine amerikanische Zeitschrift, von welcher jährlich 10 Hefte erscheinen. Der erste Teil jedes Heftes enthält Abhandlungen allgemein astronomischen Inhalts, der zweite, astrophysikalische Teil hauptsächlich Untersuchungen der Spectra von Fixsternen und der Physik der Sonne, der dritte Teil Nachrichten und Noten. H.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Par H. Poincaré, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des sciences. Tome I. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. Paris 1892. Gauthier-Villars et fils. 385 S.

Nachdem Gyldén und Lindstedt die säcularen Terme, welche die nach alter Methode zur approximativen Lösung des Problems der 3 Körper gebrauchten Reihen enthalten, entfernt und neue Reihen mit lauter periodischen Termen dafür entwickelt hatten, Reihen indes die nur eine anfängliche grössere Annäherung ergeben, aber nicht convergiren, war es im theoretischen Interesse für den Verfasser das nächste Ziel, eine obere Grenze des Restes zu finden. Dies Ziel ist durch die gekrönte Preisarbeit, wie sie im 13. Bande der Acta Mathematica veröffentlicht ist, erreicht. Das vorliegende

Werk gibt nun fie ganze Theorie in mehr synthetischer Darstellung. Die Abschnitte des bis jetzt allein erschienenen 1. Bandes sind: Jacobi's Methode; Integration durch Reihen; periodische Lösungen; charakteristische Exponenten; Nichtexistenz einförmiger Integrale; approximative Entwickelung der Störungsfunction; asymptotische Lösungen. H.

Lehrbuch der physikalischen Geographie. Von Dr. Siegmund Günther, Professor an der k. technischen Hochschule in München. Mit 169 in den Text gedruckten Holzschnitten und 3 Tafeln in Farbendruck. Stuttgart 1891. Ferdinand Enke. 508 S.

Welche Doctrinen hier der Begriff der physikalischen Geographie als umfassend betrachtet wird, zeigt die Reihe der Themata des Lehrbuchs: Kosmophysikalische Einleitung; Gestalt und Grösse der Erde; Gravitation; Erdtemperatur und Erdinneres; Geognosie und Stratigraphie; Land und Entstehung der Gebirge; Hebungen und Senkungen; vulcanische Erscheinungen; Erdbeben; das magnetische und elektrische Verhalten der Erde; die Atmosphäre und die in ihr sich vollziehenden Bewegungen; Klimatologie; ozeanische Statik und Dynamik; die Gewässer des Festlandes; Schnee und Gletschereis; die zerstörenden Kräfte an der Erdoberfläche; allgemeine und specielle Morphologie der Erdoberfläche. Aus diesen vielen Gebieten erwachsen nun eine grosse Anzahl naturwissenschaftlicher Fragen, die wir nach heutigem Standpunkt als ungelöst betrachten müssen, sofern aus ihrer Untersuchung kaum irgend eine definitive Lehre oder Theorie hervorgegangen ist. Dem Lehrbuch bleibt nur die Aufgabe des beschreibenden Berichts, nämlich einesteils der Beschreibung der beobachteten Erscheinung, anderenteils des der Beobachtung sich entziehenden zur Erklärung der Erscheinung hinzugedachten Vorgangs, darüber hinaus höchstens Kritik der Argumentationen. So lässt denn auch das vorliegende Lehrbuch es dabei bewenden, die verschiedenen Erklärungsversuche mit Nennung ihrer Autoren neben einander zu stellen. Es bleibt sogar unerwähnt, wenn denselben wesentlich verschiedene Erscheinung zugrunde liegt. So sind z. B. zur Erklärung der Meeresströmungen 3 Hypothesen aufgeführt, deren erstere beiden für locale Ausgleichungsströme passen, während der dritte nur für Circulationen denkbar ist, ohne dass die Frage nach der Existenz der letztern aufkommt. Gerade darum aber, weil keine Frage zum befriedigenden Abschluss gebracht ist, darf man annehmen, dass der Reiz des Studiums um so grösser sein wird; denn ein Rätsel übt nach Mitteilung der Lösung keine Anziehung mehr. H.

Astronomischer Kalender für 1891. 1892. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Zehnter, elfter Jahrgang. Wien. Carl Gerold's Sohn. 144 + 147 S.

Die Beilagen beider Jahrgänge geben die Elemente aller Planeten, Satelliten und Asteroiden. Jede von beiden berichtet ferner über die Entdeckungen neuer Planeten und Kometen. Ausserdem enthält erstere die Phasen des Saturnringes in den Jahren 1891 und 1892, letztere das Verzeichniss der vorzüglichsten in unsern Breiten sichtbaren Fixsterne. Nähere Auskunft wird in beiden Jahrgängen erteilt über die nach ein- oder mehrmaliger Wiederkehr beobachteten Kometen. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1886. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 42. Jahrg. 1. Abth., enth.: Physik der Materie. Red. v. E. Budde. Berlin, Georg Reimer. 13 Mk.

Gerland, E., Geschichte der Physik. (Weber's naturwissenschaftl. Bibliothek, Nr. 4.) Leipzig, J. J. Weber. Geb. 4 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 21. Bd. Jahrg. 1889. (In 3 Hftn.) 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. 13 Mk.

Methode und Principien.

Baur, O. W. v., üb. die dialektisch-didaktische Begriffserweiterung in der Mathematik, nachgewiesen an der Lehre vom Negativen. Nach e. Vortrag. Tübingen, Fues, Verl. 60 Pf.

Jde, J., was ist Elektricität? Eine auf Grund einiger Erscheingn. der Physik u. Chemie versuchte Beantwortg. der Frage. Berlin, Simion. 1 Mk.

Korn, A., e. Theorie der Gravitation u. der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage d. Hydrodynamik. I. Tl. Gravitation u. Elektrostatik. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Lipps, Th., ästhetische Faktoren der Raumanschauung. Hamburg, Voss. 3 Mk.

Preyer, W., üb. den Ursprung d. Zahlbegriffs aus dem Tonsinn u. üb. das Wesen der Primzahlen. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Schlichting, K., die Gravitation ist e. Folge der Bewegung d. Aethers. Lüben, Goldschiener's Buchh. 50 Pf.

Secchi, A., die Einheit der Naturkräfte. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Autoris. Uebersetzg. v. R. Schulze. 2. Aufl. Neue Ausg. 8. u. 9. (Schluss-)Lfg. Braunschweig, Salle. à 80 Pf., kplt. 12 Mk.

Zimmermann, W. F. A., die Geheimnisse der Naturkräfte. 5. Aufl. v. B. Dürigen u. F. Matthes. 39.—49. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 30 Pf.

Sammlungen.

Heilmann, S., Materialien f. den Unterricht im Rechnen u. in der Buchführung f. d. oberen Kurse der Realschule — allgemeine Abtlg. — sowie zum Selbstunterrichte, m. zahlreichen Beispielen u. Aufgaben. München, Lindauer'sche Buchh. 1 Mk. 80 Pf.

Holfert, H. F., geometrische Lehrsätze u. Uebungsaufgaben. zum Gebrauche in Realschulen u. verwandten Anstalten f. die Hand der Schüler bearb. 4 Hfte. Dresden, Huhle. 1 Mk. 65 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1058.—1097. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lindner, J., 400 Kopfrechnungen, grösstentheils Aufgaben v. Anstellungs- u. Seminaraustrittsprüfungen. Regensburg, Bauhof. 60 Pf.; Resultate 20 Pf.

Mehler, F. G., Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien u. Realschulen. Mit e. Vorworte v. Schellbach. 17. Aufl. Berlin, Georg Reimer. 1 Mk. 50 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Menzel, J., Aufgaben f. d. Kopfrechnen. 8. Aufl. Bielefeld, Velhagen & Kl. Geb. 2 Mk. 60 Pf.

Müller-Erzbach, W., physikalische Aufgaben f. den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen höherer Lehranstalten u. f. den Selbstunterricht. Berlin, Springer. 2 Mk.

Steuer, W., e. Sammlung angewandter Aufgaben f. das Kopfrechnen, nebst ausführl. Lehrgang f. Kopf- u. schriftl. Rechnen. 1. Hft. 4. Aufl. Breslau, Woywod, Verl. 1 Mk.

Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch der Logarithmen f. Mittelschulen u. höheren Lehranstalten. 18. Aufl. Wien, Bermann & Altmann, Verl. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Bremiker's, C., logarithmisch-trigonometrische Tafeln m. 5 Decimalstellen. 6. Aufl., besorgt v. A. Kallius. Berlin, Weidmann'sche Buchh. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Zech, J., Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen, f. 7 Stellen berechnet. 3. Aufl. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Dalwigk, F. v., Beiträge zur Theorie der Thetafunctionen v. p-Variablen. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Deter, Ch. G. J., Repetitorium der Differential- u. Integralrechnung. 2. Aufl. Berlin, Rockenstein, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Dini, U., Grundlagen f. e. Theorie der Functionen e. veränderlichen reellen Grösse. Mit Genehmigg. d. Verf. deutsch bearb. v. J. Lüroth u. A. Schepp. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Gegenbauer, L., üb. arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied u. Differenz theilerfremd ist. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

— arithmetische Relationen. Ebd. 60 Pf.

— über den quadratischen Restcharakter. Ebd. 50 Pf.

Hauck, A. F., u. H. Hauck, Lehrbuch der Arithmetik f. Latein-, Real- und Handelsschulen. (In 3 Tln.) Hrsg. v. J. Brunotte. Resultate zum II. Tl., 1. Abtlg. (5. Aufl.) Nürnberg, Korn-sche Buchh. 75 Pf.

Kohn, G., üb. die Resultante u. Covariante u. e. Grundform Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Lembcke, K., allgemeine Arithmetik, in ihrer Beziehung zum praktischen Rechnen, f. den Selbstunterricht, insbesondere der Präparanden u. Seminar-Aspiranten dargestellt. 2. Aufl. Wismar, Hinstorff, Verl. 3 Mk.

Sickenberger, A., Leitfaden der Arithmetik, nebst Uebungsbeispielen. 5. Aufl. München, Th. Ackermann, Verl. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 2 Mk.

— Leitfaden der elementaren Mathematik. 1. Tl. Algebra. 2. Afl. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.; kart. 1 Mk. 35 Pf.

Stolz, O., die Maxima u. Minima der Functionen v. mehreren Veränderlichen. Nachtrag. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Geometrie.

Hertzer, H., die geometrischen Grundprinzipien der Parallel-Projektion. 2. Aufl. Berlin, Späth. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Hočevar, F., Lehrbuch der Geometrie f. Obergymnasien. 2. Aufl. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 70 Pf.; geb. 2 Mk. 10 Pf.

Martus, H. C. E., Raumlehre f, höhere Schulen, 2. Tl.: Dreiecksrechnung u. Körperlehre. Bielefeld, Volhagen & Kl. 3 Mk. 50 Pf.; geb. 4 Mk.

Recknagel, G., ebene Geometrie, Lehrbuch e. systematisch geordneter Aufgabensammlg. f. Schulen u. zum Selbststudium. 4. Aufl. München, Th. Ackermann, Verl. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 40 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Kalender f. Messkunde auf d. J. 1892. Hrsg. v. M. Clouth. 19. Jahrg. 1. Thl. Trier, Lintz'sche B., Verl. 1 Mk. 40 Pf.; geb. in Leinw. 2 Mk.; in Ldr. 2 Mk. 60 Pf.

Wüst, A., leichtfassliche Anleitung zum Feldmessen u. Nivelliren. Für prakt. Landwirte u. landwirtschaftl. Lehranstalten bearb. 3. Aufl. Berlin, Parey. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Hrsg. v. W. Jordan u. C. Steppes. 21. Bd. Jahrg. 1892. (24 Hfte.) 1. Hft. Stuttgart, Wittwer's Verl. Jährlich 9 Mk.

Mechanik.

Haerdtl, E. Frhr. v., Skizzen zu e. speziellen Fall d. Problems der drei Körper. München, Franz'scher Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Technik.

Bibliothek, elektrotechnische. 44. Bd. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Blessinger, H., die elektrische Beleuchtung industrieller Anlagen einschliesslich aller Theile in Theorie u. Praxis f. Nicht-Elektrotechniker. Kiel, Lipsius & T., Verl. 2 Mk. 70 Pf.

Braun, F., üb. elektrische Kraftübertragung, insbesondere üb. Drehstrom. Ein gemeinverständl. Experimentalvortrag. Tübingen, Laupp'sche B. 1 Mk.

Brugger, C., die Fortschritte der Elektrotechnik u. die internationale elektrotechnische Ausstellung zu Frankfurt a./M. Mitte Mai bis Mitte Octbr. 1891. Frankfurt a./M., Fösser Nachf. 50 Pf.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: W. Krieg. 5. Jahrg. 1892. (5 Hfte.) 1 Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich 3 Mk.

Elektrizität, die. Organ d. Leipziger Elektrotechniker-Vereins u. dessen Prüfungs- u. Revisions-Anstalt. Hrsg. u. red. v. O. Umbreit. 1. Jahrg. 1892. (24 Nrn.) Nr. 1. Leipzig, Otto Umbreit. Halbjährlich 4 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1890. 3. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Gehrcke, J., Rechenlehrbuch f. Unterbeamte u. Unterbeamten Anwärter der Eisenbahn, Post, Strafanstalten, Polizei-Verwaltungen. etc. 2. Aufl. Berlin, Siemenroth & W. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Schwartze, Th., Telephon, Mikrophon u. Radiophon. 3. Aufl. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Sommerfeld, A., üb. e. neue Integriermaschine. Königsberg, Koch. 60 Pf.

Szczepanski, F. v., Bibliotheca elektrotechnica. Wissenschaftlich m. Autorenregister verseh. Repertorium der neueren deutschen, französ. u. engl. elektrotech. Literatur. Petersburg, v. Szczepanski. 1 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift, elektrotechnische. (Centralblatt f. Elektrotechnik.) Red. v. F. Uppenborn. 13. Jahrg. 1892. (52 Hfte.) 2. Hft. Berlin, Springer. Jährlich 20 Mk.

— f. Elektrotechnik. Organ d. elektrotechn. Vereins in Wien. Red.: J. Kareis. 10. Jahrg. 1892. 1. Hft. Wien, Helf's Sort. Jährlich 16 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

König, A., üb. den Helligkeitswerth der Spektralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. Nach gemeinsam mit R. Ritter ausgeführten Versuchen. Hamburg, Voss. 4 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Abhandlungen d. königl. preussischen meteorologischen Instituts. I. Bd. Nr. 5. Berlin, Asher & Co. 10 Mk.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1890. II. Thl. Meteorologische Beobachtgn. der Stationen 2. Ordnung in Russland nach dem internationalen Schema. Leipzig, Voss' Sort. 15 Mk. 40 Pf.

Annalen der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien (Währing), Hrsg. v. Weiss. VII. Bd. Wien, Künast. 15 Mk.

Bidschof, F., Bestimmung der Bahn d. Planeten (279) Thule. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Blasius, W., drei Vorträge üb. Meteorologie. Braunschweig. Bock & Co. 80 Pf.

Falb's Kalender der kritischen Tage 1892 m. Bezug auf Witterungserscheinungen. Erdbeben u. Schlagwetter in den Bergwerken. Wien, Hartleben. 1 Mk. 50 Pf.

Haase, F. H., die atmosphärische Elektrizität. Betrachtungen üb. deren Entstehg. u. Wirkungsweise. Berlin, Siemens. 1 Mk. 20 Pf.

Hoernes, H., üb. Ballonbeobachtungen u. deren graphische Darstellung m. besond. Berücksicht. meteorologischer Verhältnisse.

Im Anh.: Ausgeführte Ballonreisen zu wissenschaftlichen Zwecken' Wien, Hartleben. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1894 m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1)—(283) f. 1892. Hrsg. v. dem Rechen-Institute der königl. Sternwarte zu Berlin unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches. Jahrg. 1890. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Mitteilungen der m. dem königl. statist. Landesamt verbundenen meteorol. Centralstation. Bearb. v. L. Meyer. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1890. Beobachtungs-System d. Königr. Sachsen. Bericht üb. die Thätigkeit im königl. sächs. meteorolog. Institut f. d. Jahr 1890 mit 5 Anhängen u. 5 Taf. II. Hälfte od. Abth. III. d. Jahrbuches d. königl. sächs. meteorolog. Institut. VIII. Jahrg. 1890. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz, Verl. 10 Mk.

Kalender, astronomischer, f. 1892. Nach dem Muster d. K. v. Littrow'schen Kalenders hrsg. v. der k. k. Sternwarte. Neue Folge. 11. Jhrg. Wien, Gerold's S. Kart. 2 Mk.

Liznar, J., e. Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen der erdmagnetischen Kraft. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde 1892. 21. Jahrg. 6. Aufl. Bremen, Heinsius Nachf. Geb. 7 Mk. 50 Pf.

— dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 6. Aufl. 21. Jahrg. 1892. Ebd. 3 Mk.

Mittheilungen der Vereinigung v. Freunden der Astronomie u. kosmischen Physik. Red. v. W. Foerster. II. Jahrg. 1892. (10—12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Dümmler's Verl. Jährlich 6 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krüger. 129. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke S. Für den Band 15 Mk.

Plassmann, J., Beobachtungen veränderlicher Sterne. 3. Thl. Köln, Bachem. 2 Mk.

— Verzeichniss v. Meteorbahnen. Ebd. 2 Mk.

Publikationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 28. 8. Bds. 2. Stück. Leipzig, W. Engelmann. 5 Mk.

Repertorium f. Meteorologie, hrsg. v. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, red. v. H. Wild. XIV. Bd. Leipzig, Voss' Sort. 31 Mk. 65 Pf.

Singer, K., die Witterung in Süddeutschland 1861—1890. Kurze monatl. Uebersichten. München, Th. Ackermann, Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. Red.: H. J. Klein. 25. Bd. od. neue Folge. 20. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Scholtze. Für den Band 12 Mk.

Timm, H., wie gestaltet sich das Wetter? Eine prakt. Anleitg. zur Vorherbestimmung der Witterg. Wien, Hartleben. 2 Mk.; geb. 3 Mk.

Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 26. Jahrg. 1891. 3. u. 4. Hft. Leipzig, W. Engelmann. à 2 Mk.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 11 feine lith. Taf. nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. jedermann. 2. Aufl. 8.—13. Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

— üb. die Berechnung e. Kometenbahn m. Berücksicht. v Gliedern höherer Ordnung. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Wetter, das. Meteorologische Monatsschrift f. Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 9. Jahrg. 1892. 1. Hft. Braunschweig, Salle. Jährlich 6 Mk.

Zeitschrift, meteorologische. Red. v. J. Hann u. G. Hellmann. 9. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Wien, Hölzel's Verl. Jährlich 20 Mk.

Nautik.

Annalen der Hydrographie u. maritimen Meteorologie. Hrsg. v. der deutschen Seewarte in Hamburg. 20. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Mittler & S. Halbjährlich 1 Mk. 50 Pf.

Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Hrsg. vom k. k. hydrograph. Amte, Marine-Bibliothek. 20. Bd. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Wien, Gerold's S. Jährlich 12 Mk.

Nachrichten f. Seefahrer. Hrsg. v. d. hydrograph. Amte d. Reichs-Marine-Amts. 23. Jahrg. 1892. (52 Nrn.) Nr. 1. Berlin, Mittler & S. Halbjährlich 1 Mk.

Zeitscrift für Luftschifffahrt u. Physik der Atmosphäre. Red. v. V. Kremser. 11. Jahrg 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Mayer & M. Jährlich 12 Mk.

Physik.

Annalen der Physik und Chemie. Hrsg. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Barth. Jährlich 36 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik u. Chemie. Begründet v. J. C. Poggendorff. Hrsg. v. G. u. E. Wiedemann. 16. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Barth. Für den Band 20 Mk.

Borchardt, B., Grundriss der Physik zum Gebrauche f. Mediziner. Stuttgart, Enke. 3 Mk.

Gibbs, J. W., thermodynamische Studien. Unter Mitwirkg. d. d. Verf. aus dem Engl. übers. v. W. Ostwald. Leipzig, W. Engelmann. 14 Mk.; Einbd. 75 Pf.

Gotard, H., üb. die Auflösung v. Reflexen durch Summation elektrischer Hautreize. Dorpat, Karow, Verl. 1 Mk.

Handbuch der Physik. hrsg. v. A. Winkelmann. 11. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 165.—168. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Neumann, C., üb. e. eigenthümlichen Fall elektrodynamischer Induction. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

Physik, praktische. Illustrirte Wochenschrift f. die gesamten wissenschaftl., techn. u. industriellen Interessen der Mechanik, Optik, Elektrotechnik u. s. w., sowie Organ f. den physikal. Unterricht. Hrsg. v. M. Krieg. 5. Jahrg. 1892. Nr. 1. u. 2. Magdeburg, Faber'sche Buchdruckerei. Halbjährlich 3 Mk.

Revue, physikalische. Hrsg. v. L. Graetz. 1. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Stuttgart, Engelmann. Vierteljährlich 8 Mk.

Sumpf, Anfangsgründe der Physik. 5. Aufl. Hildesheim, Lax. 1 Mk. 50 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. d. physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 36. (Schluss-) Lfg. Wien, Hartleben. 50 Pf.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin im J. 1891. 10. Jahrg. Hrsg. v. A. König. Berlin, Georg Reimer. 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften v. dem J. 1890—1891. VII. Folge, 4. Bd. Prag, Rivnáč, Verl. Kart. 12 Mk. 80 Pf.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn, Red.: J. Fröhlich. 9. Bd. (Octbr. 1890 — Octbr. 1891.) 1. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. IV. u. V. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Burkhardt, H., Bernhard Riemann. Vortrag. Göttingen, Vandenhoeck & R. 40 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 58. Bd. Leipzig, Freytag. Geb. 70 Mk.

Mittheilungen aus dem Gebiete der angewandten Naturwissenschaften. Hrsg. u. unter Mitwirkung v. H. Rose, red. v. H. Wilhelm.

III. Jahrg. 1892. (24 Nrn.) Nr. 1. Mähr.-Schönberg, Dr. Hugo Wilhelm's Selbstverlag. Jährlich 6 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. III. Bd. 2. Hft. Red. v. Hoppe, Repsold u. Busche. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Mittheilungen, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus den Sitzungsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1892. 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. Jährlich 8 Mk.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. d. Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 9. Berlin, H. Paetel. 80 Pf.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahrg. 1891. Prag, Rivnáč, Verl. 7 Mk. 40 Pf.

Litterarischer Bericht

XLIV.

Methode und Principien.

Die Grundlage der Geometrie ohne specielle Grundbegriffe und Grundsätze mit Einschluss einer vollständigen Darstellung der reinen Sphärik einheitlich dargestellt von Johann Jakob Iselin (eidgen. diplom. Arzt von Glarus). Bern 1891. K. J. Wyss. 4°. 264 S.

Der Gedanke, aus dem die vorliegende Arbeit entsprungen ist, findet sich in der Einleitung klar dargelegt. Die Principien der Geometrie zeigen einige Begriffe und einige Sätze, welche nach bisheriger Methode nicht begründet werden konnten, daher als Grundbegriffe und Grundsätze angenommen werden mussten. Der Verfasser ist nun der Ansicht, diese Mängel beruhten nur auf unrichtiger Entwickelungsfolge. Er meint eine Anordnung gefunden zu haben, bei der keine Voraussetzung nötig sei und das System der Begriffe und Sätze sich in strenger Folge ergebe. Die Ausführung, welche der Hauptsache nach den Inhalt des Buches ausmacht, wenn derselbe auch vielfach über die notwendigen Principien hinausgeht, hat den Erfolg auf folgende Umstellung gebaut: statt der linearen Gebilde ,Ebene und Geraden, macht die Kugel den Anfang; jene werden aus ihr durch Uebergang zur Grenze und durch Schnitte gewonnen (eine Deduction die auch von andern Autoren versucht ist). Dass nun das eigentliche Ziel, die Beseitigung aller Voraussetzungen, in vorliegender Bearbeitung gänzlich verfehlt ist, kann dem Leser derselben schwerlich entgehen. Dass jede Theorie, also auch die Geo-

metrie Voraussetzungen haben muss, ist selbstverständlich. Das „neue System“ stellt sich bei gegenwärtiger Abfassung dem alten System gegenüber gerade dadurch in Nachteil, dass die factischen Voraussetzungen, die teils mehr, teils weniger offenbar darin gemacht sind, nie ausgesprochen werden. Die Congruenz von Raumgebilden als notwendiger Grundbegriff, die empirischen Eigenschaften des Raumes als notwendige Grundsätze hätten zunächst anerkannt werden müssen, da sie beständig in Anwendung kommen. Hiervon kann man leicht absehen. Das Ganze charakterisirt sich schon in unverhehlter Weise durch seinen Anfang als principiell unlogisch und entzieht dadurch alles Folgende der Controle, nämlich durch Einführung und beständige Verwendung unmöglicher Begriffe. Unmittelbar und ohne Versuch einer Erklärung wird das absolute Unendliche (∞) als Grösse behandelt und die Linie eine Summe von Punkten, die Fläche eine Summe von Linien u. s. w. genannt. Als Symbole sind solche Ausdrücke offenbar nicht zulässig, wo die logische Bündigkeit in Frage steht; man müsste verlangen, dass der Autor auch im Stande wäre, die Symbole durch Worte von eigentlichem Sinne zu ersetzen, das aber wäre, um es bei allen Anwendungen zu vollziehen, eine Aufgabe, die dem gesamten vorausgesetzten Problem ziemlich gleich käme; ehe es geschehen ist, lässt sich nicht ersehen, wieviele Lücken der Deduction dann zutage kommen würden, die unter der Decke der Symbole verborgen waren. Nach allem ist das Buch weit entfernt das Versprochene zu leisten. Ueberhaupt muss man darauf verzichten auf dem hier eingeschlagenen Wege ein Lehrsystem zu schaffen, das als Grundlage des Unterrichts das euklidische zu ersetzen vermöchte, weil hier die Gesichtspunkte des letztern, Beginn in den einfachsten Gebilden und synthetischer Fortgang, gar nicht in Betracht gezogen sind. Lässt man diese Bestimmung des Buchs fallen und betrachtet es als wissenschaftliche Untersuchung, und zwar ohne Anspruch ein bestimmtes Ziel erreicht zu haben, so bietet es manches anregende dar. Zuerst werden die bisherigen Grundbegriffe in der Weise des Verfassers discutirt. Der 2. Teil trägt das „neue System“ vor. Er beginnt mit dem Euler'schen Satze von den Polyedern (unter Voraussetzung successiven Angrenzens der Flächen). Dann werden die Kugel, die Schnitte der Kugeln, die sphärische Geometrie, die Rotationsflächen und solche 2. Grades behandelt. Dann folgt durch Uebergang zur Grenze die Geometrie der Ebene und der Geraden. Die Lehrsätze werden als Folge vorhergehender Erörterung, nie mit nachfolgendem Beweise aufgestellt. „Benamsungen“ werden, unterschieden von Definitionen, in grosser Anzahl gegeben, die meisten dem gewöhnlichen Gebrauche gemäss, andre auch neu erdacht, wegen Länge der Erklärung nicht leicht zu verstehen.

Hoppe.

Ueber den Ursprung des Zahlbegriffs aus dem Tonsinn und über das Wesen der Primzahlen. Von W. Preyer in Berlin. Hamburg und Leipzig 1891. Leopold Voss. 36 S.

Der Verfasser stellt die Ansicht auf, dass der Mensch auf den Zahlbegriff zuerst durch die Empfindung der Harmonie der in einfachen Schwingungsverhältnissen stehenden Töne geführt werde. Da nun das System der Harmonie nicht die vollständige Zahlenreihe ergibt, so seien eben die Lücken derselben das erzeugende Element der Primzahlen, von diesem Gesichtspunkte aus müsse man freilich 2 und 3 (warum nicht auch 5?) von der Reihe der Primzahlen ausschliessen. Der schlagendste Einwand gegen die Ansicht ist ohne Zweifel der, dass kein Kind, ehe es zum Verständniss der Akustik reif ist, von einer Beziehung der Octave zur Zahl 2, etc. etwas weiss und doch schon längst vorher zählen kann. Weder gegen diesen Einwand indes, noch überhaupt verteidigt die Schrift jene Ansicht, sondern sucht nur soviel als möglich Beziehungen der Musiktheorie zur Arithmetik aufzuweisen, ohne je darauf zurückzukommen, welche das psychische prius sei. Gleich als ob der Ursprung des Zahlbegriffs ein unergründetes Geheimniss wäre, scheint also der Verfasser die Entdeckung jener Quelle als einer nur möglichen schon für eine vorläufig hinreichende Leistung zu halten. Erwähnt mag noch werden, dass der Verfasser das hexadische Zahlsystem empfiehlt, damit das Bereich der Primzahlen auf die Einerziffern 1 und 5 beschränkt wird. Hoppe.

Die Gravitation ist eine Folge der Bewegung des Aethers. Von Karl Schlichting, Lüben i. Schl. Lüben 1891. L. Goldschiener. 11 S.

Der Verfasser nimmt eine gleichmässige Bewegung der als Kugeln gedachten Aetheratome in gemeinsamer Richtung an. Diese gehen zum Teil wirkungslos durch die Zwischenräume der Körpermolecüle, zum andern Teil erteilen sie dem Körper durch Stoss eine Bewegung. Treffen dann die durchgeströmten Atome in verminderter Anzahl einen zweiten Körper, so ist ihre Wirkung auf ihm schwächer, und relative Annäherung beider ist die Folge. So wird dann die Erscheinung der Attraction, d. h. für eine einzige momentane Lage der Körper erklärt. Manche Rechnung wird geführt, doch steht die physikalische Deutung mit den Resultaten in keiner sichtlichen Verbindung. Hoppe..

Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Von F. Pietzker, Oberlehrer am

Gymnasium zu Nordhausen. Mit 10 Figuren im Text. Braunschweig 1891. Otto Salle. 104 S.

Der Verfasser verspricht in der vorliegenden Schrift die nichteuklidische Geometrie in der von ihren Autoren, Helmholtz, Riemann und Beltrami geschaffenen Gestalt und die Mehrdimensionengeometrie durch Nachweis von Widersprüchen zu widerlegen. Da die Behandlungsweise von vorn herein den Eindruck einer vortrefflichen Beherrschung des Gegenstandes, Vorurteilsfreiheit, Umsicht und Sogfalt macht, so muss die genannte Ankündigung, auch wenn man die Ueberzeugung hat, dass sie aus Irrtum hervorgeht, Aufmerksamkeit in hohem Grade und die Begierde erwecken die Widersprüche kennen zu lérnen, die der Verfasser gefunden haben will. Allein in dieser Erwartung findet sich der Leser gänzlich getäuscht: zum Nachweis des Widerspruchs kommt es gar nicht; die bei der Vorbereitung bewiesene Sorgfalt wird jedesmal bei Seite gesetzt, sobald eine exacte Entscheidung bevorsteht: der definitive Schluss wird in allgemeinen Worten unbekümmert um deren Deutung und ohne Eingehen auf den sachlichen Inhalt gezogen, und was ihm an Bündigkeit fehlt, durch starke Betonung des Resultats ersetzt. Bei Beurteilung der Schrift müssen wir auf den wesentlichen Unterschied der zwei in Rede stehenden Theorien ein grösseres Gewicht legen, als es der Verfasser tut. Die nichteuklidische Geometrie operirt mit unfertigen Begriffen, nämlich solchen, die wegen des Fehlens gewisser Merkmale eine grössere Allgemeinheit besitzen; ihre Aufgabe ist keine Fortbildung, sondern eine rückgängige Prüfung der Basis einer durch ihre Erfolge bereits gesicherten Wissenschaft; sie ist kein Teil oder Zweig der letztern, eine weitere Ausdehnung unabhängig von jener didaktischen Bestimmung möchte sich schwerlich rechtfertigen lassen. Die Mehrdimensionengeometrie hingegen steht ganz auf dem Boden der euklidischen, sie bedarf keiner neuen Grundbegriffe, und alle ihre Gebilde und Lagenverhältnisse sind (unendlich mehr als erforderlich) durch euklidische eindeutig bestimmt. Sie ist kein notwendiger, aber ein nützlicher peripherischer Zweig, gerechtfertigt durch eine grosse Anzahl von Sätzen, welche der Geometrie von 1, 2 und 3 Dimensionen durch Unterordnung unter allgemeinere Gesetze eine Beleuchtung erteilen, eine Rechtfertigung die hiernach dadurch bedingt ist, dass sie durchschauliche Gesetze producirt. Die Idealität beider Speculationsbereiche charakterisirt dieselben überhaupt nicht, weil die meisten Gegenstände der Mathematik ideell sind. In Betreff der nichteuklidischen Geometrie müssen wir uns hier auf einige Bemerkungen beschränken. Es werden zuerst bedenkliche Folgen derselben genannt, dann ihre Unvereinbarkeit mit dem Princip der gleichmässigen Gestaltung des Raumes zu

beweisen versucht, dann die Beweiskraft der Raumtheorien von Helmholtz, Riemann und Beltrami untersucht. Auffällig ist zunächst, dass der Verfasser nach wiederholten Aeusserungen den Begriff der Congruenz als gegeben durch die Gleichmässigkeit des Raumes betrachtet, noch mehr, dass er durch eine citirte Stelle, wo Helmholtz den Sachverhalt auseinandersetzt, auf seinen Irrtum nicht aufmerksam wird, also jene Stelle gar nicht zu verstehen scheint. So belanglos die Sache an sich sein mag, so macht sie doch die richtige Auffassung der von ihm kritisirten Theorien etwas zweifelhaft. Sein Haupteinwand gegen dieselben ist nämlich, dass die Geraden sich nicht umgekehrt decken; zwar seien für die Deckung umständliche Beweise gegeben, deren Richtigkeit er nicht bestreitet, doch seien dieselben unzureichend. Die vermisste Untersuchung, welche er nun selbst in Angriff nimmt, bezieht sich nicht auf den Verlauf der Geraden, sondern nur auf ihre Endpunkte: er sucht ein Coordinatensystem, welches den zweiten Endpunkt vom ersten aus ebenso bestimmt wie der ersten vom zweiten aus. Weil er für 3 Dimensionen ein solches im nichteuklidischen Raume nicht findet, so schliesst er, dass der nichteuklidische Raum unmöglich sei. Dabei ist folgendes zu bemerken. Nimmt man den Congruenzbegriff als gültig an, d. h. betrachtet man ein einziges Gebilde bei seiner Translocation als unveränderlich, so ist es selbstverständlich, dass das System der 2 Punkte, als starres betrachtet, sich in umgekehrter Lage decken muss', ohne dass daraus ein Schluss auf die Gleichmässigkeit des Raumes gezogen werden kann. Die Deckung der geraden Verbindung folgt aus dem Satze, dass eine Gerade durch 2 Punkte bestimmt ist. Dies und dass die Gerade in dem definirten Raume liegt wenn 2 ihrer Punkte darin liegen, ist ohne Zweifel in der Doctrin bewiesen. Dass dennoch kein Coordinatensystem gleichmässig, umkehrbar und vertauschbar gefunden werden kann, wenn man sich, wie es hier geschieht, auf Kürzeste als Coordinatenlinien beschränkt, ist nicht auffällig, da auf keiner nicht abwickelbaren Fläche zwei Scharen Kürzester ein regelmässiges System ergeben, und doch die positiv gekrümmte Kugelfläche einen gleichmässigen Raum darstellt. So ist denn auch hier der definitive Schluss durch nichts motivirt; dem Raume wird schuld gegeben, was Schuld der Abmessungsweise innerhalb desselben ist, ein Fehler der in naher Verbindung damit steht, dass der Verfasser mit der Gleichmässigkeit des Raumes den Congruenzbegriff als gegeben betrachtet, als ob man nicht in jenem auch nicht congruente Gebilde construiren könnte. Vorstehendes soll keine Widerlegung der entwickten Ansicht des Verfassers sein, sondern nur zeigen, warum wir seine Behauptung. die nichteuklische Geometrie führe auf Widersprüche, nicht als einleuchtend dargetan anerkennen können. Anders liegt nun

die Sache in Betreff der Mehrdimensionengeometrie; denn diese besteht ganz unabhängig von ihren Bearbeitern, lässt sich also rein objectiv beurteilen. Der Verfasser wird hier auf sie durch den Umstand geführt, dass Riemann und Beltrami die nichteuklidische Geometrie für gleichbedeutend mit der Geometrie eines constant gekrümmten Raumes erklären, eine Auffassung, welche offenbar ihre Möglichkeit als bedingt durch die Möglichkeit einer mindestens vierfachen Mannigfaltigkeit darstellt. Hieraus erwächst dem Verfasser ein zweiter Weg zur Widerlegung der nichteuklidischen Geometrie, indem hierzu schon die der Mehrdimensionengeometrie allein genügen würde. Zur Ausführung stellt er im letzten Abschnitte eine „Betrachtung“ an, die er am Schlusse eine „unmittelbar die vollkommene Unmöglichkeit der vierten Raumdimension klarlegende“ nennt, der aber zu einem Beweise geradezu alles, namentlich das Vorkommen der zu beweisenden Unmöglichkeit, fehlt. Es werden nach einander die Gebilde von 1, 2, 3, 4 Dimensionen betrachtet und an ihnen einzeln ein gewisser Gegensatz und eine „doppelte Auffassung“ hervorgehoben. In wiefern nun der gemeinte Gegensatz und die 2 Auffassungen, die bzhw. nur bei 1 und 2 Dimensionen ausgesprochen sind, auch bei 3 und 4 Dimensionen als d i e s e l b e n verstanden werden sollen, um einen Sinn zu ergeben, wenn weiterhin schlechthin von der doppelten Auffassung die Rede ist, lässt sich schwer erraten; jedenfalls stimmt es nicht mit der Absicht „klarzulegen“, dass so dehnbare Begriffe, gerade wo ein wichtiger Schluss gezogen werden soll, ohne vollkommen entwickelte Angabe ihres Inhalts gebraucht werden. Doch ist es auch gar nicht nötig aus der langen Betrachtung irgend etwas zu bestreiten. Wir wollen zugeben, dass ein gewisser gemeinsamer Gegensatz und eine gewisse gemeinsame doppelte Auffassung innerhalb der ersten 3 Dimensionen bestehen, in der 4. Dimension hingegen fehlen. Dies sagt offenbar nichts weiter, als dass die 4. Dimension eine Eigenschaft nicht hat, welche die 3 ersten besitzen, d. h. dass sie begrifflich in diesen nicht enthalten ist. Um einen Widerspruch in ihrer Idee aufzuweisen, hätten 2 Betrachtungen zu unvereinbaren Resultaten führen müssen, und von solchen ist nirgends die Rede. Auch die Forderung der Anschaulichkeit, welche an andrer Stelle erhoben wird, ist in gleichem Falle; denn deren Bedingungen sind aus dem euklidischen Raum entnommen. Die obige Behauptung der Unmöglichkeit einer 4. Dimension ist demnach nicht einmal formell begründet. Im vorletzten Abschnitt der Schrift, wie hier noch nachzuholen ist, bestreitet der Verfasser das Recht die von Riemann ans Licht gestellten speciellen Eigenschaften des euklidischen Raumes als solche zu bezeichnen, welche aus der Erfahrung stammten, indem er auf die Unmöglichkeit hinweist durch Messung der Winkel eines

sehr grossen Dreiecks die Frage zu entscheiden, ob deren Summe 2 Rechte beträgt. Dies verbunden mit einer spätern Erklärung, dass nämlich Grössenvergleichung erst durch das Bewusstsein der Fähigkeit möglich sei, zeigt, dass der Verfasser die Rolle der Erfahrung noch gleicherweise verkennt wie die speculative Philosophie, die mit der inductiven Erkenntniss nichts anzufangen weiss. Dass seit Bako's Reform der Erkenntnisslehre die Naturwissenschaft den entgegengesetzten Forschungsweg verfolgt von dem des Descartes, welcher nur von einem sichern Anfang einen sichern Fortgang der Erkenntniss für möglich hielt, dass für die empirischen Wissenschaften vielmehr der Anfang ganz gleichgültig ist, und die Sicherheit allein in den Erfolgen liegt, scheint auf das Urteil des Verfassers unwirksam geblieben zu sein: er meint noch immer, die Erfahrung, welche die Quelle der geometrischen Grundbegriffe genannt werde, müsse eine präcise Beobachtung sein. Die roheste Erfahrung eines Kindes, welches Dinge so lange für gleich hält, bis es die Verschiedenheit gewahr wird, nötigt es zur Vergleichung noch lange ehe es von seiner Fähigkeit etwas weiss; eine ebenso rohe Erfahrung reicht hin den Vorzug der geraden Linie vor andern Linien zu bemerken, ohne dass es die Bedingungen der Geradheit kennt. Als eine zunächst unwissenschaftliche Idee wird die Gerade von Euklid aufgenommen, bildet die Grundlage eines wissenschaftlichen Systems und zeigt sich Jahrtausende lang als eine Errungenschaft; erst in neuster Zeit denkt man daran nach dem exacten Begriffe zu fragen. Ebenso beruhen die von Riemann genannten Eigenschaften des Raumes auf Erfahrungen, die ohne Wissenschaft gemacht werden, und deren Ursprung er nicht näher zu bestimmen braucht, weil nichts davon abhängt. Den dialektischen Kunstgriff, welchen Kant gebraucht um die Bakonische Erkenntnisslehre beiseite zu schieben und wieder auf die Cartesische einzulenken, ahmt der Verfasser nach: gleichwie Kant setzt er der Erfahrung angeborene Fähigkeiten entgegen. Die Nichtigkeit des Einwandes ist leicht genug zu enthüllen. Die Fähigkeit etwas zu tun unterscheidet sich vom Tun selbst allein durch die Willensfreiheit, (welche bekanntlich das Kind erst mit der Zeit gewinnt, so dass es keinen Sinn hat, wenn man die Fähigkeit angeboren nennt). Auf dieses Tun, d. i. auf die psychische Genesis, geht aber Kant grundsätzlich nie ein, er urteilt wie ein Prophet über ein Gebiet, das er nie betreten hat. Wie von Kant wird auch vom Verfasser die Bedeutung der Erfahrung, welche in Wirklichkeit die Erwerbung von Fähigkeiten in sich schliesst, willkürlich auf diejenige eingeschränkt, welche bei bewusster Forschung gemacht wird, weil Beide, vom Cartesischen Vorurteil beherrscht, nicht begreifen, wie unwissenschaftlich gefasste Ideen productiv für die Wissenschaft sein können. Neben der Sinnlichkeit als Quelle der Ideen eine ur-

sprüngliche Quelle im Geiste setzen wollen heisst nicht die Aufgabe des Nachweises der Entstehung der Ideen der Lösung näher führen, sondern die begonnene Untersuchung aufs neue unter die bornirte Meinung stellen. Hoppe.

Aesthetische Factoren der Raumanschauung. Von Theodor Lipps in Breslau. Hamburg und Leipzig 1891. Leopold Voss. 91 S.

Das Buch handelt von den Täuschungen des Gesichtssinnes Gleich im Anfang wird das Vorhandensein zweier Ansichten constatirt: Manche suchen den Grund der Täuschungen in unvollkommenen Functionen der Organe, Andere in Irrungen des Urteils. Wer beide Ansichten neben einander bestehen lässt, müsste wenigstens jede für einseitig erklären, weil sie den Fall, dass beide Gründe zusammen wirken, gar nicht in Betracht ziehen. Indessen zeigt sich bald, dass erstere Meinung in sich unklar ist, daher ganz ausser Betracht fällt. Der Gesichtseindruck ist eine psychische Tatsache, die, weil sie nichts aussagt, auch nichts irriges aussagen kann. Erst mit dem Denken beginnt die Gefahr des Irrens. Demnach verfährt der Verfasser ganz correct, welcher, ohne sich auf Bestreitung der erstern Ansicht einzulassen, sich einfach für letztere erklärt. Dagegen möchte es wol nicht gerechtfertigt sein, dass er mit Wahrnehmung den unmittelbaren, also subjectiven Sinnesact bezeichnet. Dem ausnahmlosen Wortgebrauche gemäss ist das Wahrgemomene stets ein Objectives. Beide Bedeutungen klar zu unterscheiden ist in hohem Masse Grund. Denn die Beziehung der Wahrnehmung auf das Objective involvirt immer ein Urteil, und dieses kann irren, was beim reinen Sinneseindruck sinnlos ist. Indessen ist der vulgäre Begriff der Wahrnehmung wegen Inconsequenz überhaupt keines exacten Gebrauchs fähig; denn sobald das objectivirende Urteil und seine Begründung zum Bewusstsein kommt, wie z. B. bei der das Anschauen des Mondes begleitenden plastischen Vorstellung, nennt man die objective Anschauung nicht mehr Wahrnehmung, ihr Begriff beschränkt sich auf das Bereich des Unbewussten. Die hieraus entspringende Unklarheit erklärt einerseits die irrige Meinung von der Täuschung durch die Sinne, andrerseits die Veränderung des Begriffs der Wahrnehmung von Seiten des Verfassers, welcher denselben vielleicht dadurch exact zu gestalten hofft; im vorliegenden Falle lässt die nominelle Abweichung nichts missverständlich, weil gerade jene Täuschungen, welche aus der vulgären Auffassung des Wahrnehmens entspringen, Hauptgegenstand der Betrachtung sind. Der Verfasser stellt nach Vorgang von Helmholtz zu Anfang zwei

Regeln auf. Die erste setzt eine gewisse Uebung voraus die Gesichtseindrücke in die objective Gestaltung zu übersetzen. Die Täuschung besteht darin, dass wir die geübte Methode der Uebersetzung auch gewohnheitsmässig auf Fälle anwenden, wo der Grund dazu fehlt. Die zweite Regel spricht das Obenbemerkte aus: da der Act der Objectivirung ein unbewusster ist, da das in der Wahrnehmung enthaltene Urteil mit dem Sinneseindruck verschmilzt, so fehlt auch dem Geiste die Controle der objectiven Richtigkeit des Urteils, und es sind viele Irrungen möglich. Die genannten Gründe von Täuschungen mögen unbestritten bleiben; aber ein starker Fehler ist es doch, dass die bei der ersten Regel anerkannte und vorausgesette Fähigkeit des Geistes von da an durchweg ignorirt wird. Es ist klar, dass, wenn und soweit die Uebersetzung der Sinneseindrücke in die objective Gestaltung durch Erfahrung zur Gewohnheit wird, alle Gründe der Täuschung unwirksam sein müssen. Als Beleg dafür, dass der Verfasser diese Rectification unbeachtet lässt, sei angeführt, dass er von dem auf Seite 8 gezeichneten Quadrat behauptet, es scheine vertical gestreckt, während es doch, trotz aller Gründe der Täuschung, die wol statthaben mögen, beim ersten Anblick wie ein richtiges Quadrat aussieht. Gegen die völlige Unwirksamkeit der Täuschung könnte man noch einwenden, sie sei zu gering um bemerkt zu werden. Nehmen wir daher einen andern Fall hinzu, wo Uebung und Nichtübung zur Vergleichung dicht bei einander stehen. Blickt man innerhalb eines bedeckten Säulengangs von einen Ende zum andern, so scheinen längs des horizontalen Bodens beide Säulenreihen vollkommen parallel, an der Decke hingegen stark convergirend. Die Erklärung ist einfach. Unter uns auf dem ebenen Fussboden haben wir auf allen Wegen Anlass und Gelegenheit unsere Anschauung zu rectificiren, über uns ist freie Luft, die weder Anlass noch Gelegenheit bietet uns Uebung darin zu erwerben. Der Fall zeigt deutlich, dass der Einfluss der Uebung sehr gross ist. Dass der Verfasser ihn nirgends in Betracht zieht, mag wol mit seiner Erklärung in Zusammenhang stehen, ihn interessire vorzugsweise die zweite Regel; mit der ersten Regel wird dann .die darin erwähnte Rectification vergessen. Die Folge ihrer Vernachlässigung ist natürlich, dass die auf Grund der vorgetragenen Lehren angesagten Erscheinungen in der Wirklichkeit bald zutreffen, bald nicht, dass man daher vor den Lehren wenig Achtung, an ihrer Anwendung wenig Interesse haben kann. Ein grosser Teil der Schrift behandelt die Anwendung auf die Kunst, namentlich auf die Architechtonik, bei der es teils auf Längen-, teils auf Winkelschätzung ankommt, der übrige Teil die Täuschungen bei der Kreislinie. Das Urteil des Beschauens wird aus dem gemeinsamen Princip interpretirt, dass derselbe der Linie eine Bewegung und dieser eine

Kraft oder Tendenz unterlegt. Da die möglichen Tendenzen häufig entgegengesetzte sind, daher die zur Erklärung angezogenen mehr und mehr als willkürliche erscheinen, so ist die Schlussbemerkung des Verfassers an ihrer Stelle, dass er nicht beabsichtigt habe erschöpfende Regeln für alle Fälle zu geben, sondern nur dahin zu wirken, dass Jeder sich die Gründe seiner Täuschungen bewusst werden könne. Offenbar ist dies an sich eine hinreichende Leistung. Sogar über die genannte Bestimmung hinaus würde auch die Kunst, nämlich für momentanen Effect in Aufführungen, Gebrauch davon machen können. Aber die Baukunst in Betreff ihrer Jahrhunderte unverändert dauernden Werke ist dadurch schlecht gerechtfertigt, wenn sie nach einseitiger Theorie vorgesehene Sehfehler durch angepasste eigene Fehler ausgleichen will. Es ziemt ihr nicht, vorkommenden Urteilsschwächen der Einen zu dienen und Andre zu gleichen Täuschungen zu zwingen, sondern für alle Zeiten geltende Muster zur Ausbildung des Urteils aufzustellen. Dieser Gesichtspunkt fehlt in dem Abschnitt „Anwendungen auf die Kunst", ganz entsprechend der Verschweigung der Rectification der Anschauung.

Hoppe.

Die Einheit der Naturkräfte. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Von P. Angelo Secchi, weiland Director der Sternwarte des Collegium Romanum. Autorisirte Uebersetzung von Professor Dr. L. Rud. Schultze. Zweite, revidirte Auflage. Mit 61 in den Text gedruckten Holzschnitten. Braunschweig 1891. Otto Salle. 333 + 379 S.

Das Buch handelt von den physikalischen Doctrinen der anorganischen Körper aus dem Gesichtspunkte, dass dieselben dahin ausgehen alle Kräfte auf Bewegung zurückzuführen, und zwar die 4 Bücher einzeln von der Theorie der Wärme, des Lichtes, der Elektricität und fernerer Untersuchungsgebiete. Voraus geht eine allgemeine Einleitung. Die Bedeutung dessen, was das Buch darbietet, kann man von mehr als einer Seite auffassen. Einerseits ist es ein eingehender Bericht über den heutigen Standpunkt der Lehren der soviel als nötig auch deren successiven Fortschritt darlegt, andrerseits eine populäre Einführung unkundiger Leser in das wissenschaftliche Gebiet und in das Wesen und Ziel der Forschung. Eine dritte Seite der Betrachtung ist die philosophische; eine vierte würde die Frage ergeben, welche Gedanken dem Verfasser eigentümlich sind, doch findet sich wenig Anhalt dafür, weil das Eigene nirgends vor dem Entlehnten hervorgehoben wird. Den ersten Gesichtspunkt und damit zugleich den gesamten doctrinären Stoff des

Buchs können wir übergehen; der Name des Verfassers bürgt für die materielle Richtigkeit. Seine Philosophie, wie wir im voraus bemerken, weil es auch den zweiten Gesichtspunkt, die Belehrung der Laien, berührt, steht durchaus auf dem Boden der empirischen Wissenschaften, aus denen die Logik, d. h. Begriffe und Schlüsse gewonnen sind. Der Metaphysik gegenüber hat der Verfasser die jetzt übliche Maxime adoptirt, sie von Zeit zu Zeit anzuführen und in respectvoller Entfernung an ihr vorbeizugehen. In einem Punkte jedoch bleibt er sich nicht treu. Von den Kräften geht das Ganze aus, und gerade der Begriff der Kraft bleibt in ein mystisches Dunkel gehüllt. Bei allen andern Begriffen wird die Bedeutung in der Wissenschaft klar geschieden von der nichts beitragenden Vorstellungsweise. Ebenso hätten auch die Kräfte, nach Abstreifung der bildlichen Vorstellung, die wir damit verbinden, rein aus der Rolle, wie sie in der Wissenschaft spielen, erklärt werden sollen. Diese ist überall dieselbe: ihr gemäss sind sie diejenigen constituirenden Elemente der Vorgänge, welche erkennbaren Gesetzen unterworfen sind. Statt dessen ist in der Einleitung nur von der Entstehung der Idee der Kraft etwas gesagt; das 1. und 2. Buch, welche mehr als die folgenden der Aufklärung der Unkundigen gewidmet sind, wenden das Wort oft an ohne je über den Sinn Auskunft zu geben; im 3. Buch wird bei Kritik einer Ansicht über die Elektricität als eine Kraft etc. geäussert, damit wäre nichts gesagt, mithin zugestanden, dass diesem Begriffe die Klarheit noch fehlt. Aus dem Vorstehenden lässt sich das Motiv nicht erraten, warum die Erklärung überall gemieden wird. Erst das 4. Buch scheint ein solches zu verraten. Zunächst ist es auffällig, dass unter den Zweigen der Physik, für welche der Verfasser sein Problem bereits gelöst vorfand, nicht die Mechanik vorangestellt wird. Im 4. Buche sieht man dann, dass er sie wirklich nicht dazu rechnet, sondern auf ihrer Seite grössere Schwierigkeiten statuirt. In der Tat nimmt er keine Notiz davon, dass man die Theorie der Wärme, des Lichtes u. s. w. so wie er sie gibt, die auf Mechanik zurückgeführte nennt. Dass er nicht gewusst haben sollte, dass sein Problem für Mechanik und zwar für sie zu allererst von jedermann als gelöst betrachtet wird, woraus hervorgeht, dass die Reduction auf Mechanik mit der Reduction auf Bewegung gleichbedeutend ist, lässt sich schwer glauben. Allein das 4. Buch bringt auch positive Aussagen, die das Unglaubliche bestätigen. Z. B. wird es (S. 270) eine doppelte Aufgabe genannt, den vorangehenden Zustand zu erklären und uns von der eingetretenen Aenderung Rechenschaft zu geben — als ob nicht ersterer durch eben jenes Gesetz der Aenderung erklärt würde wie der nachfolgende Zustand. Hierzu kommt noch, dass der Verfasser die einfachste Kraft, die Massenanziehung durch ihre gesamte Be-

deutung in der Wissenschaft für nicht erklärt ausgibt. Im Capitel „allgemeine Massenanziehung" entfaltet er in vortrefflicher Klarheit die ganze Genesis des Begriffs bis zu Newton's Theorie, fügt auch hinzu, dass derselbe für allen wissenschaftlichen Gebrauch zur Vollendung gelangt sei, beharrt aber, trotz seines Entschlusses sich nicht auf Metaphysik einlassen zu wollen, dennoch auf seiner Meinung, eben wegen jener Vollendung sei die Hauptfrage, nämlich nach Wesen und Ursache der Massenanziehung übergangen worden (auf seinen Versuch sie auf Bewegung zu reduciren gehen wir nicht ein, weil er schwer zu verstehen und im Grunde gegenstandslos ist). Das Letztgenannte führt mehr als alles andre zu der Auslegung, dass der Verfasser nicht gewagt hat der grossen Schar von Schriftstellern, die sich in neuster Zeit dadurch einen Ruf erworben haben, dass sie die Schwerkraft nicht begreifen können, entgegenzutreten und nur darum über dem Begriffe der Kraft ein solches Dunkel erhält wie über keinem andern. Behauptung liegt fern, nur vermögen wir keine andre Auslegung zu finden. Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 21. Bd. Jahrg. 1889. 2. Hft. Berlin, Georg Reimer. 8 Mk.

Weissenborn, H., zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & M. 3 Mk.

Methode und Principien.

Bergbohm, J., neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik. Wien, Selbstverlag. 60 Pf.

— neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- u. Numeralrechnung. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Galilei, G., Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische u. kopernikanische. Aus dem Ital. übers. u. erläutert v. E. Strauss. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Hertz, H., Untersuchungen üb. die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Müller, M., das räumliche Wirken u. Wesen der Elektrizität u. d. Magnetismus. Hannover-Linden, Manz & L. 3 Mk. 50 Pf.

Schwartze, Th., Elektrizität u. Schwerkraft im Lichte einheitlicher Naturanschauung. Berlin, Polytechn. Buchh. 1 Mk. 80 Pf.

Wolff, J., üb. Lotze's Metaphysik. Fulda, Fuldaer-Actien-Druckerei. 1 Mk. 75 Pf.

Lehrbücher.

Boymann, J. R., Lehrbuch der Mathematik f. Gymnasien, Realschulen, u. andere höhere Lehranstalten. 2. u. 3. Tl. 8. Afl; besorgt v. Vering. Düsseldorf, Schwann. 5 Mk. 25 Pf.; geb. 5 Mk. 85 Pf.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik, f. den Schulunterricht bearb. 1. Tl. Arithmetik u. Algebra. Asg. f. Gymnasien. Neu bearb. v. H. Langguth. 34. Afl. Breslau, Hirt. Geb. 1 Mk. 65 Pf.

— dasselbe. Planimetrie. 93.—95. Afl. Ebd. Geb. 1 Mk. 65 Pf.

— dasselbe. 3. Tl. Ebene u. sphärische Trigonometrie. Nebst Uebungsaufgaben. 21. Afl. Ebd. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Leitfaden der Elementar-Mathematik. 1. Tl.: Planimetrie. 8. Afl. 1 Mk. 80 Pf. 3. Tl.: Ebene Trigonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie, propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. 6. Afl. 1 Mk 50 Pf. Berlin, Simion.

Sammlungen.

Aufgabensammlung f. den Unterricht in der Buchstabenrechnung u. Algebra. Hrsg. v. der Gesellschaft der Freunde d. vaterländ. Schul- u. Erziehungswesens in Hamburg. 4. Afl. Hamburg, Boysen. 80 Pf.

Augsburger, J., Rechenbuch f. Vorschulen. (In 3 Hftn.) 3. Hft. 3. Afl. Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Borth, E. F, die geometrischen Konstruktionsaufgaben, f. den Schulgebrauch methodisch geordnet u. m. e. Anleitg. zum Auflösen derselben versehen. 7. Afl. Leipzig, Reisland. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Bothe, A., Rechenaufgaben f. höhere Schulen. Auflösungen zum 1.—3. Hft. (2. Afl.) Annaberg, Graser's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Gaydeczka, J., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra in den oberen Classen der Mittelschulen. Leipzig, Freytag. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Hartmann, B., u. J. Ruhsam, Rechenbuch f. Stadt- u. Landschulen. Ausg. f. das Königreich Preussen. Lehrerheft. 2. Hft. Für das 3. u. 4. Schuljahr verfasst. Frankfurt, Kesselring'sche Hofbuchh., Verl. 1 Mk. 75 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1098.—1127. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Loebnitz, G. Th., Rechenbuch f. Gymnasien, Realgymnasien, Oberreal- u. Realschulen. 1. Tl. 17. Afl. m. e. Nachtrage, enth. Aufgaben zu den Arbeiterversichergn. Hildesheim, Gerstenberg'sche Buchh. 1 Mk.; geb. 1 Mk. 25 Pf.

Löwe, M., u. F. Unger, Aufgaben f. das Zahlenrechnen f. höhere Schulen. Hft. A. f. Sexta. 4. Afl. Leipzig, Klinkhardt. 60 Pf.

Müller, G., Uebungsstoff f. das geometrische Zeichnen. Im Auftrage der königl. württemb. Centralstelle f. Gewerbe u. Handel bearb 10. Afl. Stuttgart, Metzler's Sort. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Tabellen.

Domke, F., nautische, astronomische u. logarithmische Tafeln, nebst Erklärung u. Gebrauchs-Anweisg f. die königl. preuss. Navigations-Schulen. Hrsg. im Auftrage d. königl. preuss. Ministeriums f. Handel u. Gewerbe. Berlin, v. Decker's Verl. 4 Mk. 50 Pf.; geb. 5 Mk. 25 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 36. Afl. Halle, Strien, Verl. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Müller, E. R., vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen u. trigonometrischen Zahlen nebst den erforderl. Hilfstabellen, f. den Schulgebrauch u. die allgemeine Praxis bearb. Stuttgart, Jul. Maier. 60 Pf.

Zimmermann, H., Rechentafel, nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerthe. Asg. 1891. 3.—5. Tausend. Berlin, Ernst & S. Geb. 5 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Heilermann, H., u. J. Diekmann, Lehr- u. Uebungsbuch f. den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. 1. Tl. Die 4 Grundrechngn. Die linearen Gleichgn. 5. Afl. Essen, Bädeker, Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Heilermann, H., Lehrbuch f. den Unterricht in der Algebra an gewerblichen Fortbildungsschulen. 3. Afl. Essen, Geck. Geb. 1 Mk.

Hočevar, F., Lehr- u. Uebungsbuch der Arithmetik f. die unteren Classen der Gymnasien u. verwandten Lehranstalten. Leipzig, Freytag. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Horstmann, A., üb. die Theorie der Lösungen. Heidelberg, C. Winter's Univ.-Buchh. 80 Pf.

Gmeiner, J. A., die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Gutzmer, A., Bemerkungen üb. die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen. (Auszug aus e. an Hrn. M. Lerch gerichteten Briefe.) Prag, Rivnáč, Verl. 12 Pf.

Rogel, F., arithmetische Relationen. Ebd. 60 Pf.

Schapira, H., Theorie allgemeiner Cofunctionen u. einige ihrer Anwendungen. 1. Bd. 2. Thl. 1. Hft. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Studnička, F. J., Beitrag zur Theorie der gemischten Reihen. Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Weierstrass, K., Formeln u. Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesgn. u. Aufzeichngn. bearb. v. H. A. Schwarz. 2. Asg. Berlin, Springer. 10 Mk.

Weltzien, C., üb. die Bedingungen, unter denen e. ganze rationale Function v. mehreren Veränderlichen die vollständige Potenz e. andern darstellt. Berlin, Gaertner's Verl. 1 Mk.

Geometrie.

Augschun, W., Grundzüge der Geometrie m. geometrischen Konstruktions- u. Rechenaufgaben. Berlin, Mittler & S. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Berger, G., Lehre der Perspektive in kurzer, leicht fasslicher Darstellung. Auf die einfachste Methode zurückgeführt f. Architekten, Bauhandwerker, Maler u. Dilettanten. 10. Afl. Leipzig, Scholtze. 2 Mk. 40 Pf.

Bongaertz, J., Vorschule zur Geometrie, nebst Flächen- u Körperberechnung, f. Präparanden, sowie zum Gebrauch in Volks- Fortbildungs- u. Mittelschulen. Freiburg, Herder. 1 Mk. 20 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Breuer, A., die goniometrischen Functionen complexer Winkel Eine Ergänzg. zur algebr. Analysis. Erfurt, Bacmeister. 1 Mk.

— imaginäre Kegelschnitte. Eine geometrische Studie üb. das Wesen u. die katoptr. Deutg. d. Imaginären. Ebd. 1 Mk.

— die einfachste Lösung d. apollonischen Fluctionsproblemes. Eine Anwendg. der neuen Theorie d. Imaginären. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— üb. Conographie. Ein Beitrag zur instructiven Geometrie der Kegelschnitte. Ebd. 1 Mk.

— die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung. Ein Beitrag zur algebr. Analysis. Ebd. 50 Pf.

Breusing, A., das Verebnen der Kugeloberfläche f. Gradnetzentwürfe. Ein Leitfaden f. den Unterricht. Leipzig, Wagner & D. 3 Mk.

Brockmann, F. J., Lehrbuch der elementaren Geometrie. Für Gymnasien u. Realschulen bearb. 2. Tl.: Die Stereometrie. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 80 Pf.

Brückner, J. M., das Ottojanonische Problem. Eine math.-histor. Studie. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk.

Dresch, H., Beitrag zur constructiven Theorie der windschiefen Kegelflächen m. 2 Leitgeraden u. 1 Leitkegelschnitt. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Erler, W., die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauch in der Gymnasialprima bearb. 4. Afl. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Falcke, A., Leitfaden der Geometrie. 12. Afl. Potsdam, Rentel's Verl. 50 Pf.; geb. 60 Pf.

Glinzer, E., Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Tl.: Planimetrie. 5. Afl. Dresden, Kühtmann. 2 Mk.

— Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 2. Tl.: Stereometrie. 2. Afl. Ebd. 2 Mk. 80 Pf.; geb. 3 Mk.

Heyden, R., elementare Einführung in die Lehre der harmonischen Bewegungen. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Kleiber, M., Katechismus der angewandten Perspektive. Nebst e. Anhg. üb. Schattenkonstruktion u. Spiegelbilder. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Kröger, M., Leitfaden f. den Geometrie-Unterricht in Mittelschulen u. gehobenen Volksschulen. 7. Afl. Hamburg, Meissner's Verl. 1 Mk.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Grundlagen v. den Koordinaten und den Kegelschnitten. Berlin, Simion. 50 Pf.

— propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. Pensum der Untersecunda. Ebd. 50 Pf.

Machovec, F., üb. den Zusammenhang der Krümmungshalbmesser der Parabeln u. Hyperbeln höherer Ordnung m. den Krümmungshalbmessern der Dreieckscurven. Prag, Rivnáč, Verl. 12 Pf.

Moecke, E., üb. zweiachsig-symmetrische Kurven 4. O. m. 2 Doppelpunkten. (Fortsetzung u. Schluss.) Gross-Strehlitz, Wilpert. 1 Mk. 20 Pf.

Müller, G., zeichnende Geometrie. Im Auftrage der königl. württemb. Centralstelle f. Gewerbe u. Handel bearb. 5. Afl. Stuttgart, Metzler's Sort. Geb. 2 Mk.

Nagel, v., Lehrbuch der Stereometrie zum Gebrauche in Gymnasien u. Realschulen. 5. Afl. v. Th. Schröder. Nürnberg, Korn'sche Buchh. 1 Mk. 80 Pf.

Panzerbieter, W., üb. einige Lösungen d. Trisektionsproblems mittelst fester Kegelschnitte. Berlin, Gaertner's Verl. 1 Mk.

Pick, G., üb. die conforme Abbildung e. Halbebene auf e. unendlich benachbarten Kreisbogenpolygon. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Rüefli, J., kleines Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst e. Sammlg. v. Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Mittelschulen bearb. 3. Afl. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. Kart. 80 Pf.

Rüefli, J., kleines Lehrbuch der Stereometrie, nebst e. Sammlg. v. Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Mittelschulen bearb. 2 Afl. Ebd. Kart. 80 Pf.

Seeberger, C., Prinzipien der Perspektive u. deren Anwendung nach e. neuen Methode. 5. Afl. München, Bassermann'sche Verlagsh. 2 Mk.

Thaer, A., Kennzeichen der Entartung einer Fläche 2. Ordnung Leipzig, Fock, Verl. 50 Pf.

Thörner, W., die Verwendung der optischen Projectionskunst im Anschauungs-Unterricht. 2 Experimental-Vorträge aus einigen Capiteln der Naturwissenschaft. 2. Afl. Düsseldorf, Liesegang's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Wagner, W., Anleitung zur Lösung v. Aufgaben mittelst geometrischer Oerter. Heidelberg, vorm. Weiss'sche Univ.-Buchh. 1 Mk.

Waelsch, E., üb. die Isophoten e. Fläche bei centraler Beleuchtung. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Zindler, K., Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension im unteren Raume; lineare Complexe u. Strahlensysteme in denselben. Ebd. 1 Mk. 40 Pf.

Trigonometrie.

Focke, M., u. M. Krass, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien u. anderen höheren Lehranstalten. 6. Afl. Münster, Coppenrath'sche Buchh., Verl. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Rechnungsvorschriften f. die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme. Formeln u. Tafeln zur Berechng. der geograph. Koordinaten aus den Richtgn. u. Längen der Dreiecksseiten 2. Ordnung. Neudr. Berlin, Mittler & S. 80 Pf.

Sprecher, A. v., Hand-Tabellen f. geometrische Aufnahmen u. Berechnungen f. Sexagesimal- u. Centesimaltheilung. Chur, Hitz'sche Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Verhandlungen der vom 8. bis 17. Octbr. 1891 zu Florenz abgeh. Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Red. v. A. Hirsch. Zugleich m. den Berichten üb. die Fortschritte der Erdmessg. in den einzelnen Ländern während des letzten Jahres, u. einigen anderen Abhandlgn. Berlin, Georg Reimer. 9 Mk.

Mechanik.

Seeliger, H., üb. allgemeine Probleme der Mechanik d. Himmels. Rede. München, Franz'scher Verl. 90 Pf.

Technik.

Adressbuch der Elektrotechnik u. verwandter Zweige. Enth. die einschläg. Adressen v. Oesterreich-Ungarn u. der Schweiz, nebst Verzeichniss der Telegraphen-Verwaltgn., techn. Hochschulen, Lehr- u. Versuchs-Anstalten, sowie der elektrotechnischen Fachpresse, Vereine etc. Frankfurt a./M., A. Balck. Geb. 5 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen d. internationalen Elektrotechniker-Congresses zu Frankfurt a. M. vom 7.—12. Septbr. 1891. Nach den stenograph. Aufzeichngn. hrsg. unter Mitwirkg. der Geschäftsführer d. Congresses u. der Schriftführer der Sectionen v. der elektrotechn. Gesellschaft zu Frankfurt a. M. 1. Hälfte. Bericht üb. die Hauptversammlgn. Frankfurt a. M., J. Alt. Für das ganze Werk 12 Mk.

Bibliothek, polytechnische. I. Tl. Magdeburg, Faber'sche Buchdruckerei, Verl. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Biscan, W., elektrotechnische Vorlagen-Sammlung konstruktiver Aufnahmen aus dem gesammten Gebiete der Elektrotechnik. 2 Lfg. Blitz-Schutz-Vorrichtgn., Ausschalter, Stromschlüssel, Zentralstation in Rom, Dynamomaschine. Leipzig, Gebhardt's Verl. In Mappe. 9 Mk.

Burstyn, M., elektrotechnischer Unterricht u. Anleitung zum Betriebe elektrischer Anlagen, insbesondere auf Kriegsschiffen. Lehrbuch f. Unteroffiziere. Mit Genehmigg. d. k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums, Marine-Section, hrsg. v. der Red. der Mittheilgn. aus dem Gebiete d. Seewesens. Wien, Gerold's S. 4 Mk.

Elektrizität, die. Zeitschrift zur Förderg. der elektrotechn. Industrie. Organ d. Leipziger Elektrotechniker-Vereins u. dessen Prüfungs- u. Revisions-Anstalt. Hrsg. u. red. v. O. Umbreit. 1. Jahrg. 1892. Nr. 7. Leipzig, Otto Umbreit. Vierteljährlich 2 Mk.

Haase, F. H., elektrische Beleuchtungs-Einrichtungen. Leichtfassliche Erläuterg. der Grundprincipien derselben, Erklärg. v. Ausführgn., Beschreibg. der dabei vorkomm. Herstellungsweise u. Aneitgn. zur Beurtheilg. zweckmäss. Einrichtgn. Berlin, Siemens. Geb. 2 Mk.

Hein, C., die Einrichtung elektrischer Erleuchtungsanlagen f. Gleichstrombetrieb. Leipzig, Leiner. 8 Mk.; geb. 9 Mk.

Kajetan, J., technisches Zeichnen f. das Kunstgewerbe. II. Die Projectionslehre. 2. Afl. Wien, Graeser. 3 Mk. 60 Pf.

Müller-Bertosa, J. A., Anleitung zum Rechnen m. dem logarithmischen Rechenschieber, durch Beispiele erläutert. Zürich, Meyer & Z. 1 Mk. 80 Pf.

Wüest, C., elektrische Ausstellung in Frankfurt a. M. Bericht. Aarau, Sauerländer's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Exner, K., üb. die polarisirende Wirkung der Lichtbeugung. (2. Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Jaumann, G., Notiz üb. e. Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. Ebd. 20 Pf.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. die Spectren der Elemente. 5. Abschnitt. Berlin, Georg Reimer. Kart. 5 Mk.

Mach, L., üb. e. Interferenzfactometer. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Walter, B., I. Ueber die lichtverzögernde Kraft gelöster Salzmoleküle. II. Ein Verfahren zur genaueren Bestimmung v. Brechungsexponenten. Hamburg, Gräfe & S. 1 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Arbeiten, astronomische, d. k. k. Gradmessungs-Büreau, ausgeführt unter der Leitg. von Th. v. Oppolzer. Nach dessen Tode hrsg. v. E. Weiss u. R. Schram. III. Bd. Längenbestimmungen. Leipzig, Freytag. 16 Mk.

Bauer, C., Uebersichtstafel zur Vergleichung der Tageslängen u. Sonnenstände nach mitteleurop. u. Ortszeit f. das Gebiet zwischen 7° 30′ u. 8° 30′ östl. Länge. Speyer, Kleberger'sche Buchh. 40 Pf.

Beobachtungen, deutsche überseeische meteorologische. Gesammelt u. hrsg. v. der deutschen Seewarte. 3. u. 4. Hft. Hamburg, Friederichsen & Co. 14 Mk.

Hann, J., einige Resultate stündlicher meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel d. Fuji in Japan. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Holetschek, J., üb. den Kometen d. J. 1689. Ebd. 1 Mk.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astronomie, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Unter Mitwirkg. v. Fachmännern hrsg. v. H. J. Klein. II. Jahrg. 1891. Leipzig, Ed. Heinr. Mayer. Kart. 7 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1891. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse

der meteorolog. Beobachtn. im J. 1891. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co., Verl. 3 Mk.

Liznar, J., üb. die Bestimmung der bei den Variationen d. Erdmagnetismus auftretenden ablenkenden Kraft, nebst e. Beitrage zur 11jähr. Periode d. Erdmagnetismus. (Vorläufige Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 60 Pf.

— e. neue magnetische Aufnahme Oesterreichs. (III. Vorläufiger Bericht.) Ebd. 30 Pf.

Mazelle, E., Untersuchungen üb. den täglichen u. jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Triest. Ebd. 50 Pf.

Mittheilungen, astronomische, v. der königl. Sternwarte zu Göttingen. Hrsg. v. W. Schur. 2. Thl. Göttingen, Peppmüller. 7 Mk. 50 Pf.

Monatsberichte der deutschen Seewarte. Hrsg. v. der Direction. 1891. 1.—8. Hft. Hamburg, Friederichsen & Co. à 50 Pf.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 130. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke S. Für den Band 15 Mk.

Niemeyer, J., die heissen Winde der Wüstengebiete. Meldorf, Bremer. 1 Mk. 50 Pf.

Niesel, G. v., Bahnbestimmung d. grossen Meteors vom 2. April 1891. Leipzig, Freytag. 90 Pf.

Publicationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 29. 8. Bds. 3. Stück. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Repertorium f. Meteorologie. Hrsg. v. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. XV. Bd. Nr. 1. Leipzig, Voss' Sort. 5 Mk. 65 Pf.

Sammlung populärer Schriften, hrsg, v. der Gesellschaft Urania zu Berlin, Nr. 10 u 11. Berlin, Herm. Paetel. 2 Mk.

dass. Nr. 12. Ebd. 1 Mk. 40 Pf.

Schmidt, A., theoretische Verwertung der Königsberger Bodentemperatur-Beobachtungen. Gekrönte Preisschrift. Königsberg, Koch. 2 Mk. 20 Pf.

Singer, K., Wolkentafeln. In Verbindung m. mehreren Fachmännern hrsg. München, Th. Ackermann, Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Trabert, W., der tägliche Gang der Temperatur u. d. Sonnenscheins auf dem Sonnblickgipfel. Leipzig, Freytag. 4 Mk.

Unterweger, J.. üb. die Beziehungen der Kometen u. Meteorströme zu den Erscheinungen der Sonne. Ebd. 4 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 1. Hft. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 feine lith. Tafeln nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. Jedermann. 2. Afl. 14. u. 15. Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

Wolf, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte u. Literatur. (In 2 Bdn.) 3 Halbbd. Zürich, Schulthess. 8 Mk.

Nautik.

Verzeichniss der Leuchtfeuer u. Nebelsignalstationen aller Meere. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt d. Reichs-Marine-Amts. 8 Hfte. Asg. April 1892. Berlin, Mittler & S. 6 Mk.; Einbde. à 50 Pf.

Physik.

Bertram, A., physikalisches Praktikum. Berlin, Nicolai'sche Buchh. 1 Mk. 50 Mk.

Götz, H., Lehrbuch der Physik zum Gebrauche an Realschulen u. verwandten Lehranstalten. München, Franz'scher Verl. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Hoppe, E., Akkumulatoren f. Elektricität. 2. Afl. Berlin, Springer. 7 Mk.; geb. 8 Mk.

Jaumann, G., absolutes Elektrometer m. Kuppelsuspension. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 50 Pf.

Klemenčič, J, üb. e. Methode zur Bestimmung der elektromagnetischen Strahlung. Ebd. 30 Pf.

Kohlrausch, F., Leitfaden der praktischen Physik m. e. Anh. das absolute Mass-System. 7. Afl. Leipzig, Teubner. Geb. 6 Mk. 60 Pf.

Koppe, K., Anfangsgründe der Physik m. Einschluss der Chemie u. mathematischen Geographie f. den Unterricht in höheren Lehranstalten, sowie zur Selbstbelehrg. 18. Afl. v. H. Koppe. Essen, Bädeker, Verl. 4 Mk. 80 Pf.; geb. 5 Mk. 40 Pf.

Poincaré, H., Elektricität u. Optik. Vorlesungen. Red. v. B. Bruhnes. Autoris. deutsche Asg. v. W. Jäger. u. E. Gumlich. 2. Bd. Die Theorie v. Ampère u. Weber. Die Theorie v. Helmholtz u. die Versuche v. Hertz. Berlin, Springer. 7 Mk.

Revue, physikalische. Hrsg. v. L. Graetz. I. Jahrg. 1892. 4. Hft. Stuttgart, Engelhorn. Vierteljährlich 8 Mk.

Sahulka, J., üb. Wechselstrom-Motoren m. magnetischem Dreh-

felde (Drehstrom-Motoren). Vortrag. Wien, Deuticke, Verl. 1 Mk. 40 Pf.

Sattler, A., Leitfaden der Physik u. Chemie m. Berücksicht. der Mineralogie. Für die oberen Klassen v. Bürgerschulen, höheren Töchterschulen u. anderen höheren Lehranstalten in 2 Kursen bearb. Braunschweig, Vieweg & S. 80 Pf.

Schwartze, Th., E. Japing u. A. Wilke, die Elektricität. Eine kurze u. verständl. Darstellg. der Grundgesetze, sowie der Anwendgn. der Elektricität zur Kraftübertragg., Beleuchtg., Galvanoplastik, Telegraphie u. Telephonie. Für Jedermann geschildert. 4. Afl., bearb. v. A. Ritter v. Urbanitzky. Wien, Hartleben. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Wallentin, J. G., Einleitung in das Studium der modernen Elektricitätslehre. Stuttgart, Enke. 12 Mk.

Winter, W., Grundriss der Mechanik u. Physik, f. Gymnasien bearb. München, Th. Ackermann, Verl. 3 Mk. 20 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften. Aus dem J. 1891. Daraus einzeln: Physikalische. Berlin, Georg Reimer. Kart. 27 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 40. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Für den Band 20 Mk.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. v. J. Fröhlich. 9. Bd. Octbr. 1890 — Octbr. 1891. 2. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1892. I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Burckhardt, W., mathematische Unterrichts-Briefe. Für das Selbst-Studium Erwachsener. Mit besond. Berücksicht. der angewandten Mathematik bearb. 2. Afl. I. Kurs. (Brief 1 — 26. — Lektion 1—51.) Gera, Griesbach's Verl. In Mappe u. Futteral 15 Mk. 60 Pf.

Mittheilungen aus dem Markscheiderwesen. Vereinsschrift d. rheinisch-westfäl. Markscheider-Vereins. Hrsg. v. H. Werneke. 6. Hft. Freiberg, Craz & G. 3 Mk.

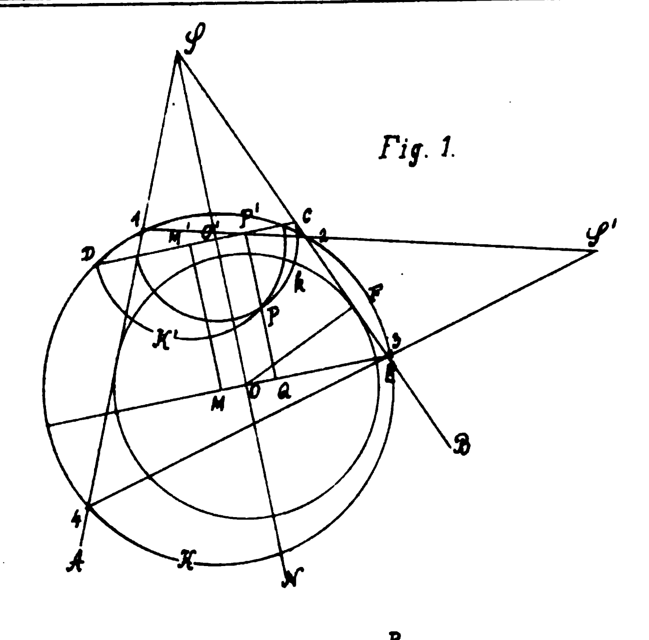
Mittheilungen d. mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg, hrsg. v. O. Böklen. 5. Bd. 2 Hfte. (1. Hft.) Stuttgart, Metzler'sche Buch., Verl. Für den Band 3 Mk.

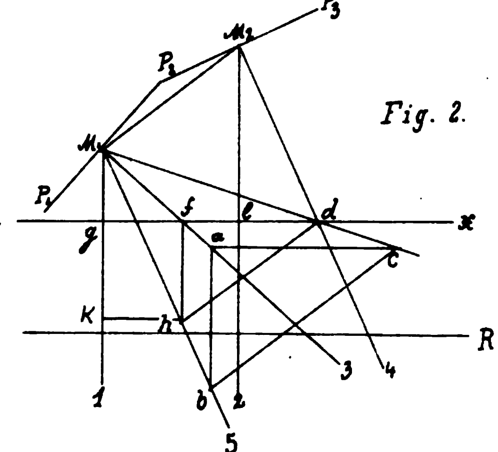
Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche. Abth. II. a. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u der Mechanik. 100. Bd. 8.—10. Hft. Leipzig, Freytag. 8 Mk 90 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1891. 3. Hft. u. 1892. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. à 1 Mk. 20 Pf.

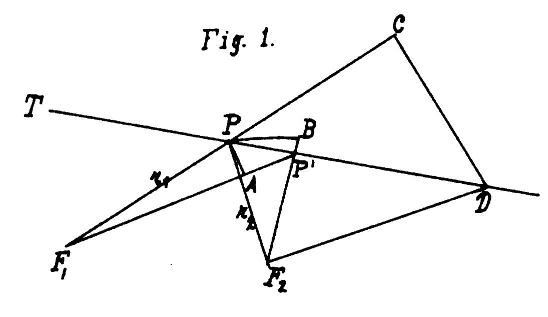
Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. unter der Red. v. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 37. Jahrg. 1892. (6 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Jährlich 18 Mk.

Zeitschrift f. mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht. Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 23. Jahrg. 1892. (8 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Jährlich 12 Mk.





. Rulf: Durchdringung der Kugel mit dem Kegel.



. Rulf: Tangente der Cassinischen Linie.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

Litterarischer Bericht
XLI.

Methode und Principien.

Piper, Oberlehrer am Gymnasium zu Lemgo: Ein mathematischer Beweis der Unsterblichkeit des Menschen. Lemgo 1887. Ohle. 39 S.

Der Verfasser giebt etwa in den drei ersten Vierteln seiner Broschüre eine Darstellung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die durch gut gewählte Beispiele gestützt klar und durchsichtig geschrieben ist und z. B recht wol als Einleitung in diesen Wissenszweig für das Selbststudium oder als Leitfaden zur Repetition für vorgerückte Schüler dienen könnte, zumal sie auch ein richtiges Mass in der Quaniität des behandelten Stoffes innezuhalten scheint. Soll Ref. aus diesem anregend geschriebenen Teile einiges herausgreifen, so sei es zunächst der auf S. 7 durch ein Beispiel erläuterte Nachweis, dass die Wahrscheinlichkeit für ein und dasselbe fragliche Ereigniss oftmals subjectiv verschieden ist je nach den Kenntnissen, mit denen der Schätzende dem Sachverhalte gegenübersteht; ferner aber die eingehende Darlegung der objectiven Bedeutung, die dennoch die Wahrscheinlichkeit so, wie sie mathematisch definirt wird, in den meisten Fällen besitzt. Der von Jakob Bernoulli untersuchte Zusammenhang zwischen dem w des Mathematikers und der durchschnittlichen Anzahl zutreffender Fälle unter einer grossen Zahl von Versuchen, wir wollen kurz sagen: „das Gesetz der grossen Zahlen", wird von Piper in sinnreicher Weise bestätigt durch Benutzung einer siebenstelligen Logarithmentafel. Er nimmt die Logarithmen der 10, 30, 100, 300, 1000, 3000 oder 10000 ersten

unter den Zahlen 1, 11, 21, 31, , . . 99991, notirt die 7te Ziffer ihrer Logarithmen-Mantisse und zählt ab. wie oft jede Ziffer (0, 1, 2 . . . 9) hierbei vorkommt. Nach dem Gesetze der grossen Zahlen hat man jede Ziffer ungefähr $\frac{1}{10}$ mal so oft zu erwarten, als Zahlen benutzt worden sind, d. h. ungefähr 1, 3, 10, 30, 100, 300, 1000 mal. In Wahrheit finden natürlich Abweichungen statt; diese Abweichungen sind für jede einzelne Ziffer procentisch berechnet. Interessanter sind die mittleren Abweichungen: diese betragen, wie sich aus den Piper'schen Zahlen ergiebt, für die genannten Intervalle bezüglich

$$60 \quad 46_{,67} \quad 24 \quad 16 \quad 12_{,8} \quad 4_{,73} \quad 3_{,22} \text{ Procent}$$

der zu erwartenden Gesamtzahl. Diese mittleren Abweichungen stellen eine schnell fallende Reihe dar und bestätigen eben hierdurch das fragliche Gesetz. Die Besprechung des Gegenstandes vertieft sich, soweit es für den Standpunkt etwa eines guten Primaners möglich war. – Später geht Piper auf die Gesetze der Addition und Multiplication von Wahrscheinlichkeiten, sowie auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen ein.

Auf S. 25 wird ein Beispiel besprochen, das auf eine unendlich geringe Wahrscheinlichkeit führt oder vielmehr auf $w = 0$. Es handelt sich um folgendes: „Ich lege in meinen Garten eine Schützenscheibe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Meteorstein, der zur Erde fällt, diese Scheibe treffe und zwar so, dass im letzten Moment der Schwerpunkt des Steines völlig genau auf den Mittelpunkt der Scheibe gerichtet sei?" Soll die Scheibe, die 1^{qm} Flächeninhalt haben mag, überhaupt getroffen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit

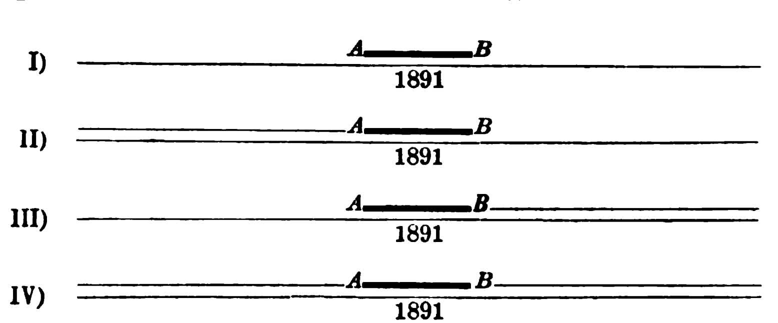
$$= \frac{1^{qm}}{\text{Erdoberfläche}} = \frac{1^{qm}}{70000 \text{ Bill. }^{qm}} = \frac{1}{70000 \text{ Bill.}}$$

(ungefähr); soll ihr hundertster Teil getroffen werden, so ist auch jene 100 mal so klein u. s. w.: so wird hergeleitet, dass die fragliche Wahrscheinlichkeit = 0 ist. Freilich wäre es dennoch denkbar, dass die Scheibe genau im Mittelpunkt getroffen würde, doch will der Verfasser „den Widerspruch nicht zu lösen versuchen." Wir kommen später darauf zurück. Jedenfalls scheint dies Beispiel dem Verfasser vorgeschwebt zu haben, wenn er nun von S. 32 an die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendet, um einen Beweis für die Unsterblichkeit des Menschen zu führen. Dieser Beweis scheint dem Referenten nach verschiedenen Richtungen hin völlig verfehlt und bedarf seiner Ueberzeugung nach auch öffentlich der Widerlegung, um nicht die Principien der so oft gemissbrauchten

Wahrscheinlichkeitsrechnung in Misscredit gebracht zu sehen, indem sie angewendet werden auf ein transcendentes Gebiet, in welchem nun einmal bloss der Glaube, nicht aber das Wissen herrschen kann.

Die angedeutete Analogie liegt in folgendem: mein Erdenleben umfasst nur eine kurze Spanne Zeit, allerhöchstens etwa 100 Jahre; die Zeit überhaupt ist unendlich. Wie es nun im höchsten Grade unwahrscheinlich ist, dass der Meteorstein auf die Scheibe im Garten trifft, ebenso unendlich gering war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass die mir beschiedene Lebenszeit gerade in die jetzigen Jahre, mit in das Jahr 1891 fiel; denn es hätte eine unendliche Fülle anderer Zeiträume zu Gebote gestanden, zumal da Gottes Schöpfungswerke nicht notwendig an das Jahr 3762 v. Chr. (oder ein ähnliches) gebunden war. Verspräche uns ein Mann, dass wir mit eigenen Augen und sofort den Meteorstein auf den Mittelpunkt der Scheibe fallen sehen sollten, und es träfe dies wirklich zu, so würden wir alle dies Ereigniss, das a priori eine Wahrscheinlichkeit = 0 besass, eben **nicht** als Werk des Zufalls ansehen, sondern den Mann entweder für einen geschickten Taschenspieler oder für einen Kenner der uns noch verborgenen Naturgesetze oder für jemand halten, der mit höheren Mächten im Einverständniss lebt: wir würden an all diese Dinge jedenfalls noch eher als an ein reines Spiel des Zufalls glauben. In dem anderen Falle, bei der Frage wegen des zeitlichen Zusammentreffens seines Lebens mit der Gegenwart, hätte Piper, wenn er nun einmal den göttlichen Willen mit in die Betrachtung einführte, eben diesen als einfachste Erklärung heranziehen können: dann fiel das Rätsel fort, obwol der Mensch selbst die Wahrscheinlichkeit jenes Zusammentreffens a priori für verschwindend klein ansah.

Doch dies nur vorläufig! Jedenfalls müssen wir unsere Betrachtung noch vertiefen. Es handelt sich nämlich für Piper um eine Aufgabe, bei der eine Wahrscheinlichkeit der **Ursache** in Frage kommt. Unser Dasein ist ein Factum, und dieses Factum kann nach Piper eine vierfache „Ursache" haben: entweder ist uns überhaupt nur eine endliche Dauer bestimmt oder eine Dauer, die in Richtung der Vergangenheit, oder die in Richtung der Zukunft, oder endlich die nach beiden Richtungen unendlich ist. Wir stellen diese vier möglichen Wurzeln unsres Daseins graphisch dar, indem wir die unendliche Zeit durch eine gerade Linie, unser gesamtes Dasein durch eine direct darüber gezeichnete gerade Linie und insbesondere die uns auf der Erde beschiedene Lebenszeit durch den markirten Abschnitt AB wiedergeben.



Nun besitzt jede Ursache, aus der das betreffende Ereigniss mit unendlich kleiner Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, selbst eine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit; es grenzt also an Gewissheit, dass sie nicht vorhanden gewesen; jedenfalls verwerfen wir sie selbst unwillkürlich geradeso wie in dem erwähnten Beispiel vom Meteorstein den hier so äusserst unwahrscheinlichen Zufall. Genau so beurteilt nun Piper die Ursache I) unsres Erdenlebens als eine unendlich unwahrscheinliche; die Gründe sind schon oben genannt. Nun ist aber derselbe Einwand wie gegen I) auch gegen die übrigen Ursacher zu erheben. Jedenfalls nämlich ist mein gegenwärtiges Erden- und Menschenleben ein durch Geburt und Tod fest begrenzter Teil meines möglicherweise unendlich langen Daseins, ein Teil überdies, der durch das Bewusstsein und das Gedächtniss, mit dem ich ihn durchlebe und festhalte, für mich von hervorragender Wichtigkeit ist. Dass dieser ausgezeichnet wichtige Abschnitt meines Daseins gerade in die Gegenwart und mit in das Jahr 1891 fällt, ist und bleibt — so betrachtet — ein höchst merkwürdiges Ereigniss, sodass dieser von Piper selbst hervorgehobene Gesichtspunkt auch für II), III), IV) bestehen bleibt. Er selbst bezeichnet aus dem gleichen Grunde II), sowie nachträglich auch III) (S. 38) als unstatthafte Erklärungen, merkwürdigerweise aber nicht auch IV). Für mich aber ist das Ergebniss dieser Betrachtung das folgende: da unter den vier möglichen Erklärungsweisen meines gegenwärtigen Lebens keine mehr leistet als die andere, so ist eine Entscheidung zwischen ihnen auf Grund der Mathematik überhaupt nicht möglich.

Im Sinne Piper's war die Wahrscheinlichkeit der Ursachen I), sowie auch II) und III) gleich $\frac{1}{\infty}$. *) Stösst man auf solche Wahr-

---

*) Da sich die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ursachen verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten des fraglichen Ereignisses unter Zugrundelegung der einzelnen Ursachen, so könnten wir, die wir die letzteren sämtlich unend-

scheinlichkeiten, so hat man stets einen Fehler in der Fragestellung gemacht. Zwei Beispiele aus der Geometrie mögen dies erläutern. Vor uns liegt ein Blatt Papier; darauf gezeichnet ist eine gerade Linie. Ausserhalb derselben befindet sich ein fester Punkt, um den ein fest damit verbundenes Lineal drehbar ist. Man soll dem Lineal mit verschlossenen Augen die zur geraden Linie parallele Richtung geben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt der Versuch? Die Antwort wird verschieden ausfallen je nach der geforderten Genauigkeit, wobei man freilich sich vorstellen muss, es gäbe praktisch ein Mittel die Parallele von den annähernd parallelen Geraden streng zu sondern. Die Wahrscheinlichkeit erscheint, wenn absolute Genauigkeit verlangt wird, als $\frac{1}{\infty}$; lässt man geringe Neigungen zu, vielleicht bis zu einer Bogenminute, so ergeben sich leichtberechenbare endliche Werte, in unserm Beispiel

$$w = \frac{2}{180.60} = \frac{1}{5400}$$

Da nun „$\frac{1}{\infty}$“ unweigerlich null gesetzt werden muss, das Treffen der parallelen Lage aber dennoch denkbar ist, so entscheide ich mich dafür die streng aufgefasste Frage überhaupt für fehlerhaft zu erklären. Es handelt sich hier um die Unvergleichbarkeit von Punkt und Linie: wie zahlreiche Punkte niemals einen Kreis zusammensetzen können, also auch nicht gefragt werden kann: „Der wievielte Teil von der ganzen Peripherie ist einer ihrer Punkte?“ — so kann auch eine singuläre Stellung des Lineals nicht verglichen werden mit der Gesamtheit der durch Drehung hervorgehenden anderen Lagen. Die richtige Fragestellung wird vielmehr einem ausgedehnten Bereiche gegenüber auch nur das Treffen eines Teilbereiches fordern dürfen, im obigen Falle also annähernd parallele Lagen zulassen müssen. — Noch auffallender erscheint das Resultat, wenn der singuläre Fall ein besonders ausgezeichneter ist. Ein Kegel möge geschnitten werden: mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man eine Parabel erhalten? Leicht macht man durch Festsetzung gewisser Nebenbedingungen für die Führung des Schnittes die Aufgabe identisch mit der von der Parallele. Auch hier ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\infty}$, ein Fingerzeig, dass die Frage überhaupt falsch war: man muss hier neben der Parabel noch ge-

---

lich klein von der nämlichen Grössenordnung befunden haben, die ersteren dennoch für endlich ansehen, aber derart, dass uns ihre Verhältnisse und also auch ihre absoluten Beträge unbekannt bleiben.

wisse Ellipsen und Hyperbeln zulassen, deren erlaubte Abweichung von jener mathematisch in der verschiedensten Weise festgesetzt werden könnte. — Jedenfalls ergiebt sich aus der angestellten Betrachtung, dass die von Piper durchgeführte Untersuchung von vornherein zur Unfruchtbarkeit verurteilt war. Nebenbei erledigt sich so auch der vom Verfasser erwähnte, aber nicht aufgedeckte Widerspruch betreffs der genau in ihrem Mittelpunkt zu treffenden Scheibe (S. 25): auch dort liegt der Fehler schon in der Fragestellung.

Aus der Zufälligkeit der Lage der uns zugemessenen Lebenszeit schliesst Piper, dass unser eigentliches Dasein von allen zeitlichen Schranken frei sein müsse. Wie nun, wenn man ähnliche Schlüsse auf Raum und Individualität ausdehnen wollte? Wie gross war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass ich gerade in dem und dem Hause der und der Stadt in Deutschland (und auf der Erde) geboren wurde? Soll man hier nicht wieder den Schluss ziehen, dass unser gesamtes Dasein nach und nach den ganzen Raum durchwandern oder irgendwie umspannen muss? Ferner: wie zufällig, dass ich gerade als Deutscher, als Abkömmling der und der Familie von bestimmtem Stande, Confession, Charakter, Vermögen u. s. w. geboren ward: auch dies hatte a priori betrachtet eine äusserst geringe Wahrscheinlichkeit. Welches reiche Gebiet für die Phantasie tut sich hier auf, und doch wie öde für den Verstand! Doch gerade durch solche Analogien erkennt man deutlich das Unberechtigte der Piper'schen Schlussweise!

Aber noch von einer ganz anderen Seite müssen wir die Deductionen Piper's betrachten. Eine Uebertragung derselben etwa auf den Tisch, der vor uns steht, schneidet er selbst ab, und ebenso hebt er ausdrücklich hervor, dass er für andere Menschen die Unsterblichkeit nicht in gleicher Weise wie für sich selbst beweisen, sondern nur durch Analogie erschliessen könne. Denn weder die jetzige Existenz eines Tisches noch die anderer Menschen gehöre für ihn zu den „merkwürdigen" Ereignissen: habe es doch zu allen Zeiten Tische, zu allen Zeiten auch Menschen gegeben. Aber, sagt er (S. 37): „dass ich gegenwärtig existire, das ist für mich unter allen Tatsachen die am meisten ausgezeichnete; ohne dieselbe würde es für mich überhaupt nichts geben." Die hervorragend „merkwürdigen" Ereignisse aber verlangen wir stets durch mehr als durch blossen Zufall erklärt zu sehen; dieser letztere befriedigt uns als Erklärungsgrund nur bei den durch nichts Besonderes ausgezeichneten, an Zahl so ungleich häufigeren, „gewöhnlichen" Ereignissen. Wiederum denke man an den Meteorstein: fällt er statt auf unsere Scheibe irgendwo in Amerika nieder, so

finden wir das nicht merkwürdig und sprechen von Zufall; wie anders, wenn die Scheibe vor unseren Augen in ihrem Mittelpunkt getroffen wird! Den Zufall würden wir dann für völlig ausgeschlossen halten. So reicht auch der Zufall wol aus zu erklären, dass gerade dieser Tisch (und kein anderer) jetzt vor mir steht, dass gegenwärtig der Sultan Abdul-Hamid (und nicht ein Soliman oder ein Abdul-Medschid) auf dem türkischen Throne sitzt; nicht aber, dass ich gerade jetzt lebe, denn das ist für mich die „im höchsten Grade vor anderen ausgezeichnete Tatsache.“

Diesem Ideengange gegenüber ist erstens zu erwähnen, dass das Merkwürdige, was in meinem jetzigen Dasein liegt, doch bloss subjectiv vorhanden ist, während ein Herabfallen des Meteors auf den Mittelpunkt der Scheibe gleichmässig von jedermann als merkwürdig angesehen werden würde, und dass es die Mathematik füglich nur mit objectiv anerkannten Vorstellungen zu tun haben kann Ferner aber, und dies ist der Hauptpunkt: nicht die gegenwärtige Spanne Zeit ist es, wodurch mein jetziges Dasein mir als hervorragend ausgezeichnete Tatsache erscheint, sondern der Umstand, dass eben ich es bin, der da ist. Bei unsrer bisherigen Ergründung und Prüfung der Piper'schen Ideen hatten wir es mit der Frage zu tun: „Wie gross war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn ich überhaupt leben sollte, ich gerade im Jahre 1891 dasein würde?“ Diese Wahrscheinlichkeit ist ihrem Werte nach zwar völlig unbekannt, sicherlich aber ungefähr gleichzusetzen der entsprechenden Wahrscheinlichkeit für jeden unserer Zeitgenossen. Um diese Wahrscheinlichkeit kann es sich also, wenn man mit Piper einen Unterschied macht zwischen dem Ich und der Aussenwelt, nicht handeln; der Bedingungssatz „wenn ich überhaupt leben sollte“ muss vielmehr fortfallen, und ebenso kann die Frage nach der Zeit vorläufig ausgeschieden werden, da bei einer anderen Zeit unseres Erdenlebens diese letztere ebenso sehr oder ebenso wenig merkwürdig erscheinen würde als die Gegenwart. Es muss also dem Verfasser die freilich nirgends so formulirte Frage vorgeschwebt haben, die einen so starken Gegensatz zwischen dem Ich und dessen Mitmenschen rechtfertigt: „Wie gross war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass ich überhaupt dasein würde?“ Und diese Frage ist logisch völlig unhaltbar, denn sie anticipirt das Ich und setzt es, während es noch gar nicht vorhanden ist, zukünftig als vorhanden. Natürlich konnte ein Anderer, der vor meiner Geburt schon lebte, eine solche auf mich bezügliche Frage tun; aber so ist sie hier nicht gemeint, denn dann verliert sich wieder alles „Merkwürdige,“ da für den Aussenstehenden ich ebenfalls ein Aussenstehender bin.

Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit (a priori), dass überhaupt in einem künftigen Jahre Menschen dasein werden, so ist dieselbe für absehbare Zeiträume = 1, denn zu allen Zeiten kehren die Bedingungen wieder, unter denen neuen Menschen das Dasein gegeben wird. Ganz anders stellt sich die Frage, wenn von dem künftigen Dasein eines näher zu definirenden einzelnen Menschen die Rede ist. Die Schwierigkeit liegt hier zunächst in der Frage selbst, denn wie lässt sich ein noch gar nicht lebender Mensch schon im voraus so charakterisiren, dass man von einer eindeutigen Definition sprechen könnte? Man denke etwa an denjenigen Zukunftsmenschen, der zum ersten Mal seinen Fuss auf den Nordpol setzt. Wie seine Existenz überhaupt fraglich ist, so ist es die Zeit seines Auftretens noch viel mehr. Immerhin hätte die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit dürfen wir ihn und seine Tat im Jahre 1950 erwarten?" logisch nichts Anstössiges, Widersinniges. Noch anders aber verhält es sich mit dem Ich. Das Ich lässt sich, bevor es zum Dasein gelangt ist, überhaupt nicht charakterisiren oder definiren, und die Frage: „Welches war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass ich existiren würde," oder specieller: dass ich gerade im Jahre 1891 existiren würde?" hat überhaupt keine Berechtigung. Und auch die Frage nach einer Wahrscheinlichkeit gewisser Ursachen unsres Daseins würde sofort logisch falsch, wenn wir sie mit Beschränkung auf das Ich aufwerfen wollten: die Wahrscheinlichkeit der Ursache setzt bei ihrer Definition im allgemeinen, sowie bei ihrer Berechnung im einzelnen Falle stets die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses auf Grund dieser Ursache voraus; da aber die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses selbst logischerweise hier nicht in Frage kommen konnte, so auch nicht die Wahrscheinlichkeit etwaiger Ursachen. — Am allerwenigsten kann aber das von Piper auf S. 34 eingeschlagene Schlussverfahren gebilligt werden, wo von der Vorbedingung die Rede ist, dass so und so viele Menschen vor mir gelebt und das heiratsfähige Alter erreicht haben müssen: indem Piper bis auf Moses' Zeit zurückgeht, findet er so eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10^{34}}$. Es werden hiermit die Vorbedingungen und Ursachen wol für das Leben eines bestimmt definirten Menschen überhaupt angegeben, der zur Zeit 1891 leben sollte, nicht aber die Ursachen gerade für das Ich. Den Fehler hätte Piper schon daran entdecken können, dass er diese letzte Schlussweise auch auf seine Mitmenschen, auf den Sultan Abdul-Hamid u. s. w., hätte anwenden können, obwol er doch in anderem Zusammenhang deren Dasein ganz verschieden-wahrscheinlich taxirt als sein eigenes.

Wir fassen kurz die berührten Punkte nochmals zusammen.

In mannigfaltiger Weise sucht Piper die Wahrscheinlichkeit a priori für mein Dasein in der Gegenwart als eine unendlich kleine oder als eine mit dem Wert 0 behaftete hinzustellen, um dann auf Grund des Wunders, dass ich dennoch jetzt bin, die Unsterblichkeit als einen deus ex machina hervorspringen zu lassen. Das Wunderbare kann nun erstens darin gesucht werden, dass eine endliche Zeitstrecke innerhalb der unendlichen Zeit gerade so und nicht anders angenommen worden ist: in dieser Beziehung erklärt aber seine Ursache IV) nicht mehr als die Ursachen I), II) und III); überdies gelangt man auf verschwindende Wahrscheinlichkeiswerte, die an sich stets auf einen Fehler in der Fragestellung hinweisen. Zweitens kann das Rätsel des Selbstbewusstseins herangezogen werden, dieses Centrums, um welches sich erst alle Vorstellungen gruppiren müssen Durch Betrachtung desselben setze ich mich in scharfen Gegensatz zur übrigen Menschheit und gewinne einen Standpunkt, von wo aus ihr Dasein mir nicht, wol aber mein eigenes höchst merkwürdig erscheint. Da meine Persönlichkeit ferner eine fest geschlossene, nachträglich, wo ich lebe, leicht charakterisirbare, aber doch rein individuelle ist, so schwebt als Wahrscheinlichkeit a priori für dieses mein Sein eine um so geringere vor, je weiter die Detaillirung in der Charakteristik meiner Person jederzeit getrieben werden könnte Bei näherer Betrachtung aber stellt sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit a priori für mein Sein als logisch falsch heraus, weil sie ein Nichtsein des Ich zu ihrer Grundlage macht.

Wir müssen daher die Piper'schen Betrachtungen, mögen sie nun auf die Zeit unsres Lebens oder auf das Ichbewusstsein den Hauptaccent legen, für durchaus verfehlt und irrig erklären, fühlen uns aber dennoch dem Verfasser zu Dank verpflichtet, da er uns zur näheren Prüfung von Fragen angeregt hat, die wie für uns, so gewiss auch für viele andere von hohem Interesse waren.

Alfred Holtze, Gymnasiallehrer
in Naumburg a. S.

Einige kritische Bemerkungen über die Grassmann'sche Ausdehnungslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Raumcurven.

In der Abhandlung über die Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven [1]) begründet Herr

1) Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven von H. Grassmann. 1886. Beilage zum Programm der lateinischen Hauptschule zu Halle a. S.

H. Grassmann die Aufstellung der Ausdehnungslehre damit, dass dieselbe die geometrischen Grössen direct der Rechnung unterwirft, ohne sie vorher ihres geometrischen Gewandes entkleidet zu haben, während die gewöhnliche analytische Geometrie an Stelle der geometrischen Grössen gewisse für dieselben charakteristische Zahlen einführt, mit diesen Zahlen rechnet, und die Resultate wieder in die geometrische Sprache übersetzt. Wir wollen untersuchen, ob das oben Gesagte in der Ausdehnungslehre verwirklicht wird.

In der Ausdehnungslehre zerfällt die einfache Multiplication in eine äussere und innere; in der ersteren werden wirklich die Strecken als geometrische Grössen aufgefasst, in der zweiten, der inneren Multiplication werden die geometrischen Grössen noch viel abstracter behandelt als in der gewöhnlichen analytischen Geometrie. Zur Begründung der inneren Multiplication wird nämlich eine Längezahl gleich einer Flächenzahl gesetzt. Um dieses jedoch ausführen zu können, muss man von jeder Bezeichnung der Zahl absehen, und nur am Ende der Rechnung wird man mit der Zahl den Begriff der Länge verbinden können. Die Ausdehnungslehre verliert hier gänzlich das ihr Eigentümliche und wird abstract. Sobald man nun beachtet, dass man in der inneren Multiplication mit gänzlich unbenannten Zahlen zu tun hat, so wird man ohne weiteres einsehen, dass für sie alle Multiplicationsregeln gültig sind, da ja diese Zahlen unseren gewöhnlichen entsprechen. Etwas anderes ist es, wenn die Zahl ausser der Länge auch die Richtung angeben soll.

Die innere Multiplication wird durch das Symbol $[a \mid b]$ angedeutet, welches durch Definition dem Ausdruck $ab\cos(ab)$ gleichgesetzt wird, wo a und b die absoluten Zahlen sind. Wir wollen dieses Product uns genauer ansehen. $\mid b$ soll gleich der Flächenzahl cd sein, und heisst Ergänzung der Strecke b. In dem Product $[a \mid b]$ giebt a eigentlich die Länge und Richtung der Strecke an. Infolge der der Definitionsgleichung

$$[a \mid b] = ab\cos(ab)$$

soll auch bei a von der Richtungsangabe abgesehen werden. Die relative Lage von a zu b wird hier ebenso angegeben wie in der gewöhnlichrn Geometrie. Dass diese Gleichung wirklich eine Definitionsgleichung ist, folgt aus der ganz willkürlichen Annahme über die Lage der Ergänzung der Strecke zur Fläche. Es soll nämlich $\mid b$ senkrecht cd stehen. Unzweifelhaft werden bei der inneren Multiplication die Grössen ihres geometrischen Gewandes entkleidet.

Was die Ableitung des pythagoräischen Lehrsatzes betrifft, so bemerke ich, dass im eigentlichen Sinne nur gezeigt wird, dass es

Quadrate von Zahlen giebt, deren Summe gleich dem Quadrat einer andern Zahl ist. Dies deutet auch schon die Schreibweise an, in welcher das Endresultat erhalten wird:

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2$$

denn die deutschen Buchstaben sollen nur die Zahlen angeben. Verbindet man mit diesen Zahlen den Begriff der Länge, so erhält man den pythagoräischen Lehrsatz. Ebenso verhält es sich mit dem verallgemeinerten Pythagoras. Die Ausdehnungslehre verlässt hier den von ihr beabsichtigten Weg, geht in das Gebiet der unbenannten oder absoluten Zahlen über, und nur mit Hülfe neu eingeführter Definitionen übersetzt sie das erhaltene Resultat in die geometrische Sprache. Principiell unterscheidet sie sich also in nichts von der analytischen Geometrie, und so können wir fragen, welchen Zweck hat denn die Einführung der Ausdehnungslehre, wenn durch sie die Beweise an Correctheit nicht gewinnen, die Abkürzung scheinbar der Rechnung durch die Einführung einer grossen Anzahl von Definitionen aufgehoben wird.

Beachtet man, dass man in der Ausdehnungslehre streng zwischen benannten und unbenannten Zahlen unterscheiden muss, dann kann einem das Verständniss der räumlichen Multiplication nicht schwer fallen. Von diesem Standpunkte aus wollen wir die räumliche Multiplication betrachten.

Nach früherem ist

$$[ab] = | c$$

wo $| c$ eine unbenannte Zahl.

Die Ergänzung des Flächenraums ab wird definirt

$$| [ab] = c$$

Sie ist also die ursprüngliche Strecke oder der ursprüngliche Flächenraum selbst. Es fragt sich nun, ob diese Strecke c, welche doch einen Flächenraum repräsentirt, die Richtung angibt. Letzteres muss bejaht werden, wenn wir auf die Definition der äusseren räumlichen Multiplication Rücksicht nehmen. Es ist also zwischen $| c$ und $| [ab]$ streng zu unterscheiden, nicht bloss, dass $| c$ eine Strecke und $[ab]$ eine Fläche darstellt, d, sondern dass $| c$ eine unbenannte Zahl, $| [ab]$ eine benannte ist. Herr Grassmann scheint diesen Unterschied zwischen beiden Zahlen nicht zu machen, wenigstens lässt die Bemerkung zu der Formel 53) darauf schliessen: „Die Grösse $| [ab]$ stellt eine Strecke dar, welche senkrecht auf $[ab]$ steht, und deren Längenzahl gleich der Flächenzahl von $[ab]$ ist.“

Während bei der Ergänzung der Strecke c der Flächenraum senkrecht zu dieser Strecke c construirt wird, so wird bei der Ergänzung eer Fläche die Strecke senkrecht zu deren Fläche construirt, wobei natürlich die Längenzahl der Strecke gleich der Flächenzahl ist. Sobald also in beiden Fällen der Flächenraum derselbe ist, werden $| c$ und c zusammenfallen, sie werden aber nicht identisch werden. Uebrigens kommt es bei der räumlichen Multiplication gar nicht darauf an, dass

$$| [ab] = c \quad \text{anstatt} \quad [ab]$$

steht, da man bei der Aufstellung ner Grundformeln sich eines trigonometrischen Satzes bedient.

Haben wir das Product $[ab \,.\, cd]$, und soll die innere räumliche Multiplication ausgeführt werden, so ist nach der Ausdehnungslehre zu schreiben $[ab \,|\, cd]$. Führen wir die Ergänzungen ein, und setzen wir

$$[ab[= | c; \quad | [cd] = f$$

so wird

$$[ab \,|\, cd] = [\,|\, e f]$$

In diesem Product ist $| c$ eine unbenannte, f eine benannte Zahl. Bei der inneren räumlichen Multiplication haben wir also auch das Product einer benannten mit einer unbenannten Zahl. Solche Producte kommen im unseren Zahlensystem vor, wir können also ohne weiteres die Factorenfolge vertauschen

$$[\,|\, ef] = [e \,|\, f|$$

Dies ist also die innere Multiplication des ersten Abschnittes. Dem Symbol $[\,|\, ef]$ wird nun ein anderer Sinn beigelegt als dem Product $[a \,|\, b]$. Da f tatsächlich eine Fläche repräsentirt, so hat man nach einem bekannten Satze

$$f = cd \sin(cd)$$

zu setzen, und man erhält

$$[\,|\, e \,.\, f] = \mathfrak{e} cd \sin(cd]$$

Ist

$$ab = cd; \quad \text{so wird}$$

$$[ab] = \mathfrak{e} \,.\, f \quad \text{wo} \quad e = f$$

also

$$[ab]^2 = \mathfrak{e}^2 = a^2 b^2 \sin^2(cb)$$

Selbstredend werden auch hier die absoluten Zahlen $a = b$ genommen. Das Resultat stellt also eine absolute Zahl dar.

Die Formel 38)

$$ab \sin(ab) = \sqrt{(ab)^2}$$

führt Herr Grassmann mit der Bemerkung an:

„Nebenbei folgt aus der obigen Entwicklung die Formel 38)“

Diese Formel hat jedoch tatsächlich gar keine Ableitung gefunden, da sie eben eine geometrisch-trigonometrische Wahrheit ist, welche Herr Grassmann schon vor der Bemerkung zur Formel 38) benutzt, um das Product $[ab]$ auszudrücken. Die Formel 38) drückt diesen Satz nur in der Schreibweise der Ausdehnungslehre aus.

Für die äussere räumliche Multiplication wird die Definitions-Gleichung aufgestellt

$$[\,|\,a\,|\,b] = |\,[ab]$$

welche Formel sehr wol eine Ableitung zulässt, sobald man nur den Unterschied zwischen benannten und unbenannten Zahlen beachtet.

Bei der räumlichen äusseren Multiplication soll nun auch die Gültigkeit des Gesetzes über die Vertauschung der Reihenfolge der Factoren aufhören. Wir haben:

$$[ab = cd]; \quad [ab] = |\,e; \quad [cd] = |\,f \quad \text{es wird}$$

$$[\,|\,e\,|\,f] = |\,[ef]$$

Soll nun durch Vertauschung in der Reihenfolge von $e = f$ das Resultat beeinflusst werden, so müssen e und f die Richtung angeben. Nur in diesem Fall ist

$$[ef] = -[fe]$$

und hieraus ergiebt sich rückwärts

$$[ab\,cd] = -[cdab]$$

In der Aufgabe 5. auf S. 19 ist das Product $[\,|\,a\,|\,b\,|\,c]$ zu bestimmen. Natürlich wird es gleich $[abc]$ gefunden. Jetzt lesen wir Folgendes:

Verstehen wir nun endlich noch unter der Ergänzung einer Zahl α nichts anderes als diese Zahl α selbst, setzen wir also $\alpha = \alpha$, und somit auch

$$|\,[abc] = [abc]$$

so können wir das gewonnene Resultat auch so schreiben

$$[abc] = |\,[abc]$$

Ich bemerkn hiezu: Die Ausdehnungslehre kennt keine Ergänzungen einer Zahl, sie hat wohl Ergänzungen einer Strecke und

einer Fläche, aber von einer absoluten Zahl soll bei ihr keine Rede sein. Zudem sind die Ergänzungen der Strecke und Fläche sehr von einander verschieden, wie wir schon vorhin dargetan haben. Wir können aus dieser Bemerkung des Herrn Grassmann nur erkennen, dass in der Ausdehnungslehre benannte und unbenannte Zahlen nicht unterschieden werden. Dieses zeigt auch die Aufgabe 6)

Zur Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Theorie der Raumcurven wird die Gleichung einer Raumcurve dargestellt durch

$$x = x(t)$$

wo x von einem bestimmten Punkt O an gerechnet wird, und t eine variable Zahlengrösse ist. Für t kann man auch die Längenzahl des Bogens der Curve nehmen. Da mit x die Richtung verbunden ist, so ist durch die Gleichung

$$x = x(t)$$

die Raumcurve eindeutig bestimmt; eine Construction derselben nach dieser Gleichung dürfte wol unmöglich sein, da nur für die Construction die Richtung von x wirklich gegeben sein muss.

Bei der Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Raumcurventheorie ist ferner von grosser Wichtigkeit die Gültigkeit der Grundbegriffe und Operationen der Differentialrechnung in der Ausdehnungslehre. Herr Grassmann sieht die Gültigkeit als bestehend an, was nicht richtig ist.

Infolge des Additionstheorems der Ausdehnungslehre ist das zwischen x und $x + dx$ liegende Curvenstück dx, sodass $dx = ds$ ist. Für O als Coordinatenanfang sei

$$AO = x, \quad BO = x + dx$$

dann ist

$$AB = ds = dx$$

Es ist nun

$$AB = \sqrt{(BC)^2 + x^2(d\varphi)^2}$$

wo BC das gewöhnliche Differential und $d\varphi$ der Winkel zwischen x und $x + dx$ ist. Es ist aber das dx der Ausdehnungslehre grösser als das der Differentialrechnung, l er absolute Zahlenwert von dx ist also gleich dem Zahlenwert des Bogens, also

$$\sqrt{(dx)^2} = ds$$

Wir kommen hier auf den feinen Unterschied zwischen dx und ds. Es soll nämlich dx die Richtung und die Länge, ds nur die Längenzahl des Curvenbogens angeben, denn nur auf diese Weise kann

unter $\frac{dx}{ds}$ eine Strecke (Neigungsstrecke nach Herrn Grassmann) verstanden werden. Herr Grassmann lässt jedoch ds die Länge darstellen, wie aus dem Satz folgt:

„Dann ist das zwischen beiden Punkten liegende Curvenstück seiner Länge-Richtung nach gleich dx, während die Länge allein durch den correspondirenden Zuwachs von s, durch ds dargestellt wird.“ Wäre ds die Länge, so würde $\frac{dx}{ds}$ ausser der Richtung die Verhältnisszahl zwischen dx und ds angeben. Von einer Strecke könnte dann bei $\frac{dx}{ds}$ gar keine Rede sein. Es ist also $\frac{dx}{ds}$ weiter nichts als der dste Teil von dx.

Das zweite Differential findet man nach den Principien der Ausdehnungslehre dadurch, dass man AD gleich und parallel

$$dx_1 = BE$$

macht, so ist

$$BD = d^2x$$

Es fragt sich nun, ob der numerische Wert von d^2x sich mit dem durch die Differentiation erhaltenen deckt? Da der absolute Zahlenwert von dx gleich ds ist, so wird auch, wenn die Gültigkeit des gewöhnlichen Differentiirens als richtig angenommen wird, der absolute Zahlenwert von d^2x gleich d^2s sein. Dies tritt nur ein, wenn der absolute Wert von x gleich $s +$ const ist, was Herr Grassmann durchaus nicht annimmt.

Noch frappanter zeigt sich die Ungültigkeit in folgendem Beispiel: Es ist

$$\frac{d(x)^2}{ds} = 2\left[x \mid \frac{dx}{ds}\right]$$

Dieses Product ist aber nach der Definitionsgleichung gleich

$$\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\cos\left(x_0\ \frac{dx}{ds}\right)$$

wenn $\mathfrak{x}$ der absolute Zahlenwert von x und $\frac{d\mathfrak{x}}{ds}$ der absolute Zahlenwert von $\frac{dx}{ds}$ ist. Es besteht also die Gleichung:

$$\frac{d(x)^2}{ds} = 2\left[x \mid \frac{dx}{ds}\right] = 2\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\cos\left(x\ \frac{dx}{ds}\right) = 2\mathfrak{x}\cos\left(x\ \frac{dx}{ds}\right)$$

da

$$d\mathfrak{x} = ds$$

ist. Differentiren wir noch einmal, so ist

$$\frac{d^2(x)^2}{ds^2} = 2\left[\frac{dx}{ds} \mid \frac{dx}{ds}\right] + 2\left[x \mid \frac{d^2x}{ds^2}\right] = 2\cos\left(x\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{ds} + 2\mathfrak{x}\,\frac{d\left(\cos x\frac{dx}{ds}\right)}{ds}$$

denn der Winkel $\left(x, \frac{dx}{ds}\right)$ ist als Function von s anzusehen.

Führen wir nach der Definitionsgleichung die Multiplication aus, so ist

$$\left[\frac{dx}{ds} \mid \frac{dx}{ds}\right] = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \frac{(d\mathfrak{x})^2}{ds^2} = 1$$

$$\left[x \mid \frac{d^2x}{ds^2}\right] = \mathfrak{x}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}\cos\left(x, \frac{d^2x}{ds^2}\right) = \mathfrak{x}\,\frac{d^2x}{ds^2}\cos\left(x, \frac{d^2x}{ds^2}\right)$$

Was den Differentialquotienten von $\cos\left(x\frac{dx}{ds}\right)$ betrifft, so wissen wir, dass $\cos\left(x\frac{dx}{ds}\right)$ der cosinus desjenigen Winkels ist, welchen die Tangente mit dem Radiusvector, also mit AO bildet.

Da das gewöhnliche dx, (wenn $AO = x$ gesetzt ist) nicht gleich dem dx der Ausdehnungslehre in Bezug auf die Grösse ist, so wollen wir dieses gewöhnliche dx mit dr bezeichnen. Es ist also

$$BO - AO = BC = dr$$

Es wird mithin

$$\cos\left(x\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dr}{ds}$$

also nach s differentiirt:

$$\frac{d\cos\left(x_1\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{d^2r}{ds^2}$$

Beachten wir diese letzten Gleichungen, so ist

$$\frac{d^2(x)^2}{ds^2} = 2 + 2\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2}\cos\left(x\frac{d^2x}{ds}\right) = 2\cos\left(x, \frac{dx}{ds}\right) + 2\mathfrak{x}\,\frac{d^2r}{ds^2}$$

Es kann nun der Fall eintreten, dass d^2x senkrecht x steht, dann ist

$$\cos\left(x, \frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0$$

während a und dx nicht auf einander senkrecht stehen. Es wird dann

$$2 = 2\cos\left(x, \frac{dx}{ds}\right) + 2\mathfrak{x}\frac{d^2x}{ds^2}$$

was absurd ist, da beide Seiten übereinstimmen müssten, d. h. die rechte Seite müsste auch gleich 2 sein. Wir sehen also, dass die gewöhnliche Anwendung der Differentialrechnung zu einem absurden Resultat führt. Es ist also die Differentialrechnung nicht so ohne weiteres anzuwenden.

Es haben also die Formeln, welche Herr Grassmann giebt, auf S. 15, 16 für die Neigung der Hauptnormale etc. keinen Sinn, sie sind absurd.

In den Formeln der Theorie der Raumcurven ist die Einführung der Differentialquotienten gänzlich überflüssig. Nach Herrn Grassmann lautet die Gleichung für die Tangente

$$[(\xi - x)x'] = 0, \quad \text{wenn} \quad x' = \frac{dx}{ds}$$

ist, was bedeutet, dass die Strecke $\xi - x$ mit $\frac{dx}{ds}$ d. h. mit dem dsten Teil von dx zusammenfallen soll. In der Tangente muss jedoch das ganze dx liegen, sodass die Gleichung für die Tangente richtiger lautet

$$[(\xi - x)\,dx] = 0$$

Ein Gleiches zeigt sich bei der Gleichung der Normalebene.

Es möge hier noch auf eine Unrichtigkeit bei der Formel 13) auf S. 10 hingewiesen werden. Bei der geometrischen Ableitung der Neigung der Hauptnormale gelangt Herr Grass-mann zu der Formel:

$$\varphi\lambda = \frac{d^2x\,ds - d^2s\,dx}{ds\sqrt{(d^2x)^2 - (d^2s)^2}}$$

ohne irgend welche Rücksicht auf die variable Zahlengrösse zu nehmen, da sie dazu gar nicht benutzt wird. Es muss also dieses $\varphi\lambda$ mit dem $\varphi\lambda$ auf S. 10

$$\varphi\lambda = \frac{d^2x}{\sqrt{(d^2x)^2}}$$

übereinstimmen, was nicht stattfindet. Beide Ausdrücke werden gleich, wenn

$$d^2s = 0$$

in der ersteren Formel gesetzt wird.

Die Verschiedenheit beider Ausdrücke rührt daher. dass in Fig. 22. die Richtung der Hauptnormale *GD* richtigerweise senkrecht der Taugente *AG* steht, was aber in der Fig. 1. dieser Abhandlung auf 10. nicht stattfindet.

Wir sind also zu dem Resultat gelangt, dass die Ausdehnungslehre ihrem Princip, die geometrischen Grössen als solche zu behandeln, nicht treu bleibt, dass die in der Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Raumcurventheorie aufgestellten Gleichungen keinen Sinn haben, und dass die gewöhnliche Methode des Differentiirens in der Ausdehnungslehre unanwendbar ist.

Die Einführung neuer gänzlich abstracter Begriffe, deren Anzahl mit jeder neuen Anwendung dieser Lehre wächst, kann auf keinen Fall zur Vereinfachung beitragen.

Stettin, den 18. Sept. 1888.

Ernst Schultz.

Zum litterarischen Bericht XXXVII. S. 6 u. 7. über das „Lehrbuch der Elementar-Mathematik für höhere Unterrichtsanstalten. Von Prof. Dr. H. Lorberg“.

Auf S. 7. Zeile 17. 18 ist aus Versehen ein falsches Citat aufgestellt und dem Verfasser eine Behauptung zugeschrieben worden, von welcher er versichert, dass sie im Buche nicht vorkomme. Zur Berichtigung ist die gleiche Behauptung, aber von Seiten des Ref. zu substituiren. Es ist daher die Stelle Z. 17—20 — „schliesst der Verfasser etc. . . . verführt werden?“ — zu streichen und dafür einzuschalten: „ist die Grundlage des Beweises gegeben, dass jede Irrationalzahl eine einzige bestimmte Grösse ist, und die Rechnung mit ihr ohne den mindesten Fehler statthaben kann.“ Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bilfinger, G., die Sterntafeln in den ägyptischen Königsgräbern v. Bibân el Molûk. Stuttgart, Wildt'sche Buchh. 2 Mk.

Eisenlohr, A., e. mathematisches Handbuch der alten Aegypter [Papyrus Rhind d. British Museum], übers. u. erklärt: 2. Asg. (Ohne Tafeln.) Leipzig, Hinrichs'sche Buchh., Verl. 12 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 25. Unterredungen u. mathematische Demonstrationen üb. zwei neue Wissenszweige, die Mechanik u. die Fallgesetze betr., v. G. Galilei. Anh. zum 3. u. 4., 5. u. 6. Tag. Aus dem Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. Leipzig, Engelmann. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Methode und Principien.

Grassmann, R., die Ausdehnungslehre od. die Wissenschaft v. den extensiven Grössen in strenger Formel-Entwicklung. Stettin, Grassmann's Verl. 2 Mk. 25 Pf.

Hartmann, E., Anleitung zur Behandlung d. elementaren Rechenunterrichts in benannten Zahlen in heuristisch-entwickelter Lehrform. Giessen, v. Münchow. 1 Mk. 20 Pf.

Kluck-Kluczycki, V. P., Umsturz irrthümlicher Schullehren d. heutigen Standes der Wissenschaften: Physik, Chemie, Physiologie, Raumlehre, Astronomie etc. auf Grund der Auffassung v. der Einheit der Naturkraft. III. Das ballist. Princip d. gasexplosiven Mechanikzerfallens an der einst. einheitl. festen Masse d. Globuarwelt in Verbindg. m. Materieträgheit, begründet die an sich belassene Bewegg. im freien Himmelsraum der Stern- u. Planetenerscheingn. Krakau, Gebethner & Co. 3 Mk.

Sterner, M., principielle Darstellung d. Rechenunterrichtes auf historischer Grundlage. 1. Tl. Geschichte der Rechenkunst. München, Oldenbourg. 6 Mk.

Steuer, W., Methodik d. Rechenunterrichts. 4. Afl. Breslau, Woywod, Verl. 4 Mk. 50 Pf.

Lehrbücher.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Bd. 2. Abth. Planimetrie. 15. Afl. Hannover, Hahn'sche Buchh. 2 Mk.

Sammlungen.

Adam, W., Auflösungen der 6500 Aufgaben f. den Unterricht in der Arithmetik u. Algebra. In method. Stufenfolge bearb. 2. Tl. Neu-Ruppin, Petrenz. 3 Mk. 50 Pf.

Bothe, A., Sammlung v. Rechenaufgaben f. höhere Schulen. 3. Hft. Die Verhältnisse, Proportionen u. deren Anwendgn. 7. Afl. Annaberg, Graser's Verl. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Hagen, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. 1. Bd. Arithmetrische u. algebraische Analysis. Berlin, Dames. 30 Mk.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 928.—997. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Stockmayer, H., u. G. Thomass, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen, der Realschulen u. verwandten Lehranstalten. 1. Bdchen.: für 10—11 jähr. Schüler (III. Klasse). 5. Afl. Stuttgart, Bonz & Co. 80 Pf.

Zech, v., Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösgn. 2. Afl. unter Mithülfe v. C. Cranz. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 4 Mk. 20 Pf.

Tabellen.

Bišćan, Formeln u. Tabellen. Hilfs- u. Notizbuch f. den prakt. Elektrotechniker. Leipzig, Leiner. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Gravelius, H., vierstellige Logarithmentafeln. Berlin, Dümmler's Verl. 50 Pf.

Ligowski, W., Sammlung fünfstelliger, logarithmischer, trigonometrischer u. nautischer Tafeln, nebst Erklärgn. u. Formeln der Astronomie. 2. Afl. Kiel, Universitäts-Buchh. Geb. 7 Mk.

Stampfer, S., logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst verschiedenen andern nützl. Tafeln u. Formeln, u. e. Anweisung m.

Hülfe derselben logarithm. Rechngn. auszuführen. Wien, C. Gerold's S. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bobek, K. J., Lehrbuch der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 16. Afl. 1.–8. Lfg. Strassburg, Strassb. Druckerei & Verlagsanst. à 25 Pf.

Brenner, A., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik. 1. Tl. 2. Afl. Freising, Datterer. 1 Mk.

Gegenbauer, L., zur Theorie der hypergeometrischen Reihe. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Krüger, R., Lehrbuch d. Rechnens in imaginären u. komplexen Zahlen. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Lerch, M., zur Theorie der unendlichen Reihen. Prag, Rivnáč, Verl. 10 Pf.

Lie, S., Vorlesungen üb. Differentialgleichungen m. bekannten infinitesimalen Transformationen, bearb. u. hrsg. v. G. Scheffers. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Maier, J. G., Lehrbuch der Grundrechnungsarten. 3. Buch: das Rechnen m. unbenannten gebrochenen Zahlen (die gemeinen Brüche u. die Dezimalbrüche). Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 3 Mk.

Olbricht, R., Lehrbuch der Schluss- u. Kettenrechnung (der einfachen u. zusammengesetzten Regeldetrie u. d. Reesischen Satzes.) Bearb. nach System Kleyer. Ebd. 4 Mk. 50 Pf.

Pehrsson, P., Studien zur Lehre v. der Wurzelerweiterung u. Wurzelvariation. Upsala, Akadem. Buchh. 8 Mk. 80 Pf.

Schüler, W. F., Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen d 1. Grades. (Diophantische Gleichgn.) Nebst den Abhandlgn. d. Bachez de Méziriac im französ. Originale m. beigefügter Uebersetzg. Bearb. zum Teil nach System Kleyer. 1. Buch. Stuttgart, Jul. Maier. 4 Mk. 50 Pf.

Schüller, W. J., Arithmetik u. Algebra f. höhere Schulen u. Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Steck, F. X., u. J. Bielmayr, Lehrbuch der Arithmetik f. Latein- u. Realschulen. 10. Afl. Kempten, Kösel. 1 Mk. 20 Pf.

Ullrich, E., das Rechnen m. Duodecimalzahlen. Heidelberg, C. Winter's Univ.-B. 1 Mk. 80 Pf.

Vorschule der Sammlung arithmetischer u. geometrischer Auf-

gaben zur Vorbereitung auf die Lehrerinnen-Prüfung. Bearb. von e. ehemal. Mitgliede zweier Prüfungs-Commissionen. Düsseldorf, Bagel. 80 Pf.; Lösungsheft 40 Pf.

Geometrie.

Adler, A., graphische Auflösung der Gleichungen. Klagenfurt, v. Kleinmayr. 1 Mk.

Bürklen, O., zur Lehre vom Winkel. Tübingen, Franz Fues. 40 Pf.

Hartl, H., der Rechenwinkel. Ein Hilfsmittel zu raschen graph. Lösg. wicht. mathemat. Aufgaben. Reichenberg, J. Fritsche. 80 Pf.

Hočevar, F., Manuale di geometria del gimnasio inferiore. Traduzione de F. Postet. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 50 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Hoffmann, G., Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben, m. Uebungsbeispielen f. Schulen höherer Lehranstalten. 3. Afl. Leipzig, Reisland. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Iselin, J. J., die Grundlagen der Geometrie ohne spezielle Grundbegriffe u. Grundsätze, m. Einschluss e. vollständ. Darstellung der reinen Sphärik. Bern, Wyss, Verl. 6 Mk.

Küpper, K., Fortsetzung d. Untersuchung üb. algebraische Raumcurven (v. dieser Abh. B. III, IV, F. VII). Prag, Rivnáč, Verl. 80 Pf.

Menger, J., Grundlehren der Geometrie. Ein Leitfaden f. den Unterricht in der Geometrie u. im geometr. Zeichnen an Realschulen. Wien, Hölder. 1 Mk. 84 Pf.

— Leitfaden der Geometrie f. Gewerbeschulen. 2. Afl. Ebd. Kart. 1 Mk.

Pick, G., üb. das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen 2. Ordnung. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Waelsch, E., üb. e. geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen. Ebd. 30 Pf.

— zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen u. Flächen. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

— zur Konstruktion der Polargruppen. Ebd. 30 Pf.

Weyr, E., üb. Involutionen höheren Grades auf nichtrationalen Trägern. Ebd. 40 Pf.

— üb. Raumcurven 6. Ordnung vom Geschlechte Eins. (II. Mittheilung.) Ebd. 30 Pf.

Wolff, Ch., das Princip der reciproken Radien. Erlangen, Blaesing's Univ.-B. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Pietsch, C., Katechismus der Feldmesskunst. 5. Afl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Mechanik.

Jansen, W., die Kreiselbewegungs-Untersuchung der Rotation v. Körpern, welche in e. Punkte od. gar nicht unterstützt sind. Berlin, Luckhardt. 1 Mk. 80 Pf.

Ott, E., Elemente der Mechanik. 2. Afl. Zürich, Schulthess. 4 Mk.

Schmid, C., Statik u. Festigkeitslehre. Lehrheft nebst vielen Beispielen elementar behandelt f. den Gebrauch an der Schule u. in der Praxis. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 4 Mk.

Technik.

Becker, W., die Absteckung v. Strassen- u. Eisenbahncurven m. u. ohne Benutzung e. Winkelinstrumentes. 2. Asg. Wien, Spielhagen & Sch. 1 Mk. 60 Pf.

Bibliothek, elektrotechnische. 2. Bd. 3. Afl. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Central-Anzeiger f. d. gesammte Elektrotechnik. Jahrg. 1891. Nr. 17. Frankfurt, Gebr. Knauer. Halbjährl. 1 Mk.

Corsepius, M., Leitfaden z Construction v. Dynamomaschinen u. zur Berechnung v. elektrischen Leitungen. Berlin, Springer. 2 Mk.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: W. Krieg. 4. Jahrg. 1891. 27. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährl. 3 Mk. 75 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1891. 1. Heft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Früchtenicht, H., die Gezeiten. Lehrmittel. (2 ovale Tafeln m. Drehvorrichtung.) Halle, Reichardt. 75 Pf.

Weiler, W., der praktische Elektriker. Populäre Anleitg. zur Selbstanfertigg. elektr. Apparate u. zur Anstellg. zugehör. Versuche, nebst Schlussfolgergn., Regeln u. Gesetzen. Leipzig, Schäfer. 5 Mk.

Wolffberg, diagnostischer Farbenapparat. 3. Afl. Nebst Erläutergn. u. Gebrauchsanweisg. Breslau, Preuss & J. 4 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Breuer, A., übersichtliche Darstellung der mathematischen Theorie üb. die Dispersion d. Lichtes. II. Tl. Anomale Dispersion. Erfurt, Bodo Bacmeister. 2 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1890. I. Tl. Meteorologische u. magnet. Beobachtungen v. Stationen 1. Ordng. u. ausserordentl. Beobachtgn. v. Stationen 2. u. 3. Ordng. Leipzig, Voss' Sort. 10 Mk. 20 Pf.

Annalen, neue, der k. Sternwarte in Bogenhausen bei München. Hrsg. v. H. Seeliger. 2. Bd. München, Franz'scher Verl. 25 Mk.

Bebber, W. J. van, das Sturmwarnungswesen an den deutschen Küsten. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk.

Beobachtungs-Ergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 5. Hft. Ebd. 4 Mk.

Franz, J., die jährliche Parallaxe d. Sterns Oeltzen 11677, bestimmt m. dem Königsberger Heliometer. Königsberg, Gräfe & U. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Hann, J., Studien üb. die Luftdruck- u. Temperaturenverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel, nebst Bemerkgn. üb. deren Bedeutg. f. d. Theorie d. Cyclonen u. Anticyclonen. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

Hilfstafeln u. d. bisherigen Schriften der königl. Sternwarte Bogenhausen bei München. 2 Abhandlungen. München, Franz'scher Verl. 3 Mk.

Hornberger, R., Grundriss der Meteorologie u. Klimatologie, letztere m. besond. Rücksicht auf Land- u. Forstwirte. Berlin, Parey. 6 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches f. 1888. Beobachtungs-System d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1888. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co., Verl. 24 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches f. 1889. Beobachtungssystem d. Königr. Sachsen. Bericht üb. die Thätigkeit im königl. sächs. meteorolog. Institut f. d. J. 1889 m. 5 Anhängen u. 5 Taf. II. Hälfte od. III. Abth. d. Jahrbuches d. königl. sächs. meteorolog. Institutes. VII. Jahrg. 1889. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Brunner'sche B. 10 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, 1891. Bayern. Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern, hrsg. v. d. königl. meteorolog. Central-Station durch C. Lang u. F. Erk. 13. Jahrg. 1891. 1. Hft. München', Th. Ackermann, Verl. Jährlich 18 Mk.

Jahresbericht d. Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogth. Baden, m. den Ergebnissen d. meteorolog. Beobachtgn. u. d. Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein u. an seinen

grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1890 etc. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchh., Verl. 6 Mk.

Kleinstück, O., Zeitgleichungs-Zifferblatt. Jena, Mauke's Verl. Auf Pappe m. Zeigern. 1 Mk. 60 Pf.

Löschardt, F., die neuesten Hypothesen üb. die Rotation d. Planeten Venus, kritisch beleuchtet. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Mahler, E., die Berechnung der Jahrpunkte (Thekuphonrechnung) im Kalender der Juden. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Mittheilungen der Vereinigung v. Freunden der Astronomie u. kosmischen Physik. Red. v. W. Förster. I. Jahrg. Juli 1891 — Juni 1892. (10 — 12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Dümmler's Verl. Halbjährl. 3 Mk.

Oppenheim, S., Bestimmung der Bahn d Planeten (290) Bruna. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Pfeil, L. Graf v., kometische Strömungen auf der Erdoberfläche u. das Gesetz der Analogie im Weltgebäude. 4. Afl. Berlin, Dümmler's Verl. 7 Mk.

Publikationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 27. 8. Bds. 1. Stück. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. den Schriftführern der Gesellschaft. 26. Jahrg. 1. u. 2. Hft. Ebd. à 2 Mk.

Nautik.

Gezeitentafeln f. d. J. 1892. Hydrographisches Amt d. Reichs-Marine-Amts. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. 1892. 31. Jahrg. Hrsg.: W. Ludolph. Bremen, Heinsius Nachf. 75 Pf.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1894 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See, nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. vom Reichsamt d. Innern, unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Bibliothek d. Elektrophysiker u. Elektrotechniker. Verzeichniss der neuesten Erscheinungn. aus dem Gebiete der Elektricität, Elektrotechnik, Physik, Chemie, Mechanik u. Maschinenlehre etc., wesentlich die Elektricitäts-Literatur d. In- u. Auslandes. Frankfurt, Alt. 2 Mk.

Boltzmann, L., Vorlesungen üb. Maxwell's Theorie der Elektrizität u d. Lichtes. I. Thl. Ableitung der Grundgleichgn. f. ruh., homogene, isotrope Körper. Leipzig, J. A. Barth. 5 Mk.

Crüger, J., Lehrbuch der Physik. 7. Afl. Leipzig, Amelang's Verl. 4 Mk. 50 Pf.

Exner, E., elektrochemische Untersuchungen. (1. Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Faraday, M., Experimental-Untersuchungen üb. Elektricität. Deutsche Uebersetzg. v. S. Kalischer. 3. (Schluss-) Bd. Berlin, Springer. 15 Mk.; geb. 17 Mk. 20 Pf.; kplt. 36 Mk.; geb. 39 Mk. 60 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 10. Lfg. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Hollenberg, A., Stücke aus der Physik. Ein Hülfsbuch f. Lehrer an Volksschulen. 3. Afl. Moers, Spaarmann. 1 Mk. 20 Pf.

Jäger, G., das Gesetz der Oberflächenspannung v. Lösungen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Klemenčič, J., üb. die Reflexion v. Strahlen elektrischer Kraft an Schwefel- u. Metallplatten. Ebd. 50 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 159. u. 160. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf

Kries, J. v., üb. die Beziehungen der Physik u. der Physiologie. Rede. Freiburg, Mohr. 60 Pf.

Obermayer, A. v., zur Erklärung e. m. der fortführenden Entladung der Elektricität verbundenen Anziehungserscheinung. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Pfaundler, L., üb. e. verbesserte Methode, Wärmecapacitäten mittelst d. elektrischen Stromes zu bestimmen. Ebd. 70 Pf.

Puluj, J., Bestimmung d. Coefficienten der Selbstinduction m. Hülfe d. Elektrodynamometers u. e. Inductors. Ebd. 40 Pf.

— Untersuchungen üb. die Entladung der Elektricität aus Spitzen, in verschiedenen Gasen, bei verschiedenen Drucken. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum praktischen Leben. 26.—30. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Asg. v. E. Gumlich, L. Hollborn, W. Jaeger, D. Kreichgauer, Ch. Lindeck. 1. Thl. Mechanik. 1. Bd. Allgemeine Mechanik u. Mechanik der festen Körper. 2. u. 3. Lfg. Berlin, Springer. à 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 39. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Für den Band 20 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. E. Lampe. 20. Bd. Jahrg. 1888. 3. Hft. Berlin, Georg Reimer. 14 Mk.

Vorträge d. Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. 31. Jahrg. Wien, Hölzel's Verl. 1. Hft. 60 Pf.; 18. Hft. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 100. Bd. 1. u. 2. Hft. Leipzig, Freytag. 4 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1891. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Litterarischer Bericht
XLII.

Geometrie.

Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curvas) von Carl Friedrich Gauss (1827.) Deutsch herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig 1889. Wilhelm Engelmann. 62 S.

Das Vorliegende ist Nr. 5. von Ostwald's Classikern der exacten Wissenschaften. Das Originalwerk von Gauss beginnt mit der von ihm geschaffenen Lehre von der (von französischen Schriftstellern sogenannten) sphärischen Darstellung, d. i. Abbildung der Flächen auf der Kugel vom Radius 1 nach dem Princip gleichgerichteter Normalen. Dann folgt die Theorie der Berührungsebenen und Normalen, dann die Einführung der Begriffe des Krümmungsmasses k der Fläche in einem Punkte und der Gesamtkrümmung eines begrenzten Flächenstücks σ; d. i. der Grösse seiner sphärischen Darstellung, ausgedrückt durch $\int k \partial \sigma$. Dann folgt die Theorie der kürzesten Linien unter vorwaltendem Gesichtspunkt praktisch geodätischer Anwendung ausgebildet mit Eingehen auf approximative Rechnung mittelst Reihenentwickelung, womit auch die Schrift schliesst. Hinzugefügt sind Anmerkungen des Uebersetzers. Zuerst werden die principiell neuen Elemente ans Licht gestellt, welche Gauss der noch heute fortbestehenden Gestaltung der Theorie hinzugebracht hat, dann über die Succession der Publicationen seiner Schrift Nachrichten gegeben, dann wird über die einzelnen Deductionen, welche zumteil nicht die einfachst möglichen sind, Kritik geübt und die Fortbildung der Gauss'schen Grundlagen durch neuere Autoren in Betracht gezogen. H.

Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale. Zum Gebrauch für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen bearbeitet von A. Michalitschke. Zweite Auflage. Erster Teil. Mit Figurentafel. Prag 1891. H. Dominicus.

Was die Bezeichnung des Gegenwärtigen als „erster Teil" bedeutet, ist durch nichts ersichtlich, es stellt sich als erschöpfendes Ganzes dar. An die Spitze wird als Definition „einer Classe von Spiralen" die Polargleichung $r = a\varphi$ gestellt. Da keine Erwähnung davon geschieht, dass an die Stelle der Potenz jede beständig wachsende oder abnehmende Function treten kann, so hätte die Zugehörigkeit der 3 betrachteten Spiralen zu jener definirten Classe auch nachgewiesen werden müssen. Es erscheint daher als nachlässige Inconsequenz, dass die logarithmische Spirale, welche in der Form

$$r = \lim\left(1+\frac{a\varphi}{n}\right)^n \quad (n = \infty)$$

in der Tat als Grenzfall der Classe angehört, hier ohne Erwähnung dieser Beziehung schlechthin als Spirale andrer Classe aufgestellt wird. Von jeder dieser 3 Spiralen einzeln wird die Gleichung aufgestellt und discutirt, die Construction gelehrt, die Differentialgleichungen, die Berührungsgrössen, die Krümmung, die Rectification und Quadratur entwickelt, von der logarithmischen Spirale ausserdem die Evolvente, Evolute, Fusspunktcurve, Katakaustika, Antikaustika, Diakaustika, Perikaustika, Antevolute und Cykloidalis in Untersuchung gezogen, im Anhang auf weitere Eigenschaften die Aufmerksamkeit gelenkt. Der Nutzen des Buchs für das Studium der ebenen Curven ist ein offenbarer: es wird dadurch den Anfängern die Anregung gegeben die Natur und Eigenschaften anderer specieller und allgemeinerer ebener Curven in vielseitigster Weise zu untersuchen und dadurch Vertrautheit mit der Theorie der ebenen Curven zu gewinnen. H.

Die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Von Dr. A. Emmerich, Gymnasiallehrer zu Mühlheim a. d. Ruhr. Mit 50 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. Berlin 1891. Georg Reimer. 154 S.

Das Vorliegende gibt in systematischer Entwickelung und elementarer Herleitung alle bis jetzt entdeckten Eigenschaften und Beziehungen der Brocard'schen Gebilde, nämlich Punkte, Winkel und Kreise, bloss mit Ausschluss der Beziehungen zu den Kegel-

schnitten. Ausgehend von der Aufgabe: die 3 sich in einem Punkte schneidenden Transversalen eines Dreiecks zu ziehen, welche mit den Seiten gleiche Winkel bilden — einer Aufgabe, durch deren 2 Lösungen die 2 Broc. Punkte und die 2 Broc. Winkel definirt sind, werden zuerst Sätze über diese Gebilde selbst, dann über die Lemoine'schen Kreise, die Tueker'schen Kreise, den Taylor'schen Kreis, die Beikreise, den Brocard'schen Kreis und das Brocard'sche Dreieck, die gleichbrocardischen Dreiecke, die Neuberg'schen und die Mc Cay'schen Kreise in ihren Beziehungen zu jenen Gebilden entwickelt. Sämtliehe hier betrachteten und mit vorstehenden Namen bezeichneten Gebilde finden ihre Erklärung bei ihrer Einführung. Auch die Methode beansprucht keine Vorkenntnisse als elementare Geometrie, Algebra und Trigonometrie, bindet sich weder an Rechnung noch an directe geometrische Schlüsse, sondern wählt mit Hülfe beider den einfachsten Weg. Die Bestimmungsweise schliesst sich stets direct an das Dreieck, auf welches die Gebilde Bezug haben, als Fundamentaldreieck an, setzt aber keine Bekanntschaft mit üblichen trimetrischen Coordinatentheorien voraus, noch beschränkt sie sich auf irgund welche. Nach allem ist das Buch selbst für diejenigen, welche ohne Verweilen bei der Dreiecksgeometrie nur in der Kürze von dem Gegenstande Kenntniss nehmen wollen, ganz geeignet, bietet aber auch durch seine Reichhaltigkeit und den Hinblick auf weitere Forschung Interesse genug für dauerndes Studium. H.

Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, nach neueren Methoden dargestellt von Adolf Hanner, ordentlicher Professor der höheren Mathematik an der k. u. k. technischen Militär-Akademie in Wien. Mit 127 in den Text gedruckten Figuren. Prag 1891. H. Dominicus. 480 S.

Das Vorliegende ist ein Lehrbuch zunächst bestimmt für die Schüler des Verfassers. Die Gegenstände desselben, welche als eigentliches Ziel des Vortrags erscheinen, sind Lehren der neueren synthetischen Geometrie, solche die der Verfasser für nützlich und zweckentsprechend erachtet hat. Die durchgehends angewandte analytische Rechnungsform dient als Mittel der Herleitung und wird zum geeigneten Organ dafür soweit nötig cultivirt. Der Titel ist daher nicht zutreffend, wenn gleich bei Beachtung der angegebenen Gegenstände kaum misszuverstehen. Die Gegenstände sind (nach einleitenden allgemeinen Anordnungen) folgende: Die Gerade und der Punkt nebst dem Gesetze der Reciprocität; Punktreihen und Strahlenbüschel 1. Ordnung; Eigenschaften ebener Figuren; die homogenen Coordinaten; projectivische Punktreihen und Strahlen-

büschel 1. Ordnung; Involution; Invarianten und Covarianten binärer Formen; projectivische ebene Systeme; allgemeine Untersuchungen über Kegelschnitte; Polarisation; Mittelpunkt, Asymptoten, Durchmesser; projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte: Kegelschnittbüschel und Kegelschnittreihe. H.

Netze zum Anfertigen zerlegbarer Krystallmodelle. Für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterrichte herausgegeben und erläutert von Dr. W. Waege, Oberlehrer am Königstädtischen Gymnasium zu Berlin. Dreizehn Tafeln und Text. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1890. R. Gaertner. 22 S.

Die 1. Auflage ist im 30. litt. Bericht, S. 20 besprochen. Die 2. Auflage fügt zum Inhalt der ersten eine zweite Abteilung, bestimmt für die nächst höhere Classe, hinzu, in welcher 13 neue und weniger einfache Krystallformen behandelt werden. Ueber die Befestigung der Stücke beim Gebrauche ist diesmal gesagt, dass eine Stricknadel vertical hindurchgesteckt meistens zum Aneinanderhalten genügt. H.

Optik, Akustik und Elasticität.

Uebersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. Einheitlich und leicht fasslich entwickelt von Adalbert Breuer, k. k. Professor in Trautenau, Böhmen. Erster Theil. Normale Dispersion. Mit einer Figurentafel. Hannover 1890. J. Bacmeister. 50 S.

Nachdem die Gesetze der Schwingungen des freien Aethers berechnet sind, werden die Theorien der Dispersion von Cauchy, Powell, Broch, Redtenbacher, Eisenlohr, Christoffel, Briot, C. Neumann und Boussinesq entwickelt und die hauptsächlichen historischen Notizen dazu gegeben. Der Verfasser hofft durch seine Bearbeitungsweise das Verständniss erleichtert zu haben. Sollte dies indes auch nicht für jedermann der Fall sein, so bietet doch die Zusammenstellung gewiss eine Erleichterung des Studiums. Zugaben sind: die empirischen Formeln von Ketteler und die Approximationsgleichungen der Aetherbewegung. H.

Die Spectralanalyse in einer Reihe von sechs Vorlesungen mit wissenschaftlichen Vorträgen. Von H. E. Roscoe. Dritte

Auflage. Neu bearbeitet vom Verfasser und Arthur Schuster. Mit 123 Holzstichen, Chromolithographien, Spectraltafeln etc. Braunschweig 1890. Friedrich Vieweg und Sohn. 466 S.

Der Vortrag zeichnet sich durch Einfachheit, Klarheit und Concinnität aus. Charakteristisch ist indes, dass er ohne Ruhepunkt von Anfang bis Ende gleichmässig fortgeht. Beschreibung der Experimente und Vorgänge und Theorie begleiten einander beständig; resultirende Sätze, Einteilung, theoretischen Fortschritt gibt es nicht zu verzeichnen. Die Experimente entsprechen unmittelbar der Demonstration in den Vorlesungen; ihre Abbildungen stellen recht deutlich das Aufzufassende in den Vordergrund. Auch die Geschichte der Entdeckungen ist ganz in den doctrinären Vortrag verwebt. Die 3. Auflage ist wesentlich umgearbeitet, und sind darin die neuen Entdeckungen, soweit sie als gesichert gelten, aufgenommen.

H.

Handbuch für Spectroskopiker im Cabinet und am Fernrohr. Praktische Winke für Anfänger auf dem Gebiete der Spectralanalyse. Von Nicolaus von Konkoly, Dr. phil., Ritter des eis. Kronenordens III. Cl., Beisitzer Sr. Maj. des Kaisers von Oesterreich grosser goldenen Medaille für Kunst u. Wiss., Mitglied vieler gelehrten Gesellschaften und Akademien etc. Mit 335 Holzschnitten im Texte. Halle a. S. 1890. Wilhelm Knapp. 560 S.

Der Verfasser begründet den Anspruch des gegenwärtigen Werkes darauf, dass es neben allen vorhandenen Werken über Spectroskopie noch einem Bedürfnisse entspreche, hauptsächlich durch die darin gegebenen praktischen Winke für Anfänger. Da es überdies mit besonderer Berücksichtigung des Schulgebrauchs abgefasst ist, so wird gewiss niemand geneigt sein, die Mühe einer neuen Bearbeitung des Lehrstoffs für nutzlos zu erklären. In den einzelnen Hauptabschnitten wird behandelt: die Einrichtung eines spectroskopischen Laboratoriums; Präcisions-Hülfsapparate; die Spectroskopie; die Messapparate zu denselben; Spectralphotometer und Spectroskope für specielle Untersuchungen; die Fernröhre, ihre Unterbringung und ihre Triebwerke; die Sternwarten im allgemeinen. Bei der Herstellung des Werkes haben dem Verfasser als Hülfe gedient: Schellen's Spectralanalyse, Kayser's Spectralanalyse und die Abhandlungen von Hugo Krüss. H.

Grundzüge einer neuen Musik-Theorie Von Joachim Steiner. Wien 1891. Alfred Hölder. 89 S.

Einführung in die Elemente der physikalischen Musiktheorie. Ein Beitrag von Dr. Leopold Austerlitz, k. u. k. Oberlieutenant im Artillerie-Stabe, Lehrer der Mathematik an der k. u. k. Militär-Oberrealschule. 11 S.

Es handelt sich um die Verwendung rein harmonischer Intervalle für die Musik und die dazu erforderliche Stimmung der Scalen. Die Abschnitte der Schrift sind folgende: Feststellung einiger Grundbegriffe; Kritik der Grundformen, Tonverwandtschaft; einfache Quintsysteme, classische Diatonik, Chromatik; harmonisches Tonsystem; Enharmonik; Zergliederung der siebenstufigen Tonleitern; Parallelismus und Reciprocität, melodische Freizügigkeit; die wichtigsten Accorde; verschiedene Ergänzungen; Notenschrift, Historisches; temperirte Stimmung; das Problem der reinen Stimmung. H.

Grundriss der Festigkeitslehre. Zum Gebrauch an Handwerkerschulen, insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Mit 91 in den Text gedruckten Figuren und mehreren Tafeln, sowie mit zahlreichen Uebungsbeispielen und Aufgaben. Dresden 1890. Gerhard Kühtmann. 123 S.

Nach Aeusserung im Vorwort soll das Buch beide Extreme meiden, welche der Verfasser in den vorhandenen Hülfsmitteln gefunden habe, indem die einen blosse Regeln geben, die andern in der Theorie zu weit gehen. Die bezeichnete Kluft, wofern sie existirt, ist erklärlich, da der Lehrer nicht gern bei unzureichender Begründung stehen bleiben würde. Factisch aber kann man bemerken, dass im technischen Unterricht gewöhnlich eine Mittelstufe beliebt wird, dass aber ein langsamer Fortschritt zugunsten der theoretischen Bildung Platz greift. Man macht die Erfahrung, dass die Theorie nicht bloss ein tieferes Verständniss eröffnet, worauf wol Mancher gern verzichtet, sondern auch die Aneignung des Lehrstoffs sehr erleichert. Bei theoretischer Ausbildung handelt es sich aber nicht allein um Begründung der einzelnen Lehren, von der das Vorwort allein spricht, viel wichtiger ist die klare Auffassung der Begriffe und ihrer Beziehungen. Dass die Lehre von der Festigkeit nicht ohne Eingehen auf die Lehre von der Elasticität dargelegt werden kann, ist leicht zu sehen, und das vorliegende Lehrbuch versäumt nicht über letztere das nötige beizubringen. Wie sich aber beide Begriffe zu einander verhalten, davon sagt es kein Wort. Zu Anfang wird Festigkeit so erklärt, dass nicht Festigkeit sondern nur Elasticität der Angabe entspricht. Weiterhin werden als Aufgaben der

Festigkeitslehre drei aufgestellt: die dritte ist eine Frage der Elasticität, welche den beiden ersten schon zugrunde liegt, hier aber, wo sie am Ende steht, als neugierige Nebenfrage erscheint. Jedenfalls ist der Verfasser nicht bestrebt gewesen über die Begriffe aufzuklären, was hier innerhalb der Sphäre der niedrigsten Technik hätte leicht geschehen können. Der Reihe nach wird behandelt: Zugfestigkeit, Zerdrückungsfestigkeit, Schubfestigkeit, Biegungsfestigkeit, Drehungsfestigkeit, Zerknickungsfestigkeit. Jedem Abschnitt sind Uebungsbeispiele hinzugefügt. Zwei Anhänge geben numerische Tabellen.

Hoppe.

Erd- und Himmelskunde.

Die Wettervorhersage. Eine praktische Anleitung zur Wettervorhersage auf Grundlage der Zeitungswetterkarten und Zeitungswetterberichte für alle Berufsarten. Im Auftrage der Direktion der deutschen Seewarte bearbeitet von Prof. Dr. W. J. van Bebber, Abtheilungsvorstand der deutschen Seewarte. Mit zahlreichen Beispielen und 103 Abbildungen. Stuttgart 1891. Ferdinand Enke. 171 S.

Der Verfasser stellt sich die grosse Aufgabe, die Erfolge der wissenschaftlichen Meteorologie dem ungelehrten Volke zugänglich zu machen. Er constatirt zunächst, dass das Publicum, obgleich es beständig in dem Elemente der Wettererscheinungen lebt, doch so gut wie keine Kenntniss von den neuern Fortschritten erhalten hat, und nach wie vor die irrigen Vorstellungen und Vorurteile geblieben sind, und schreibt den Grund davon allein dem Umstand zu, dass noch keine gemeinverständliche Mitteilung von Seiten Kundiger veröffentlicht worden ist. Einen tiefern und allgemeinern Grund aber lässt er unerwähnt, und doch ist gerade dieser geeignet das Verdienstliche des gegenwärtigen Unternehmens ins Licht zu stellen. Die meisten Menschen sind wie bekannt sehr abgeneigt sich das Gesehene im natürlichen Zusammenhange vorzustellen und daraus Belehrung zu schöpfen; nichts lehrende Regeln sind ihnen meist lieber. Der Reisende verlangt nach einer gleichen Landeszeit, obgleich ihm diese die Möglichkeit raubt aus der Bahnhofsuhr die Länge des Ortes, wo er sich befindet, zu erkennen, und trotzdem er an jeder Landesgrenze durch die unregelmässige Zeitdifferenz vexirt wird. Für die Fragen des Mondwechsels, die eine einfache Anschauung dessen, was man täglich sieht, von selbst beantworten

würde, werden Regeln aufgestellt, die keine Belehrung geben. Diese Scheu vor dem Denken, welche bei den gewöhnlichen Erscheinungen weit grösser ist, als bei entferntern und tiefern Fragen, würde auch in der Meteorologie alle Belehrung unwirksam machen. Doch, ist auch die Zahl derjenigen, die für den Zusammenhang der alltäglichen Erscheinungen Interesse haben, gering, so ist es um so wichtiger, dass wenigstens diese Wenigen, darauf aufmerksam gemacht werden, wie sie ohne tieferes Studium sich eine Fähigkeit aneignen können, die ihnen fürs ganze Leben Gewinn bringt. Dass dies sehr selten geschieht, ist erklärlich; denn dem Autor kommt hierin keine Nachfrage entgegen. Um so höher ist jede Stimme zu schätzen, die sich dafür erhebt, und jede Arbeit, die dem genannten Zwecke gewidmet ist. Auch das gegenwärtige Werk gehört zu diesen seltenen Unternehmungen; sein höchster Wert liegt darin, dass es für die Auffassung der gewöhnlichen Erscheinung, der beständigen Umgebung des Menschen im causalen Zusammenhange, obgleich derselbe von den Wenigsten gesucht wird, eintritt. Die Meteorologie ist natürlich in anderm Falle als andere Zweige der Naturwissenschaft: sie bedarf einer weit ausgedehnteren empirischen Basis. Um den Leser mit dieser vertraut zu machen, war es nötig das ganze Verfahren der meteorologischen Anstalten darzulegen. Dies ist im ersten Abschnitt geschehen. Dann folgt die causale Beurteilung der in den Wetterkarten dargebotenen empirischen Grundlage, die Bedeutung der Maxima und Minima des Luftdrucks und der Zugstrassen im allgemeinen. Dann werden insbesondere betrachtet Gebiete mit hohem, dann mit niedrigem Luftdruck, dann die einzelnen Zugstrassen bei kälterer und bei wärmerer Jahreszeit, dann zur Aufstellung von Wettervorhersagen auf Grundlage der Wetterkarten Anleitung gegeben, dann gezeigt, wie örtliche Betrachtungen (über Temperatur, Wind, Luftdruck u. s. w.) dabei zu berücksichtigen sind. Von allen Beurteilungen werden zahlreiche Beispiele gegeben.

H.

Zeitgleichungs-Zifferblatt. Von Dr. O. Kleinstück. Jena (1891). Fr. Mauke (A. Schenk).

Auf einer Tafel (33 × 28 ctm) sind um den Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Minuten einer Stunde von — 30 bis 30 zählt, 2 Zeiger drehbar. Innerhalb des Kreises verfolgt eine Curve die Monate und Tage eines Jahres. Die Differenz der mittleren und wahren Zeit, gibt nun das Ende des messingenen Zeigers an, wenn derselbe über den Curvenpunkt des betreffenden Tages geht. Der eiserne Zeiger soll dazu dienen, sich die sog. Einheitszeit, d. i. die

mittlere Zeit des 15ten Meridians östlich von Greenwich, zu vergegenwärtigen, indem man ihn entsprechend der Längendifferenz vor oder hinter den messingenen stellt. H.

Vermischte Schriften.

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. IV. Anno XXIX. Napoli 1890.

Der 4. Jahrg. der 2. Reihe enthält folgende mathematische Arbeiten.

V. Reina: Ueber die Theorie der Normalen einer Fläche.

A. Forti: Neue Tafeln der hyperbolischen Functionen, welche den doppelten Sector zum Argument haben. (Bericht.)

G Torelli: Ueber einige partielle Differentialgleichungen. — Ueber eine Formel von Halphen bezüglich der Transformationen der linearen Differentialgleichungen. — Ausdehnung eines Satzes von Riemann bezüglich des Quotienten der vollen elliptischen Integrale 1. Gattung. — Nekrolog auf Raffaele Rubini, Verfasser von „Trattato di geometria analitica", „Complementi di algebra", „Elementi di calcelo infinitesimale" und „Teoria delle forme algebriche".

G. Pirondini: Von einer besondern geometrischen Transformation.

V. Mollame: Ueber den casus irreductibilis der kubischen Gleichung.

A. Capelli: Ueber die Theorie der algebraischen Functionen mehrerer Variabeln. H.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb Editor. Thomas Craig Associate Editor. Vol. XIII. Baltimore 1891.

Der 13. Band enthält folgende Abhandlungen.

M. W. Haskell: Ueber die zu der Curve $\lambda^3\mu+\mu^3\nu+\nu^3\lambda=0$ im projectiven Sinne gehörende mehrfache Ueberdeckung der Ebene. — Cayley: Ueber eine lösbare Gleichung 5. Grades. — O. Bolza: Ueber die Theorie der Substitutions-Gruppen und ihre Anwendungen auf algebraische Gleichungen — M. d'Ocagne: Einige Eigenschaften der Zahlen K_m^p. — P. Appell: Ueber die Gesetze der centralen

Kräfte, welche den Angriffspunkt bei allen Anfangsbedingungen einen Kegelschnitt beschreiben lassen. — H. Taber: Ueber gewisse Identitäten in der Theorie der Matricen. — W. C. L. Gorton: Systeme auf einer Fläche normaler Strahlen. — F. Morley: Ueber die Epicykloide. — H. P. Manning: Reduction von

$$\frac{\partial x}{\sqrt{A(1+mx^2)(1+nx^2)}} \quad \text{auf} \quad \frac{M\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

durch die Substitution

$$x^2 = \frac{a+by^2}{a'+b'y^2}$$

J. C. Fields: Einfacher Beweis des Reciprocitäts-Satzes aus dem Gauss'schen Kriterium. — Ausdrücke für Bernoulli'sche und Euler-sche Zahlen in ihrer Beziehung. — P. A. McMahon: Dritte Abhandlung über eine neue Theorie der symmetrischen Functionen. — J. Perott: Bemerkung zum Euklid'schen Satze über die Unendlichkeit der Anzahl der Primzahlen. — K. Pearson: „Aetherspritzen“ (Eine kosmische Hypothese). — C. H. Chapman: Ueber die Matrix, welche einen Vector darstellt. – F. Brioschi: Ueber eine neue Form der Modulargleichung 8. Grades. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XVIII. XIX. Amsterdam 1891. Sikken en Co.

Der 18. u. 19. Band enthalten folgende Abhandlungen.

G. Schouten: Lös. Pr. Aufg. 6. 7. (Pendelndes Rotationsellipsoid) (Centralbewegung für eine Kraft von der Form Ar^n) 18 — P. H. Schoute: Nachschrift zu ersterer. 18. — W. van Loghem: Ort der Punkte einer in ihrer Ebene bewegten Scheibe, deren plötzliche Befestigung die lebendige Kraft auf $\frac{1}{n}$ ihres Wertes bringt. 18. — F. J. van den Berg: Ueber die Wahrscheinlichkeit, dass die Teile einer willkürlich geteilten Geraden zwischen gegebenen Grenzen liegen — und: dass sie ein geschlossenes Vieleck einschliessen können. 18. — Ueber reciproke Polcurven. — Ueber eine in der Geodäsie anwendbare Aufgabe. — Die ältesten Rechentafeln der Welt. 19. – W. Mantel: Ueber Bewegungsmomente. Eine Methode. — Th. B. van Wettum: Ueber die Quaternionen-Matrix. 18. — R. J. Escher: Theorie der algebraischen Functionen. 18. — J. E. Kluyver: Lös. Aufg. 7. (Complex der Geraden auf einer Fläche 2. Grades, die durch 7 willkürliche Punkte geht). 19. — A. A. Nijland: Logarithmische Coordinaten. 19. — C. Krediet: Lös. Aufg. 12. (4 sich anziehende Punkte in gesuchter anfänglicher

Stellung und Geschwindigkeit sollen constanten Abstand behalten) 19. — J. M. Thiel: Neuer Beweis des Satzes von Euler, bewiesen für convexe Körper. 19. — G. J. D. Mounier: Beweis eines Satzes aus der höhern Algebra — Vollständige Berechnung des Schimmelspiels. 19. — H. Ekama: Eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten. — Das Schimmelspiel. 19. — P. Molenbreek: Ueber die geometrische Darstellung imaginärer Punkte im Raume. 19. — L. van Elfrinkhof: Auflösung linearer Vector-Gleichungen in besondern Fällen. — Bemerkungen zur Abhandlung von Wettum über Quaternionen-Matricen. 19. — P. J. Helwig: Construction einiger Systeme der Ecktransversalen des ebenen Dreiecks. 19. H.

Annuaire pour l'an 1892. Publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Prix 1 fr. 50 c. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1892 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: Notice sur la 3e réunion du Comité international permanent, pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel, à l'Observatoire de Paris, en avril 1891; par le Contre-Amiral Mouchez. — Notice sur la Lune et son accélération séculaire; par F. Tisserand. — Session de l'Association geodésique internationale, tenue à Florence, le 8 octobre 1891; par A. Bouquet de la Grye. — Les Observatoires de montagne. Un Observatoire au Mont-Blanc; par J. Janssen. — Sur la Mire lointaine de l'Observatoire de Nice; par A. Cornu. — Discours prononcés à l'inauguration de la statue du chevalier de Borda, à Dax, le dimanche 24 mai 1891; par A. Bouquet de la Grye et le Vice-Amiral Paris. In-18 de v-876 pages, avec figures et 2 Cartes magnétiques.

Gauthier-Villars et fils.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Adam, W., Geschichte d. Rechnens u. d. Rechenunterrichts. Zum Gebrauch an gehobenen u. höheren Lehranstalten, sowie auch bei der Vorbereitg. auf die Mittelschullehrer- u. Rektoratsprüfg. bearb. Quedlinburg, Vieweg's Buchh. 2 Mk. 40 Pf.

Cantor, M., Vorlesungen üb. Geschichte der Mathematik. 2. Bd. Von 1200—1668. 1. Thl. Leipzig, Teubner. 14 Mk.

Grotefend, H., Zeitrechnung d. deutschen Mittelalters u. der Neuzeit. 1. Bd.: Glossar u. Tafeln. Hannover, Hahn'sche Buchh. 16 Mk.

Villicus, F., die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthume bis zum XVIII. Jahrh. m. besond. Rücksicht auf Deutschland u. Oesterreich. Mit Illustrat. u. e. tabellar. Zusammenstellg. v. Zahlwörtern aus 72 Sprachen, nebst Zählungssystemen v. altamerik. Völkerstämmen. 2. Afl. Wien, Gerold's S. 2 Mk. 80 Pf.

Methode und Principien.

Gef, W., die Wellen der Schwerkraft u. ihre Wirkgn. auf die Wellen der Elektrizität, d. Lichts u. auf die Körper. Heidelberg, A. Siebert. 1 Mk.

Geigel, R., Gedanken üb. Molecularattraction. Würzburg, Stahel. 30 Pf.

Glasmacher u. Schmitz, Anleitung zum Rechenunterricht unter Zugrundelegung der „Neuen Ausgabe“ d. Rechenbuches der Verff. Strassburg, Heitz. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Hauer, L. u. A. Sulzbacher, praktische Anweisung zur Erteilung d. Rechenunterrichts in der Volksschule. Ein Handbuch f. Lehrer u. Seminaristen. Neuwied, Heuser's Verl. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Heinze u. Hübner, Methodik d. Rechnens. Lehrer-Ausgabe d. Rechenbuches A. Aufgaben u. Auflösgn. 7 Hefte u. Anh. zum 4. Heft. 2. Aufl. Breslau, Görlich's Verl. 6 Mk. 35 Pf.

Räther, H., Theorie u. Praxis d. Rechenunterrichts. Im Anschluss an das Uebungsbuch f. mündl. u. schriftl. Rechnen, v. H. Räther u. P. Wohl bearb. 2. Tl. Die Zahlreihe 1—100000 u. die mehrfach benannten Zahlen. Breslau, E. Morgenstern, Verl. 2 Mk.

Simon, M., zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. Strassburg, Strassb. Druckerei u. Verlagsanstalt. 2 Mk.

Sammlungen.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 16. Afl. 9.—16. (Schluss-)Lfg. Strassburg, Strassb. Druckerei u. Verlagsanstalt. à 25 Pf.; kplt. 4 Mk.; geb. 4 Mk. 50 Pf.

Heis, E, Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgem. Arithmetik u. Algebra. 83.—85. Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg. 3 Mk.

Heller, J. F., methodisch geordnete Sammlung v. Aufgaben u. Beispielen aus der darstellenden Geometrie f. Realschulen. 1. Thl. Für d. 5. Classe. Wien, Hölder. 1 Mk. 80 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 998.—1057. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Müller, E. R., Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometr. Analysis. 2. Tl.: Aufgaben, gelöst m. Anwendg. der Proportionslehre. Bearb. nach System Kleyer. Ebd. 4 Mk.

Wallentin, F., methodisch geordnete Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der Algebra u. allgemeinen Arithmetik f. die oberen Classen der Mittelschulen, Lehrer-Bildungsanstalten u. anderen gleichstehenden Lehranstalten. 3. Aufl. Wien, C. Gerold's S. Geb. 4 Mk. 20 Pf.

Wrobel, E., Uebungsbuch z. Arithmetik u. Algebra, enth. d. Formeln, Lehrsätze u. Auflösungsmethoden in systemat. Anordnung u. e. grosse Anzahl v. Fragen u. Aufgaben. 2 Tl. nebst Anh. Pensum d. oberen Classen höherer realist. Lehranstalten. Rostock, Werther. 2 Mk. 20 Pf.

— dasselbe. Anhang allein. Ebd. 80 Pf.; Resultate dazu. 60 Pf.

Tabellen.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 35. Aufl. Halle, Strien Verl. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

— Kleine Ausg. 3. Aufl. Ebd. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Gravelius, H., vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln f. d. Decimalteilung der Quadranten, nebst Tafeln der Logarithmen der Zahlen, Antilogarithmen, Tafeln der Zahlenwerte der trigonometr. Functionen, Gauss'schen Logarithmen, Quadrattafeln und Logarithmen d. Hyperbelfunctionen. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Houël, G. J., fünfstellige Logarithmentafeln d. Zahlen u. der trigonometrischen Functionen, nebst den Gaussischen Additions- u. Subtractionslogarithmen u. verschiedenen Hülfstafeln. Berlin, Alb. Cohn. 2 Mk.

Köhler, E. T., Manuale logaritmico-trigonometrico. 9. ed. italiana. Leipzig, Tauchnitz. 3 Mk.

Lüning, Th., Koppel-Tafeln nach Viertel-Strichen u. Geraden, nebst Erklärg. u. Gebrauchs-Anweisung. Bis zu Distanzen v. 500 Seemeilen erweitert. Flensburg, L. P. H. Maass. Geb. 3 Mk. 50 Pf.

Schlömilch, O., fünfstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Grosse Ausg. 4. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Divić, F., die sieben Rechnungsarten m. allgemeinen Zahlen. Auf Grundlage der Anschauung u. unter Anwendg. verallgemeinerter Definitionen nach einheitl. Plane dargestellt. Wien, Pichler's W. & S. 3 Mk. 60 Pf.

Fuss, K., Lehrbuch der Buchstabenrechnung u. Algebra f. den Schul- u. Selbstunterricht. 3. Aufl. 1. Tl. Nürnberg, Korn'sche B. 3 Mk.

Gegenbauer, L., üb. die Ringfunktionen. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

— zur Theorie der regulären Kettenbrüche. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— zur Theorie der Näherungsbrüche. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Grassmann, R., die Zahlenlehre od. Arithmetik, der niedere Zweig der Analyse. 1. Zweig der Formenlehre oder Mathematik. Stettin, Grassmann. 4 Mk.

Kohn, G., zur Theorie der associirten Formen. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Kühl, J. H., Leitfaden der Arithmetik u. Algebra. Für den Schul- u. Selbstunterricht bearb. 2. Tl. Hamburg, Kriebel. Kart. 3 Mk.

Maier, J. G., Lehrbuch der Elementar-Arithmetik zum Gebrauch in Schulen, Lehrerbildungsanstalten u. beim Selbstunterricht. 1. Tl. Das Rechnen m. absoluten Zahlengrössen. 2. Aufl. Stuttgart, Gundert. 4 Mk.

Mansion, M. P., Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Vom Verf. durchges. u. verm. deutsche Ausg. Mit Anhängen von S. v. Kowalewsky, Imschenetzky u. Darboux. Hrsg. v. H. Maser. Berlin, Springer. 12 Mk.

Molenbroek, P., Theorie der Quaternionen. Leiden, Brill. 7 Mk.

Neumann, K. W., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. 6. Aufl. Bremen, Heinsius Nachf. 2 Mk. 80 Pf.; geb. 3 Mk. 20 Pf.

Scheffler, H., Beiträge zur Zahlentheorie, insbesondere zur Kreis- u. Kugelteilung, m. e. Nachtrage zur Theorie der Gleichgn. Leipzig, Fr. Förster. 6 Mk.

Staudacher, H., Lehrbuch der Grundrechnungsarten m. Buchstabengrössen. 2. Tl.: Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- u. Kettenbrüche u. Rechnung m. unvollständ. Zahlen. Bearb nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Uhlich, E., Reihensummation auf geometrischem Wege. Grimma, Gensel. 50 Pf.

Geometrie.

Cranz, H., Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. 1. Tl.: Analytische Geometrie d. Punktes u. der Geraden. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie f. den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. 1. Tl.: Ebene Geometrie. 2. Aufl. Braunschweig, Salle. 2 Mk.

Fink, K., üb. die Einführung gewisser Grundbegriffe der projektiven Geometrie im Schulunterricht. Tübingen, Franz Fues. 80 Pf.

Fischer, E., systematischer Grundriss der Elementar-Mathematik. 2. Abtlg.: Die Geometrie (Raumlehre). Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bearb. Berlin, Carl Duncker. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 35 Pf.

Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Tl. Gleichheit der Gebilde in e. Ebenen-Abbildung ohne Massänderg. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Mattiat, D., die Raumlehre in der Volks- und Fortbildungs-

schule. Leitfaden u. Wiederholungsbuch. 4. Aufl. Gera, Hofmann. Kart. 75 Pf.

Peano, G., die Grundzüge d. geometrischen Calculs. Autoris. deutsche Ausg. v. A. Schepp. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 4. Tl.: Die Lehre vom Kreis. Die geometr. Oerter u. die merkwürd. Punkte d. Dreiecks. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Schlotke, J., analytische Geometrie der Ebene. Sammlung v. Lehrsätzen u. Aufgaben, nebst Erläutergn. u. Resultaten. Dresden, Kühtmann. 6 Mk. 80 Pf.; kart. 7 Mk.

Vonderlinn, J., Lehrbuch des Projektionszeichnens. 3. Tl. 2. Hälfte. Centralcollineation ebener u. räuml. Systeme, Kegelschnitte, rechtwinkl. u. schiefwinkl. Axonometrie. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Vries, J. de, üb. räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Waelsch, E., üb. Formen 5. Ordnung auf der cubischen Raumcurve. Ebd. 40 Pf.

Weyer, G. D. E., Einführung in die neuere konstruirende Geometrie. Zum Gebrauch f. Studirende. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Trigonometrie.

Gusserow, C. u. L. Levy, Abriss der Trigonometrie. Geometr. bearb. Berlin, Polytechn. Buchh. Kart. 1 Mk.

Haebler, Th., die Ableitung der ebenen Trigonometrie aus drei Grundgleichungen. Grimma, Gensel. 50 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Fialkowski, kurzgefasste praktische Geometrie. Leichtfassliche Anleitg. zum Vermessen, Höhenmessen u. Nivelliren f. Ackerbauschulen u. andere verwandte Lehranstalten. 2. Aufl. Pichler's W. & S. 2 Mk. 40 Pf.

— der Messtisch u. die Auflösung der wichtigsten Grundaufgaben an denselben, nebst Zollmannscher Scheibe u. Astrolabium. Für Anfänger. Ergänzungsheft zur prakt. Geometrie. Ebd. 60 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1890. Beobachtungs-System d. Königr. Sachsen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im Königr. Sachsen im J. 1890. 1. Hälfte, Abth. I u. II d. Jahrbuches d. königl. sächs. meteorolog. Institutes. VIII. Jahrg. 1890. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz, Verl. 10 Mk.

Dasselbe f. 1891. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. 1. Hft. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1891. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co. 3 Mk.

Kalender f. Geometer u. Kulturtechniker, hrsg. v. W. Schlebach. Jahrg. 1892. Nebst e. Beilage. Stuttgart, Wittwer's Verl. Geb. in Leinw. u. geh. 3 Mk. 50 Pf.; in Ldr. geb. u. geh. 4 Mk.

Rechnungsvorschriften f. die trigonometrische Aufnahme der Reichs-Schutzgebiete. Formeln u. Tafeln zur Berechng. der geograph. Coordinaten aus den Richtgn. u. Längen der Dreiecksseiten. Berlin, Mittler & S 2 Mk.

Mechanik.

Hafner, E., die Anziehungs- u Abstossungskräfte in der Natur, ihr Entstehungsgesetz u. ihre Beziehgn. zur Bewegg. Glarus, Baeschlin. 2 Mk. 60 Pf.

Technik.

Epstein, J., Einführung in das elektrotechnische Mass-System. Frankfurt, Alt. 80 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1890. 2. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Hoppe, O., Elektrotechnik. 4. Aufl. Clausthal, Grosse'sche Buchh. 50 Pf.

Kalender f. Elektrotechniker. Hrsg. v. F. Uppenborn. 9. Jahrg. 1892. München, Oldenbourg. Geb. 4 Mk.

Kalender f. Elektrotechnik pro 1892. Bearb. v. J. Krämer. 6. Jahrg. Wien, Perles' Verl. Geb. in Leinw. 3 Mk.; in Ldr. 4 Mk. 40 Pf.

Kalender f. Optiker u. Mechaniker f. d. J. 1892. Hrsg. v. e. bewährten Fachmann. 1. Jahrg. Dresden, Bloem. Geb. 1 Mk. 25 Pf.

Kapp, G., elektrische Kraftübertragung. Ein Lehrbuch f. Elektrotechniker. Autoris. deutsche Ausg., nach der 3. engl. Aufl. bearb. v. L. Holborn u. K. Kahle. Berlin, Springer. Geb. 7 Mk.

Prometheus. Illustrirte Wochenschrift üb. die Fortschritte der angewandten Naturwissenschaften, hrsg. v. J. N. Witt. 3. Jahrg. 1891/92. Nr. 2. Berlin, Mückenberger. Vierteljährlich 3 Mk.

Wagner, C., die elektrische Haustelegraphie. Allgem. verständlich dargestellt. Berlin, Mode's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Red.: O. Schneider. 12. Jahrg. 1891. Nr. 19. Leipzig, Gressner & Schr. Vierteljährlich. 2 Mk.

Finsterwalder, S., die v. optischen Systemen grösserer Oeffnung u. grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Auf Grund der Seidel'schen Formen untersucht. München, Franz'scher Verl. 3 Mk.

Huber, G., Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse. Bern, Wyss. 80 Pf.

Lampa, A., üb. die Absorption d. Lichtes in trüben Medien. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Snellen, H., Optotypi ad visum determinandum secundum formulam $v = \frac{\partial}{D}$. Ed. XI. Berlin, Peters, Verl. 3 Mk. 50 Pf.

Volkmann, P., Vorlesungen üb. die Theorie d. Lichtes. Unter Rücksicht auf die elast. u. die elektromagnet. Anschauung. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 20 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Airy, G. B., die Gravitation, e. elementare Erklärung der hauptsächlichsten Störungen im Sonnensystem, übers. v. R. Hoffmann. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. XIV. Jahrg.: 1890. Hrsg. v. der Direktion der Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. 15 Mk.

Bischof, F., Bestimmungen der Bahn d. Kometen 1890. II. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Dillmann, C., astronomische Briefe. Die Planeten. Tübingen, Laupp'sche Buchh. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Hammer, E., zur Abbildung d. Erdellipsoids. Ergänzung zu d. Verf. Schrift: Ueber die geographisch wichtigen Kartenprojektionen. Stuttgart, Wittwer's Verl. 1 Mk.

Hartmann, J., die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Hesse-Hartegg, C. v., die Einheitszeit nach Stundenzonen, ihre Einführg. im Weltverkehr u. im gewöhnl. Leben. Leipzig, Reissner. 1 Mk. 50 Pf.

Himmel u. Erde. Illustrirte naturwissenschaftliche Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. IV. Jahrg. Octbr. 1891 — Septbr. 1892. 1. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich. 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte

der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. IX. Bd. X. Jahrg. 1890. Magdeburg, Faber'sche Buchdr. Kart. 6 Mk.

Láska, W., üb. die Verbesserung der Bahnelemente. Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Meyer, M. W., Mussestunden eines Naturfreundes. Skizzen u. Studien über himml. u. ird. Dinge. 2. Afl. Berlin, Allgem. Verein f. deutsche Literatur. 6 Mk.; geb. 7 Mk.

Monatsbericht der deutschen Seewarte. 1891. 2.—4. Hft. Hamburg, Friederichsen & Co. à 50 Pf.

Panter, J. M., die Windverhältnisse auf dem Sonnenblick u. einigen anderen Gipfelstationen. Leipzig, Freytag. 5 Mk.

Petzold, W., Leitfaden f. den Unterricht in der astronomischen Geographie. 2. Aufl. Bielefeld, Velhagen & Kl. 1 Mk. 50 Pf.

Riggenbach, A., die Niederschlagsverhältnisse v. Basel. Basel, Georg, Verl. 10 Mk.

Schmidt, A., die Strahlenbrechung auf d. Sonne, e. geometr. Beitrag zur Sonnenphysik. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 1 Mk.

Tarnuzzer, Ch., Falb u. die Erdbeben. Hamburg, Verlagsanst. u. Druckerei A.-G. 60 Pf.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 feine lith. Taf., nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. Jedermann. 2. Aufl. 2.—5. Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

Physik.

Adler, G., üb. e. Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl ester Körper mittelst der Waage. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Baenitz, C., Grundzüge f. den Unterricht in der Physik. 13. Aufl. der Physik f. Volksschulen. Bielefeld, Velhagen & Kl. Kart. 90 Pf.

— Lehrbuch der Physik in populärer Darstellung. Nach method. Grunds. f. gehobene Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht bearb. 11. Aufl. Ebd. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

— Leitfaden f. den Unterricht in der Physik. 4. Aufl. Ebd. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Berghaus, physikalischer Atlas. Vollständig neu bearb. u. hrsg. v. H. Berghaus. 23. Lfg. Gotha, Justus Perthes. 3 Mk.

— dasselbe. II. u. IV. Abtlg. Ebd. Geb. 22 Mk. 40 Pf.

Crüger, J., Grundzüge der Physik, m. Rücksicht auf Chemie als Leitfaden f. d. mittlere physikalische Lehrstufe methodisch bearb. 24. Aufl. Leipzig, Amelang's Verl. 2 Mk. 10 Pf.

Czuber, C., Theorie d. Beobachtungsfehler. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Fliedner, C., Aufgaben aus der Physik nebst e. Anh. physikal. Tabellen enth. 7. Aufl., bearb. v. G. Krebs. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk. 40 Pf.; Auflösgn. 3 Mk. 60 Pf.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1885. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 41. Jahrg. 2. u. 3. Abth. Berlin, Georg Reimer. 40 Mk.

Fröhlich, J., wechselseitige Anziehungen u. Abstossungen gleichzeitig schwingender Elementarmagnete. Berlin, Friedländer & S. 1 Mk. 20 Pf.

Jamieson, A., Elemente d. Magnetismus u. der Elektrizität. Insbesondere f. angeh. Elektrotechniker. Uebers. u. m. Zusätzen versehen v. J. Kallert. Leipzig, Quandt & H. 8 Mk. 40 Pf.

Kirchhoff, G., Vorlesungen üb. mathematische Physik. 3. Bd. Electricität u. Magnetismus. Hrsg. v. M. Hauck. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 161.—164. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Kundt, die neueren (Formen) Entwickelung d. Elektricitätslehre. Rede. Berlin, Hirschwald. 80 Pf.

May, O., üb. elektrische Kraftverleihung u. Kraftübertragung. Nach seinem Vortrage, geh. im techn. Verein. Frankfurt, Alt. 1 Mk. 20 Pf.

Nentwig, H., die Physik an der Universität Helmstedt. Mit Benutzg. v. Akten d. herzogl. Landeshauptarchives zu Wolfenbüttel u. bisher ungedruckter Briefe Leibnizens in den kgl. Bibliotheken zu Halle u. Hannover dargestellt. Wolfenbüttel, Zwissler. 2 Mk.

Poincaré, H., Elektricität u. Optik. Vorlesungen. Red. v. J. Blondin. Autoris. deutsche Ausg. v. W. Jäger u. E. Gumlich. 1. Bd.: Die Theorie v. Maxwell u. die elektromagnet. Lichttheorie. Berlin, Springer. 8 Mk.

Puluj, J., üb. die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in e. Leiter m. Selbstinduction. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Riecke, E., gesammelte Abhandlungen v. J. C. Maxwell, besprochen v. E. R. Göttingen, Dieterich'sche Verlagsbuchh. 1 Mk. 60 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 31.— 35. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausg. v. E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, C. Kreichgauer, S. Lindeck. 1. Thl.: Mechanik. 1. Bd. Allgemeine Mechanik u. Mechanik der festen Körper. 4. u. 5. (Schluss-) Lfg. Berlin, Springer. à 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 29. Bd. A. u. d. T.: Abhandlungen der mathematisch-physikal. Classe. Leipzig, Hirzel. 33 Mk.

Acta mathematica. Zeitschrift, hrsg. v. G. Mittag-Leffler. 15. Bd. 1. u. 2. Heft. Berlin, Mayer & M. Für den Band 15 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. III. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Jacobi's, C. G. J., gesammelte Werke. Hrsg. auf Veranlassg. der königl. preuss. Akademie d. Wissenschaften. 7. Bd. Hrsg. v K. Weierstrass. Berlin, Georg Reimer. 4 Mk.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de. l'Academie impériale des sciences de St.-Petersburg. Tome VII. Livr. 1. Leipzig, Voss' Sort. 3 Mk. 65 Pf.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 1—8. Berlin, Herm. Paetel. à 60 Pf. — 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 100. Bd. 3.—7. Heft. Leipzig, Freytag. 13 Mk. 90 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe d. k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1891. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Thomson, W., populäre Vorträge u. Reden. Autoris. Uebersetzg. nach der 2. Aufl. des Originals. I. Bd. Konstitution der Materie. Berlin, Mayer & M. 5 Mk.; geb. 5 Mk. 80 Pf.

